Rudzki

Physik der Erde

1911

PHYSIK DER ERDE

VON DR. M. P. RUDZKI
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT KRAKAU

MIT SECHZIG ABBILDUNGEN
IM TEXT UND FÜNF TAFELN

LEIPZIG 1911 · CHR. HERM. TAUCHNITZ

Vorrede.

Das vorliegende Buch ist eine Übersetzung meiner 1909 von der Akademie der Wissenschaften Krakau in polnischer Sprache herausgegebenen „Fizyka ziemi". Es erheischt die Kenntnis der Grundsätze der Differential- und Integralrechnung aber nur in einzelnen Kapiteln. Soweit es angängig war, habe ich mich bemüht ohne Mathematik auszukommen.

Die etwas vereinzelt dastehende Lehre vom Erdmagnetismus, die Statik und Dynamik der Atmosphäre habe ich nicht in mein Buch aufgenommen. Ich bin der Meinung, daß der Zeitpunkt, ein Handbuch der Statik und Dynamik der Atmosphäre zu schreiben, noch nicht gekommen ist. Dank der Erforschung der höheren Schichten der Atmosphäre hat sich der Kreis unserer Kenntnisse sehr erweitert; dadurch aber ist manche alte Lehre unhaltbar geworden, während neue erst im Werden begriffen sind.

Im allgemeinen war ich bestrebt, die neuesten Ergebnisse zu berücksichtigen; doch mußte manche interessante Abhandlung aus Raumrücksichten unerwähnt bleiben. Es tut mir leid, nicht in der Lage gewesen zu sein, die letzten Abhandlungen Heckers, Wiecherts, Galitzins und Reids, die mir erst nach der Drucklegung der fünf ersten Kapitel zugegangen sind, zu verwerten. Übrigens hätten sie den hier eingenommenen Standpunkt nicht verändert: besonders decken sich die Ansichten Reids in seiner Abhandlung „On the Mass Movements . . . ." mit den hier vertretenen beinahe vollständig.

Ebenso konnte ich den III. Band von Poincarés Vorlesungen über Himmelsmechanik, der der Theorie der Gezeiten gewidmet ist, und den ich auch erst während der Drucklegung erhalten habe — nur in Fußnoten und eingeschalteten Sätzen berücksichtigen.

Das siebente Kapitel richtet sich hauptsächlich nach dem ersten Bande der neuen Ausgabe der Ozeanographie Krümmels, einige Paragraphen des dreizehnten nach dem Buche Heß' „Die Gletscher".

Meinen Kollegen: L. Marchlewski, J. Morozewicz, J. Schramm, L. Szajnocha (Krakau) und I. Zakrzewski (Lemberg) für liebenswürdig erteilte Ratschläge, sowie Herrn Dr. Heimbrodt (Leipzig) für die Sprachkorrektur des Manuskriptes und die Revision der Abzüge spreche ich hiermit meinen aufrichtigsten Dank aus.

Krakau, Oktober 1910.

M. P. Rudzki.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Gestalt der Erde.

§ 1. Meeresniveau und Mittelwasser. Niveaudifferenzen zwischen einzelnen Meeren.

Es ist üblich, alle Höhen auf dem Lande*) auf das Meeresniveau zu beziehen.

In der Theorie der Gestalt der Erde versteht man unter dem Meeresniveau die Oberfläche eines im Zustande absoluter Ruhe befindlichen Weltmeeres, in der Praxis dagegen den mehrjährigen mittleren Wasserstand an einem Pegel.

Vollkommene Ruhe des Meeres ist ein absolut unerreichbares Ideal. Nicht nur hat man sich vorzustellen, daß die Winde aufgehört haben zu wehen und daß die fluterzeugenden Kräfte der Sonne und des Mondes verschwunden sind, sondern man muß auch annehmen, daß die Temperatur des Wassers und der Salzgehalt unter allen Breiten und in allen Tiefen**) einen und denselben Wert haben.

Betrachte man nun den mittleren Wasserstand an einem Pegel.

Der Einfluß der Wellenbewegung verschwindet schon im täglichen Mittel. Tausende von positiven und negativen Abweichungen des Wasserstandes, welche binnen einem Tage vorkommen, gleichen sich beinahe vollständig aus.

Der Einfluß der Gezeiten eliminiert sich mit einer allen Forderungen der Praxis genügenden Präzision schon aus jährlichen,

*) Auf den Küstenkarten werden die Tiefen gewöhnlich nicht vom mittleren, sondern von einem tieferen Wasserstande, z. B. vom mittleren, oder vom tiefsten Niedrigwasser bei Gezeiten, gerechnet.

**) Diese Bedingung ist wesentlich.

um so mehr aber aus langjährigen, etwa 18 Jahre umfassenden Beobachtungsreihen*).

Die Ursache, warum oszillatorische Bewegungen sich aus den Mittelwerten langer Beobachtungsreihen eliminieren, liegt auf der Hand. Wenn die Beobachtungszeit ein genaues Vielfaches der Bewegungsperiode ist, so müssen die positiven und negativen Abweichungen einander genau aufheben, das folgt nämlich aus der Definition einer periodischen Bewegung. Wenn jedoch die Beobachtungszeit lang, aber kein genaues Vielfaches sämtlicher Perioden ist, dann heben sich alle Abweichungen auf bis auf eine, nämlich diejenige, die während der Zeit, welche nach der Subtraktion des nächsten ganzen (kleineren) Vielfachen der Periode von der Beobachtungszeit übrig bleibt, stattgefunden hat. Aber bei der Mittelbildung wird die Summe der Beobachtungen durch eine große Zahl dividiert, folglich wird die übrig gebliebene Abweichung ebenfalls in diese große Zahl dividiert und sie hat einen nur geringen Einfluß auf den Mittelwert. Nehmen wir z. B. an, daß der Wasserstand 24 mal täglich notiert wurde, bei der Bildung des jährlichen Mittels wird die Summe der Beobachtungen, folglich auch die übrig gebliebene Abweichung durch die große Zahl 8766 dividiert. Mutatis mutandis geschieht dasselbe bei der Berechnung des mittleren jährlichen Wasserstandes aus kontinuierlichen Aufzeichnungen eines Maregraphen.

Nicht so rasch wird der Einfluß des Windes eliminiert. Das tägliche Mittel kann durch einen starken Wind um mehrere Dezimeter, selbst Meter hinauf- oder heruntergeschraubt werden. Selbst die Monatsmittel können um mehrere Dezimeter von den Jahresmitteln abweichen. Nach A. Paulsen**) war der Wasserstand der Nordsee bei Esbjerg (Westküste Jütlands) im Dezember 1898 um 54 cm höher als das Normalmittel. In diesem Monat war aber die Summe der Westwinde, welche das Wasser gerade auf die Küste hintrieben, 6,6 mal so groß als die Summe der Ostwinde. Auch die Stärke des Windes war in diesem Monat überaus groß,

---

*) Es ist bekannt, daß die relativen Stellungen des Mondes und der Sonne sich nach 18 Jahren und 11⅓ oder 12⅓ Tagen (ob 11⅓ oder 12⅓, das hängt von der Anzahl der Schaltjahre ab) wiederholen. Infolgedessen werden alle möglichen Kombinationen der Sonnen- und Mondgezeiten in 18 Jahren und 11⅓ resp. 12⅓ Tagen erschöpft.

**) A. Paulsen, Die dänischen Wasserstandsmessungen . . . Hann-Band der Meteorolog. Zeitschrift S. 97—110.

nämlich im Mittel 5,2 (Skala 0 bis 12). In Esbjerg zeigen die Monatsmittel (Beobachtungszeit 1889—1902) recht starke Abweichungen, nämlich (in Zentimetern):

Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
3,0	— 7,2	— 4,3	— **13,6**	— 12,2	— 8,5

Juli	August	September	Oktober	November	Dezember
0,7	6,2	8,6	**12,8**	2,9	12,0

Diese Abweichungen sind durchweg durch die Windverhältnisse bedingt. Es herrschen nämlich in Dänemark die Westwinde das ganze Jahr hindurch, aber der April ist derjenige Monat, wo die Westwinde verhältnismäßig am seltensten sind; speziell in Esbjerg ist während des Aprils die Summe aller Westwinde gleich der Summe aller Ostwinde. Am häufigsten sind die Westwinde im Juli; im Herbst nimmt ihre Häufigkeit ab, dafür aber ihre Stärke zu. Auf diese Weise erklärt sich das Maximum des Wasserstandes im Oktober. — Sonst sind die Verhältnisse zu Esbjerg etwas extrem und jedenfalls nicht als maßgebend zu betrachten.

Die von Jahr zu Jahr wechselnden Windverhältnisse oder, sagen wir allgemeiner, Witterungsverhältnisse spiegeln sich noch in den Jahresmitteln ab. Die Jahresmittel wechseln von Jahr zu Jahr, aber, wie wir sofort sehen werden, in ziemlich engen Grenzen. Es betrug z. B. der mittlere Wasserstand zu Pola*) (von der Null der Skala des Maregraphen gerechnet):

1897	156,4 cm
1898	156,5 „
1899	158,1 „
1900	150,1 „
1901	152,1 „
1902	150,9 „
1903	156,0 „
1904	154,0 „
Mittel aus 8 Jahren	154,3 cm.

Die extremen Abweichungen vom Mittel waren + 3,8 und — 4,2 cm, folglich betrug die Amplitude der Schwankungen genau 8 cm.

*) R. v. Sterneck, Kontrolle des Nivellements . . . Mitteilungen des K. K. Militär.-Geogr. Inst. Bd. XXIV, S. 78 (Wien 1904).

Aus den Zahlen, die A. Paulsen*) anführt, ist ersichtlich, daß an der dänischen (baltischen) Küste die Amplitude der Schwankungen einzelner Jahresmittel während der dreizehn Jahre 1890 bis 1902 ca. 10 cm, an einer Station sogar $14^1/_2$ cm betrug.

Selbst mehrjährige Mittel weisen noch merkliche Differenzen auf. So war der mittlere Wasserstand zu Travemünde**)

	während der	18	Jahre	1882—1897 . . .	—12,02 cm
und	„	„ 43	„	1855—1897 . . .	—13,87 „

Die Differenz zwischen den beiden Mitteln beträgt nahezu 2 cm.

Man sieht aus diesem Beispiel, daß selbst mehrjährige Mittel keineswegs als vollkommen konstant angesehen werden können. Sie werden einerseits von säkularen (d. h. langperiodischen) Variationen meteorologischer Elemente, andererseits von langsamen Deformationen der Erde beeinflußt. Da aber die Niveauflächen von den Deformationen in gleicher Weise wie die Mittelwasser beeinflußt werden, so entspringt aus diesem letzten Grunde kein Unterschied zwischen dem Meeresniveau und dem Mittelwasser. Z. B. steigt die Küste im nördlichen Teile des Bottnischen Busens um 1,1 cm jährlich in bezug auf das Mittelwasser und um ebensoviel in bezug auf das Meeresniveau. Es bleiben somit nur die langsamen Variationen, welche von meteorologischen Einflüssen abhängen. Dieselben aus, sagen wir, zehn- oder zwanzigjährigen mittleren Wasserständen zu eliminieren, haben wir keine Mittel: wir müssen einfach annehmen, daß die mittleren Wasserstände nur bis auf einige Zentimeter konstant sind.

Nun entsprechen diese konstanten Wasserstände nicht einem Zustand der Ruhe, sondern einem Zustand stationärer Bewegung. Während oszillatorische Bewegungen: Wellen und Gezeiten, keinen Einfluß auf den mittleren Wasserstand haben, können beständige Strömungen einen solchen Einfluß gewiß ausüben.

Temporäre Strömungen oder vorübergehende Variationen beständiger Strömungen kommen natürlich nicht in Betracht; ihre Einflüsse heben sich in mehrjährigen Mitteln auf, aber die mittlere beständige Strömung kann den mittleren Wasserstand beeinflussen.

---

*) A. Paulsen, l. c. S. 104.

**) Dr. A. Westphal, Das Mittelwasser der Ostsee. Veröffentlichung des Königl. Preußischen Geod. Institutes, S. 139 u. 140. Berlin 1900.

Nach H. Mohns*) Untersuchungen dürfte man auf ziemlich große Unterschiede (bis $1^1/_2$ m und mehr) zwischen dem ideellen Meeresniveau und der mittleren Oberfläche des Meeres gefaßt sein. — Man kann aber diesem Resultate kein besonders großes Gewicht beimessen, da die Mohnsche Theorie der Meeresströmungen keineswegs ganz exakt ist. Um die Rechnungen zu Ende führen zu können, mußte Mohn zu verschiedenen willkürlichen Hypothesen und vereinfachenden Annahmen greifen.

Andererseits haben gewisse Präzisionsnivellements neuerer Zeit Ergebnisse geliefert, die auf eine ziemlich genaue Übereinstimmung der mittleren Meeresoberfläche mit dem ideellen Meeresniveau hinzudeuten scheinen.

Ein Nivellement auf dem Lande ist natürlich vom Einfluß der Meeresströmungen frei. Von einem Meere bis zu einem anderen geführt, erlaubt es zu erkennen, ob deren Mittelwasser sich in demselben oder in verschiedenen Niveaus befinden.

Angesichts der größeren Dichte des Wassers des Mittelmeeres im Vergleich zum Atlantischen Ozean ist eine Niveaudifferenz zwischen diesen Meeren zu erwarten und die Strömungen in der Straße von Gibraltar bestätigen diese Erwartung, indem die obere Strömung nach dem Mittelmeer, die untere aus dem Mittelmeer gerichtet ist. Nach dem älteren Nivellement von Bourdaloue um 1860 sollte das Mittelwasser in Brest um volle 110 cm höher als dasjenige in Marseille stehen. Nun hat aber Ch. Lallemand gezeigt, daß die große Differenz zum Teil auf gewissen systematischen Fehlern und zum Teil darauf beruht, daß der Nichtparallelismus der Niveauflächen außer acht gelassen wurde. Diese letztere Ursache kann auf längeren Strecken zu merklichen Fehlern Anlaß geben, insbesondere wenn das Nivellement über Gebirge und hohe Plateaus führt. Doch scheint die letzte von Lallemand**) ausgeführte Zusammenstellung der neueren französischen Präzisionsnivellements zugunsten einer kleinen Niveaudifferenz zu sprechen. Lallemand resümiert die Resultate der Diskussion in folgender Tabelle:

---

*) H. Mohn, Die Strömungen des europäischen Nordmeeres. Ergänzungsheft Nr. 79 zu „Petermanns Mitteilungen". Gotha 1885.

**) Ch. Lallemand, Rapport sur les travaux du Service du Nivellement général de la France en 1899—1900, C. R. des Séances de la XIII Conf. gén. de l'Assoc. géod. intern. réunie à Paris 1900, S. 184—207.

Mittlerer Wasserstand an Medimaremetern in bezug auf den mittleren Wasserstand des Mittelmeeres in Marseille.

Ort		Offizielle Kote in cm	Rationelle Kote*) in cm	Anzahl der Beobachtungsjahre
1. La Manche:	Cherbourg	— 10	— 10	10
2. Ozean:	Camaret . . .	— 5	— 2	11
	Quiberon . . .	— 1	+ 1	9
	Sables d'Olonne	— 5	— 5	7
	La Pallice . .	+ 10	+ 9	10
	Biarritz . . .	+ 21	+ 20	11
	St. Jean de Luz	+ 16	+ 15	11
3. Mittelmeer:				
	Port Vendres . .	+ 2	— 1	13
	Cette	— 3	— 3	13
	Port de Bouc . .	— 2	— 3	7
	Martigues	+ 1	0	7
	Marseille (Port Vieux)	0	0	11
	„ (Anse Calvo)	0	0	15
	La Ciotat	+ 4	+ 4	7
	Nice (Nizza) . . .	— 3	— 6	13

Schon in der ersten, noch mehr aber in der zweiten Kolonne ist das Überwiegen positiver Koten an der ozeanischen und negativer an der mediterranen Küste ganz deutlich. Die mittlere Differenz: Ozean—Mittelmeer beträgt 7,5 cm. Diese Zahl liegt aber noch in den Grenzen des möglichen Fehlers des Präzisionsnivellements, so daß eine Niveaudifferenz zwischen dem Atlantischen Ozean und dem Mittelmeer zwar wahrscheinlich, aber nicht sicher ist. Überhaupt betragen die Differenzen zwischen den Mittelwassern der europäischen Meere, d. i. der Ost- und der Nordsee, des Atlantischen Ozeans und des Mittelmeeres nicht mehr wie ein bis drei Dezimeter; so z. B. ist das Mittelwasser des Mittelmeeres um ca. 15 cm höher als das Mittelwasser der Nordsee in Ostende**). Auch diese Differenz liegt noch in den Grenzen möglicher Fehler.

---

*) Diese letzte wurde berechnet nach einer Ausgleichung des Nivellements.

**) Ch. Lallemand, Rapport général sur les nivellements de précision (1903–1906). C. R. des Séances de la XV. Conférence générale de l'Ass. géod. intern. à Budapest 1906, II. Bd., S. 119.

Das Präzisionsnivellement von 1896—1898 längs der preußischen Ostseeküste hat gezeigt, daß zwischen Travemünde und Swinemünde das Mittelwasser der Ostsee ein wenig gegen Osten aufsteigt*). Es waren nämlich die fünfzehnjährigen Mittelwasser (auf die preußische Normalnull [N. N.] bezogen):

in	Travemünde	—12,0 cm
„	Marienleuchte	—12,6 „
„	Wismar	—12,5 „
„	Warnemünde	—11,2 „
„	Arkona	— 4,7 „
„	Swinemünde	— 6,7 „

Die Luftlinie zwischen Travemünde und Swinemünde beträgt ca. 230 km, die Länge der nivellierten Strecke wird gewiß mehr als 300 km betragen, also sind die Differenzen zwischen den Mittelwassern von derselben Größenordnung wie die möglichen Fehler, und wenn wir das Ansteigen des Mittelwassers gegen Osten doch als eine Tatsache hinnehmen, so geschieht es hauptsächlich wegen des regelmäßigen Ganges der Zahlen; je weiter gegen Osten, desto höher (mit gewissen Schwankungen) das Mittelwasser. Westphal schreibt, wohl mit Recht, dieses Ansteigen des Mittelwassers gegen Osten dem Einfluß der überwiegenden Westwinde zu, welche das Wasser der Ostsee gegen Osten hintreiben. Er führt an, daß im Januar und Februar, ferner im Juli, August und Dezember 1898 starke Westwinde herrschten und gleichzeitig das Ansteigen des Wasserstandes gegen Osten sehr ausgeprägt war, im März und Oktober aber wehten Ostwinde und der Wasserstand im Osten war niedriger als im Westen.

Fig. 1.



Vor kurzem wurde in Nordamerika das große Präzisionsnivellement zwischen dem Atlantischen und dem Stillen Ozean beendet. Die Ergebnisse desselben sind noch nicht endgültig be-

*) Dr. A. Westphal, Das Mittelwasser der Ostsee. Veröffentlichungen des Königl. Preußischen Geodätischen Instituts. Neue Folge. Nr. 2.

rechnet, doch konnten die Herren O. H. Tittmann und J. F. Hayford*) die Niveaudifferenz zwischen den beiden Ozeanen bereits angeben. Dieselbe erreicht noch nicht 19 cm. Ebenso beläuft sich die Niveaudifferenz zwischen dem Mittelwasser zu Sandy Hook (nahe bei New York) am atlantischen Gestade und dem Mittelwasser zu Galveston am Golf von Mexiko auf kaum 4 cm. Angesichts der großen Distanzen zwischen den Endpunkten des Nivellements sind hier die Grenzen der möglichen Fehler noch viel weiter als bei den europäischen Nivellements, und Differenzen von 4—19 cm sind als belanglos zu betrachten.

Wie man sieht, sind die auf die Niveaudifferenzen zwischen einzelnen Meeren und Ozeanen bezüglichen Daten nicht gerade sehr zahlreich; diejenigen aber, die vorhanden sind, können nicht anders gedeutet werden, als daß die Niveaudifferenzen verschiedener Meere und Ozeane innerhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegen und keineswegs mehr als einige Dezimeter betragen. Dies kann aber mit der Hypothese einer durch die Strömungen stark deformierten Meeresoberfläche nicht vereinbart werden. Man muß im Gegenteil annehmen, daß verschiedene Einflüsse einander kompensieren. Wenn z. B. der Oberstrom die Meeresoberfläche in einem Sinne deformiert, so wirkt der Unterstrom im entgegengesetzten Sinne usw. Im Endresultate bleiben wahrscheinlich nur sehr kleine Denivellationen übrig.

Wir haben bisher einen Faktor außer acht gelassen: den Luftdruck. Da sein Einfluß statisch ist, so muß er vollends zur Geltung kommen und der mittlere jährliche Wasserstand muß vom mittleren jährlichen Drucke abhängig sein. Man sieht aber sofort, daß die Abweichungen des Mittelwassers vom ideellen Meeresniveau, welche von den Unterschieden der jährlichen Drucke abhängen, in sehr enge Grenzen eingeschlossen sind. Der höchste jährliche Druck im Meeresniveau in der Gegend der Azoren beträgt 766 mm. Die niedrigste auf der Südhalbkugel verzeichnete Isobare weist den Druck von 746 mm auf, aber weiter gegen Süden existieren noch niedrigere Drucke; so hat z. B. die „Southern Croß" auf Kap Adare in 71° 18′ südl. Br. 740,6 mm gefunden**). Die Differenz 766 — 740,6 = 25,4 mm Queck-

*) O. H. Tittmann und J. F. Hayford, U. S. Geodetic Operations in 1903—1906. C. R de la XVe Conf. gén. de l'Ass. géod. Intern. réunie à Budapest 1906, I. Bd., S. 195.

**) J. Hann, Die Ergebnisse . . . Met. Zeitschr., Bd. XXII (1905), S. 319 bis 321. Das Resultat beruht freilich auf einer einjährigen Beobachtungsreihe,

silber entspricht einer Wasserstandsdifferenz von ca. 33,5 cm. Das ist aber das Maximum. Die von den Luftdruckdifferenzen abhängigen Wasserstandsdifferenzen an europäischen Küsten können höchstens ein paar Zentimeter betragen.

Auf diese Weise werden wir endgültig zu dem Schlusse geführt, daß die sogenannten Mittelwasser vom ideellen Meeresniveau nicht mehr als um einige Dezimeter abweichen können.

§ 2. Verlängerung des Meeresniveaus unter die Kontinente. Nivellieren.

Man denkt sich das Meeresniveau unter die Kontinente fortgesetzt. Nach der Definition Pratts wird man das Meeresniveau an einem gewissen Orte A inmitten des Kontinentes erhalten, wenn man vom nächsten Meere nach A einen unendlich schmalen Kanal ausgräbt. Der Wasserstand in diesem Kanal wird nämlich das Meeresniveau am Orte A sein.

Die Beschränkung, daß unser Kanal unendlich schmal sein muß, ist notwendig, und zwar aus zwei Gründen: 1. Bei endlicher Breite des Kanals wäre ein endliches Quantum des Meerwassers notwendig, um ihn zu füllen, folglich müßte die Oberfläche des Wassers im Meere ein wenig fallen. 2. Bei endlicher Breite des Kanals würde die Massenverteilung, folglich auch das Attraktionspotential und die Niveauflächen, unter diesen das Meeresniveau, kleine Änderungen erfahren.

Nimmt man aber an, daß der Kanal unendlich schmal ist, so muß man gleichzeitig annehmen, daß die Kapillarkräfte in demselben nicht wirksam sind.

Offenbar ist unsere Definition eine reine Fiktion, denn es ist nicht möglich, einen unendlich schmalen Kanal auszugraben. Wir können aber die Lage des Meeresniveaus an einem Orte A inmitten des Kontinents durch ein von A aus bis an die Meeresküste fortgeführtes Nivellement bestimmen. Genauer gesagt, bestimmen wir durch das Nivellement eigentlich nicht die Lage des Meeresniveaus im Orte A, sondern die Lage einer Niveaufläche, welche durch eine bestimmte Höhenmarke geht.

---

wobei noch ein Monat interpoliert werden mußte. Der rohe Wert ist eigentlich (auf 0° C reduziert) 738,5 mm in 5,8 m Höhe. Dies reduziert zu 0 m Höhe und zur Normalschwere ergibt 740,6 mm.

In Österreich-Ungarn z. B. werden alle Nivellements auf die Null der Skala des Maregraphen zu Triest bezogen. Das Mittelwasser des Adriatischen Meeres (aus achtjährigen Beobachtungen in den Jahren 1875—1879 und 1901—1904, mit Ausschluß des Januars und Februars 1878) in Triest befindet sich ca. 9 cm höher und die Höhenmarke Nr. 1 am Molo Sartorio um 335,2 cm höher*).

In Preußen**) dient allen Nivellements zum Ausgangspunkt die sogenannte Normalnull (N. N.). Die diesbezügliche Höhenmarke befindet sich an der Berliner Sternwarte, und zwar einige Dezimeter über dem Niveau der Ost- und der Nordsee. Es sind nämlich die Koten der Mittelwasser dieser Meere in verschiedenen Häfen negativ (man vergl. die Tabelle im vorigen Paragraphen auf S. 7).

Die französische Normalnull entspricht bis auf 2 mm dem mittleren Wasserstand des Mittelmeers zu Marseille während der Zeit vom 1. Februar 1885 bis 1. Januar 1895. Die belgische Normalnull ist gleich dem mittleren Wasserstand der Nordsee zu Ostende in der Zeit von 1878 bis 1885. Sie ist definiert durch die Kote 3,658 m, welche dem Stemmgeschwell (Drempel) der Schleuse des „Bassin du Commerce" zugeteilt wurde. Der mittlere 27jährige (1878—1905) Wasserstand zu Ostende ist 0,6 cm höher als die belgische Normalnull. — In Holland befindet sich die Marke A. P. (Amsterdamische Peil) 16,2 cm über dem Mittelwasser aus 170 Jahren 1701—1871 usw.

Obgleich die europäischen Nivellements miteinander verbunden sind, so ist es doch nicht immer möglich, eine ganz zuverlässige Niveaudifferenz zwischen der Normalnull eines und der Normalnull eines anderen Landes anzugeben. Folgende Daten können wir aber nach der oben zitierten Abhandlung Lallemands anführen.

Nehmen wir die belgische Normalnull zum Vergleichsobjekt. Die preußische Normalnull befindet sich 34 cm, die französische 15 cm und die holländische A. P. 32 cm über der belgischen.

Zum Nivellieren braucht man zwei Instrumente: einen Theodolit mit Libelle und eine Latte. Die Libelle ist der wesentliche Bestandteil eines jeden Nivellierinstruments, denn mit ihrer Hilfe

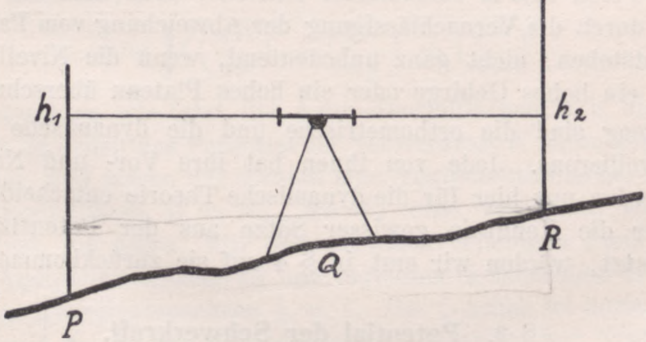
*) R. v. Sterneck, l. c. S. 81.

**) Diese und die weiteren Angaben nach Ch. Lallemand, Rapport général sur les nivellements de précision (1903 à 1906). C. R. des Séances de la XVe Conf. gén. de l'Assoc. géod. intern. réunie à Budapest 1906. II. Teil. 1908.

können wir die optische Achse des Fernrohrs horizontal, d. h. parallel zu einer Niveaufläche, einstellen. Die (Röhren)libelle ist ein Stück Glasrohr, so gebogen, daß die geometrische Achse des Rohres einen Kreisbogen bildet. Je größer der Halbmesser des Kreises, desto empfindlicher die Libelle; bei sehr empfindlichen Libellen beträgt der Halbmesser Hunderte von Metern. Die Libelle wird so gestellt, daß die geometrische Achse des Rohres in eine Vertikalebene, mit der Konvexität nach oben, kommt. Auf der oberen dem Beobachter zugekehrten Seite des Rohres befindet sich eine ins Glas eingeritzte Skala. Das Rohr ist an beiden Enden geschlossen und mit einer Flüssigkeit (Alkohol oder Äther) gefüllt bis auf die sogenannte Luftblase (eigentlich besteht die Blase aus Alkohol- resp. Ätherdämpfen), die natürlich immer die höchste Stelle im Rohre einnimmt. — Wenn die Luftblase „einspielt", d. h. wenn ihre beiden Enden gleichweit entfernt sind von der Null der Skala, und wenn gleichzeitig die optische Achse des Fernrohrs genau senkrecht steht auf der Geraden, welche die Null der Skala mit dem Krümmungsmittelpunkt der Libelle verbindet, dann ist die optische Achse des Fernrohrs horizontal.

Die Nivellierlatte ist eine etwa 2,5 m lange Stange mit einer gut sichtbaren Zentimeterteilung. Beim Nivellieren wird die Latte senkrecht gestellt.

Fig. 2.



Nehmen wir an, daß der Theodolit in Q steht, und daß seine optische Achse bereits horizontal ist. Wir stellen die Latte z. B. rückwärts in P auf, visieren mit dem Fernrohr und finden, daß der Horizontalfaden im Fernrohr mit dem Teilstrich h_1 der Latte zusammenfällt (Fig. 2). Jetzt stellen wir die Latte vorwärts in R

auf und finden, daß der Horizontalfaden mit dem Teilstrich h_2 der Latte zusammenfällt. War die Stellung des Fernrohrs bei beiden Visierungen horizontal, so ist $h_2 - h_1$ die Vertikaldistanz zwischen den Niveaus der Punkte P und R. Nivelliert man von der Mitte aus, d. h. sind die Distanzen PQ und RQ gleich, dann schadet ein kleiner Fehler in der Horizontaleinstellung des Theodoliten nicht. Deswegen trachtet man der Bedingung $PQ = RQ$ zu genügen (Nivellieren aus der Mitte). Ist sie aber nicht erfüllt, dann muß man eine entsprechende kleine Korrektion anbringen.

Somit gibt uns das Nivellieren Mittel an die Hand, die Vertikaldistanzen zwischen verschiedenen Niveaus zu messen. Beginnt man das Nivellieren an der Normalnull zu Triest und führt es beispielsweise bis Krakau fort, so kann man bestimmen, wie hoch die Höhenmarke an der Außenwand der Krakauer Sternwarte über dem Niveau der Triester Normalnull liegt.

Das, was wir soeben auseinandergesetzt haben, war die gewöhnliche Theorie des Nivellierens, die aber nur dann streng wäre, wenn die Niveauflächen parallele Ebenen oder parallele konzentrische Kugelflächen bildeten. — Bei einem Präzisionsnivellement muß man den Mangel an Parallelismus zwischen den Niveauflächen berücksichtigen. Diese Abweichung ist gar nicht so besonders groß: zwei Niveauflächen, die am Äquator 100 m Abstand haben, sind an den Polen 99,5 m voneinander entfernt; doch sind die Fehler, welche durch die Vernachlässigung der Abweichung vom Parallelismus entstehen, nicht ganz unbedeutend, wenn die Nivellementsstrecke ein hohes Gebirge oder ein hohes Plateau überschreitet.

Streng sind die orthometrische und die dynamische Theorie des Nivellierens. Jede von ihnen hat ihre Vor- und Nachteile. Wir werden uns hier für die dynamische Theorie entscheiden. Da sie aber die Kenntnis gewisser Sätze aus der Potentialtheorie voraussetzt, werden wir erst in § 4 auf sie zurückkommen.

§ 3. Potential der Schwerkraft.

Eine Niveaufläche ist überall normal zur Richtung der Schwerkraft. Die Schwerkraft setzt sich aus zwei Kräften zusammen: aus der Attraktion und aus der Zentrifugalkraft, welche durch die Umdrehung der Erde um die Polarachse entsteht. Die Anziehung hat ein Potential, d. h. ihre Komponenten in drei zueinander rechtwink-

ligen Richtungen sind partielle Differentialquotienten einer und derselben Funktion nach den drei Koordinaten. Diese Funktion wird das Potential der Attraktion genannt. Bezeichnet man z. B. die Komponenten der Attraktion in den Richtungen x, y, z mit X, Y, Z und das Potential der Attraktion durch V, so ist

$$X = \frac{dV}{dx},\ Y = \frac{dV}{dy},\ Z = \frac{dV}{dz} \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Die Zentrifugalkraft hat auch ein Potential, das wir mit v bezeichnen werden. Die Komponenten der Zentrifugalkraft X', Y', Z' sind folglich

$$X' = \frac{dv}{dx},\ Y' = \frac{dv}{dy},\ Z' = \frac{dv}{dz} \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Aber die Komponenten der Schwerkraft sind nichts anderes als Summen der Komponenten der Attraktion und der Zentrifugalkraft, nämlich:

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dv}{dx},\ \frac{dV}{dy} + \frac{dv}{dy},\ \frac{dV}{dz} + \frac{dv}{dz} \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Folglich können wir

$$V + v = W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4$$

setzen und sagen, daß die Summe der Potentiale der Attraktion und der Zentrifugalkraft das Potential der Schwerkraft bildet. Die Resultante, die man mit g bezeichnet, ist die ganze Schwerkraft. — Ihr Ausdruck ist:

$$g = \sqrt{\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad 5$$

Betrachten wir jetzt die Äquipotentialflächen, d. h. diejenigen Flächen, in denen das Potential der Schwerkraft W einen konstanten Wert hat, und fassen wir speziell eine Äquipotentialfläche, z. B. die Äquipotentialfläche $W = W_0$, wo W_0 eine bestimmte Konstante bezeichnet, ins Auge. Wir nehmen einen beliebigen Punkt M auf dieser Äquipotentialfläche an und errichten in demselben drei rechtwinklige Koordinatenachsen ξ, η, ζ. Die ζ-Achse sei normal (senkrecht) und die ξ- und η-Achsen seien tangential zur Niveaufläche im Punkte M. Das ist immer möglich, und zwar existiert nur eine Normale und nur eine berührende Ebene. Ausnahmen kämen nur dann in Betracht, wenn der Punkt M sich auf einer Spitze oder auf einem Firste befände, das kommt aber in der Praxis nicht vor.

Bilden wir jetzt die Differentialquotienten: $\frac{dW}{d\xi}$, $\frac{dW}{d\eta}$, $\frac{dW}{d\zeta}$. Indem die Achsen ξ und η im Punkte M die Äquipotentialfläche tangieren, so ist im Punkte M:

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{dW}{d\eta} = 0.$$

Die dritte Komponente ist natürlich von der Null verschieden. Aus der Gleichung 5 sieht man, daß diese Komponente der Größe und Richtung nach der (ganzen) Schwerkraft gleich ist. Man hat nämlich:

$$g = \pm \frac{dW}{d\zeta},$$

je nachdem die positive ζ-Achse nach derjenigen Richtung weist, in welcher die Funktion W wächst, oder nach derjenigen, wo sie abnimmt.

Da die ζ-Achse normal zur Äquipotentialfläche im Punkte M steht, so ist umgekehrt die Äquipotentialfläche im Punkte M zur ζ-Achse, d. h. zur Richtung der Schwerkraft, normal. Nun war der Punkt M ganz beliebig und unsere Überlegung kann auf jeden Punkt der Äquipotentialfläche angewandt werden. Folglich ist die Äquipotentialfläche überall zur Richtung der Schwerkraft normal und mit einer Niveaufläche identisch.

Gleichzeitig sehen wir, daß die Oberfläche einer absolut ruhigen Flüssigkeit (konstanten Druck vorausgesetzt) mit einer Äquipotentialfläche zusammenfallen muß. Es wirken nämlich, wie wir soeben gesehen haben, keine Kräfte längs der Äquipotentialfläche, folglich gibt's keine Ursache, die irgendeine Bewegung der Teilchen in der Äquipotentialfläche verursachen könnte. Die Schwerkraft aber wirkt senkrecht zur Äquipotentialfläche und drückt nur die oberen Flüssigkeitsschichten auf die unteren.

Da die Niveauflächen nichts anderes als Äquipotentialflächen der Schwerkraft sind, werden ihre Gleichungen in der Gestalt $W =$ konst. geschrieben. Gibt man der Konstante eine Reihe aufeinander folgender z. B. abnehmender Werte: $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots$ usw., so wird man nach und nach immer andere und immer vom Erdzentrum weiter entfernte Niveauflächen erhalten. Diese Flächen sind geschlossen und umhüllen eine die andere, ohne sich zu schneiden oder zu berühren.

§ 4. Dynamische Theorie des Nivellierens.

Fassen wir zwei sehr nahe Niveauflächen ins Auge. Es sei die Gleichung einer dieser Flächen $W = c$, die Gleichung der zweiten $W' = c + \Delta c$, wo c und Δc Konstanten bedeuten. Auf Grund des Taylorschen Lehrsatzes kann man sofort schreiben:

$$W' = W + \frac{dW}{d\zeta}\zeta + \frac{1}{2}\frac{d^2W}{d\zeta^2}\zeta^2 + \ldots = c + \Delta c.$$

Indem man angenommen hat, daß die beiden Niveauflächen sehr nahe aneinander liegen, ist ζ eine kleine Größe und die weiteren Glieder der Entwicklung können vernachlässigt werden. Berücksichtigt man ferner, daß $W = c$, dann reduziert sich die obige Gleichung auf:

$$\frac{dW}{d\zeta}\zeta = \Delta c.$$

Falls die positiven ζ nach oben gerichtet sind, so ist $\frac{dW}{d\zeta} = -g$, wo g die Schwerkraft bedeutet. In diesem Falle aber ist auch Δc negativ, da der Wert des Schwerkraftpotentials abnimmt, wenn man von unten nach oben fortschreitet. Setzen wir also $\Delta c = -k$, wo k eine kleine positive Konstante bedeutet, so kann die obige Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$g\zeta = k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6$$

Hier bezeichnet ζ den vertikalen Abstand beider Niveauflächen. Es ist klar, daß dieser Abstand umgekehrt proportional zur Schwerkraft variiert.

In der gewöhnlichen Theorie des Nivellierens wird g, folglich auch ζ als konstant angesehen. In der strengen Theorie müssen die sonst kleinen Variationen der Schwerkraft berücksichtigt werden. Der Abstand der Niveauflächen unter dem 45. Breitengrade wird als normal angesehen und die anderen Abstände werden darauf reduziert. Zu dem Zwecke dividiert man die Gleichung 6 beiderseits durch g_{45^0}, d. h. durch den theoretischen Wert der Schwerkraft unter dem 45. Breitengrade im Meeresniveau. Die Gleichung 6 wird zu:

$$\frac{g}{g_{45}}\zeta = \frac{k}{g_{45}},$$

was auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{g_{45} + (g - g_{45})}{g_{45}}\zeta = \zeta + \gamma\zeta = \frac{k}{g_{45}}.$$

ζ oder, wie es in § 2 bezeichnet wurde, $h_2 - h_1$, ist der an der Latte abgelesene Vertikalabstand zwischen den Niveauflächen; ferner ist $\gamma\zeta$, wo

$$\gamma = \frac{g - g_{45}}{g_{45}},$$

diejenige Korrektion, die man anbringen muß, um den gemessenen Abstand auf den normalen zu reduzieren.

§ 5. Das Geoid. Die Eigenschaften des Attraktionspotentials.

Unter den anderen Niveauflächen wird das Meeresniveau speziell als Referenzfläche auserkoren. Es hat auch einen besonderen Namen erhalten. Das Meeresniveau samt seiner Fortsetzung unter den Kontinenten heißt nämlich Geoid. Was für eine Fläche ist nun das Geoid?

Äußerlich sieht es wie ein Rotationsellipsoid aus, doch sicher ist es keine algebraische Fläche. Es ist eine inhomogene, aus zahlreichen Stücken verschiedener Flächen zusammengesetzte Fläche. Das größte Stück entspricht dem Weltmeere, die nächstgroßen den Kontinenten, wobei Asien und Europa einerseits, die beiden Amerika andererseits als ein Stück zu zählen sind, die kleineren Stücke entsprechen den Inseln. Das kann aber einem etwas unverständlich erscheinen; wir müssen also auseinandersetzen, worum es sich eigentlich handelt. Zu diesem Zwecke müssen wir uns etwas in die Theorie des Potentials vertiefen.

Wir haben in § 3 Gl. 4 gefunden, daß das Potential der Schwerkraft eine Summe ist des Potentials der Attraktion und des Potentials der Zentrifugalkraft. Das Potential der Zentrifugalkraft wird im ganzen Raume durch eine und dieselbe Funktion ausgedrückt: es ist einfach proportional dem Quadrate des Produkts: Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation mal kürzeste Distanz von der Drehachse. Das Potential der Attraktion verhält sich ganz anders; es wird durch andere Funktionen innerhalb und durch andere außerhalb der anziehenden Körper ausgedrückt.

Bekanntlich ist die gegenseitige Anziehung zweier materieller Punkte m und m' dem Produkte ihrer Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung r umgekehrt proportional. Es seien x, y, z die Koordinaten des Punktes m und x', y', z' die Koordinaten

des Punktes m'; die Anziehung des Punktes $m'(x', y', z')$ auf den Punkt $m(x, y, z)$ wird durch die Formel:

$$\pm k \cdot \frac{m m'}{r^2},$$

wo k die Attraktionskonstante bedeutet, ausgedrückt. Gleichzeitig ist

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Wir haben vorderhand das Vorzeichen unbestimmt gelassen. Falls aber die Richtung von m' nach m als positiv angenommen wird, ist das Zeichen — zu schreiben, da nach einem allgemeinen Übereinkommen die abstoßenden Kräfte als positiv und die anziehenden als negativ betrachtet werden. — Wir nehmen noch an, daß die Masse des Punktes m gleich der Einheit ist und schreiben endgültig:

$$-k \frac{m'}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7$$

als den Ausdruck der Kraft, mit welcher der anziehende Punkt x', y', z' von der Masse m' eine im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit anzieht. Die Komponenten der Anziehung in den Richtungen der Koordinatenachsen erhält man, wenn man den Ausdruck 7 mit den Richtungskosinus der Geraden, welche vom Punkte x', y', z' nach dem Punkte x, y, z geht, multipliziert. — Diese Kosinus sind:

$$\frac{x - x'}{r}, \; \frac{y - y'}{r}, \; \frac{z - z'}{r};$$

und die Komponenten der Kraft, mit welcher der Punkt $m'(x', y', z')$ die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit anzieht, sind:

$$-km' \frac{(x - x')}{r^3}, \; -km' \frac{(y - y')}{r^3}, \; -km' \frac{(z - z')}{r^3} \quad . \; . \; . \quad 8$$

Man sieht sofort, daß diese letzten Ausdrücke nichts anderes sind, als die partiellen Differentialquotienten der Funktion $\frac{km}{r}$ nach den Koordinaten des angezogenen Punktes x, y, z. Nach der Definition des Potentials ist somit $\frac{km'}{r}$ das Attraktionspotential des materiellen Punktes $m'(x', y', z')$ auf die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit.

Hat man mehrere anziehende Punkte, z. B.

$$m_1(x_1, y_1, z_1), \quad m_2(x_2, y_2, z_2), \quad m_3(x_3, y_3, z_3) \; . \; . \; . \text{ usw.},$$

so sind die Komponenten ihrer Anziehung auf die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit:

$$-km_1\frac{(x-x_1)}{r_1^3},\ -km_1\frac{(y-y_1)}{r_1^3},\ -km_1\frac{(z-z_1)}{r_1^3},$$

$$-km_2\frac{(x-x_2)}{r_2^3},\ -km_2\frac{(y-y_2)}{r_2^3},\ -km_2\frac{(z-z_2)}{r_2^3}$$

usw. usw., wobei

$$r_1^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2.$$

$$r_2^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2 \text{ usw.}$$

Man kann natürlich die untereinander parallelen Kraftkomponenten summieren. Auf diese Weise wird man die Komponenten der Anziehung der Gesamtheit materieller Punkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ usw. auf die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit erhalten. Diese Komponenten in den drei Richtungen sind:

$$-k\sum m_n\frac{(x-x_n)}{r_n^3},\ -k\sum m_n\frac{(y-y_n)}{r_n^3},\ -k\sum m_n\frac{(z-z_n)}{r_n^3}.$$

Man sieht sofort, daß

$$\left.\begin{array}{c}-k\sum m_n\dfrac{(x-x_n)}{r_n^3}=\dfrac{dV}{dx},\quad -k\sum m_n\dfrac{(y-y_n)}{r_n^3}=\dfrac{dV}{dy}\\ -k\sum m_n\dfrac{(z-z_n)}{r_n^3}=\dfrac{dV}{dz}\end{array}\right\},\quad . \qquad 9$$

wobei

$$V=k\sum\frac{m_n}{r_n}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ 10$$

V ist das Potential der Attraktion der Gesamtheit der materiellen Punkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ usw. auf die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit. Haben wir statt einer Gruppe diskreter Punkte eine kontinuierliche anziehende Masse, dann darf man

$$m_n=\varrho\cdot d\omega$$

setzen, wobei ϱ die Dichte und $d\omega$ das Volumenelement der anziehenden Masse bedeutet. Gleichzeitig darf man statt des Summenzeichens das Integrationszeichen und statt der Koordinaten diskreter Punkte: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots$ usw. die „laufenden" Koordinaten der anziehenden Punkte, z. B. ξ, η, ζ schreiben, wobei ξ, η, ζ auf dieselben Achsen wie x, y, z bezogen werden. — Der Ausdruck 10 verwandelt sich dann in

$$V=k\,S\,\varrho\frac{d\omega}{r},\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ 11$$

wobei S die dreifache Raumintegration über das ganze vom anziehenden Körper eingenommene Volumen bezeichnet und

$$d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad \varrho = f(\xi, \eta, \zeta)$$

ist.

Bisher haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß der angezogene Punkt x, y, z außerhalb der anziehenden Masse liegt. Jetzt werden wir annehmen, daß der angezogene Punkt sich innerhalb der anziehenden Masse befindet. Mit anderen Worten: wir wollen die Anziehung eines gegebenen Körpers auf seine eigenen Punkte, oder sagen wir lieber, seine eigenen Elemente betrachten. Sofort bemerken wir, daß in diesem Falle im Integral 11 Elemente mit sehr kleinen, ja unendlich kleinen r im Nenner auftreten. Trotzdem bleibt das Integral 11 endlich, wie man sich durch Umwandlung zu sphärischen Polarkoordinaten mit dem Koordinatenanfang im angezogenen Punkte leicht überzeugen kann. Warum es endlich bleibt, das werden wir sofort verstehen, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß der Nenner unter dem Integralzeichen die Dimensionen einer Länge hat, während der Zähler die Dimensionen eines Volumens, d. h. der dritten Potenz einer Länge besitzt. Der Zähler ist überall eine unendlich kleine Größe dritter Ordnung, der Nenner wird zu einer unendlich Kleinen erster Ordnung nur im angezogenen Punkte. Der Quotient einer unendlich Kleinen dritter Ordnung durch eine unendlich Kleine erster Ordnung gibt eine unendlich Kleine zweiter Ordnung, und die Summe, d. h. das Integral 11, bleibt stetig und endlich.

Die ersten Differentialquotienten des Attraktionspotentials sind ebenfalls endlich und stetig. Im angezogenen Punkte wird der Zähler unter dem Integralzeichen zu einer unendlich Kleinen vierter Ordnung und der Nenner zu einer unendlich Kleinen dritter Ordnung. — Aber die zweiten Differentialquotienten des Attraktionspotentials bleiben zwar immer endlich, nicht aber stetig. Sie sind stetig außerhalb des anziehenden Körpers und ebenfalls stetig innerhalb desselben, aber beim Übergang vom äußeren zum inneren Gebiete, d. h. beim Überschreiten der Grenze des Körpers, verändern sie plötzlich ihre Werte um einen endlichen Betrag.

Wir werden nun die drei Differentialquotienten: $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ etwas näher betrachten. Im äußeren Raume haben wir:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -k\,S\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right]\varrho\, d\omega \quad .\ .\ .\ .\ 12$$

und zwei ähnliche Formeln für die Differentialquotienten $\frac{d^2 V}{d y^2}$ und $\frac{d^2 V}{d z^2}$. Man sieht aus der Formel 12, daß innerhalb des anziehenden Körpers, d. h. im Punkte

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta$$

Zähler und Nenner unter dem Integralzeichen unendlich Kleine von derselben Ordnung sind und daß der Wert des Integrals 12 ganz unbestimmt wird. Wir können aber den Wert des Integrals auf eine andere Weise berechnen. Wir scheiden innerhalb des anziehenden Körpers eine kleine Kugel um den Punkt

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

als Mittelpunkt aus. Wir denken uns den Radius dieser Kugel endlich, aber so klein, daß die Dichte innerhalb der Kugel als konstant betrachtet werden kann. — Unserer Annahme entsprechend können wir jetzt schreiben:

$$V = V_1 + V_2, \quad \frac{d^2 V}{d x^2} = \frac{d^2 V_1}{d x^2} + \frac{d^2 V_2}{d x^2} \text{ usw.} \quad .\ .\ .\ 13$$

Hier bedeutet V_1 das Potential des ganzen Körpers mit Ausnahme der kleinen Kugel und V_2 das Potential der kleinen Kugel. Das Potential V_1 sowie seine Differentialquotienten bieten keine Schwierigkeiten, indem im ganzen Raume, auf welchen sich dieses Potential bezieht, r endlich bleibt. Die zweiten Differentialquotienten des Potentials V_1 haben die in der Formel 12 angegebene Gestalt. Die Berechnung derselben bietet keine besondere Schwierigkeit; nur hat man zu beachten, daß der von der kleinen Kugel eingenommene Raum bei der Integration ausgeschlossen werden muß. Was das Potential V_2 anbetrifft, so ist es (dank der Annahme, daß die Dichte innerhalb der Kugel nahezu konstant ist) nichts anderes als das innere Attraktionspotential einer homogenen Kugel. Da eine homogene Kugelschicht bekannterweise keine Anziehung auf einen innerhalb derselben befindlichen Punkt ausübt, reduziert sich die Anziehung einer homogenen Kugel auf eine innerhalb derselben in der Entfernung r vom Zentrum befindliche Masseneinheit auf:

$$\frac{d V_2}{d r} = -k \cdot \frac{M}{r^2},$$

wo M die innerhalb des Radius r eingeschlossene Masse bedeutet. Es ist somit:

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3 \text{ und } \frac{dV_2}{dr} = -\frac{4}{3}\pi k\varrho r.$$

Aus dieser letzten Formel folgt aber sofort:

$$\frac{dV_2}{dx} = \frac{dV_2}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} = -\frac{4}{3}\pi k\varrho r\cdot\frac{(x-\xi)}{r} = -\frac{4}{3}\pi k\varrho(x-\xi),$$

und zuletzt:

$$\frac{d^2 V_2}{dx^2} = -\frac{4}{3}\pi k\varrho. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14$$

Folglich hat der zweite Differentialquotient nach x (und ebenso nach y und nach z) des inneren Attraktionspotentials der Kugel einen von der Lage des Punktes unabhängigen Wert. Die zweiten Differentialquotienten der Gestalt $\frac{d^2 V_2}{dx\,dy}$ usw. sind gleich Null.

Den Wert des zweiten Differentialquotienten von V_2 entnehmen wir der Formel 14, den Differentialquotienten von V_1 schreiben wir nach der Formel 12. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -k\,S\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right]\varrho\,d\omega - \frac{4}{3}\pi k\varrho \quad . \quad . \quad 15$$

und ähnliche Formeln für $\frac{d^2 V}{dy^2}$ und $\frac{d^2 V}{dz^2}$. — Man muß hervorheben, daß in der Formel 15 das Symbol ϱ die Dichte im angezogenen inneren Punkt x, y, z bezeichnet und daß die Integration sich auf den ganzen vom anziehenden Körper eingenommenen Raum bezieht, mit Ausschluß der kleinen Kugel, deren Radius aber unendlich klein gemacht werden kann.

Vergleicht man die Formeln 12 und 15, so sieht man sofort, daß die zweiten Differentialquotienten des Attraktionspotentials beim Übergang vom äußeren zum inneren Raume plötzlich um $\frac{4}{3}\pi k\varrho$ wachsen. Ferner folgt sofort aus der Formel 12, daß das Attraktionspotential außerhalb des anziehenden Körpers der sogenannten Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

genügt. Ebenso folgt aus der Gleichung 15, daß dieses Potential

innerhalb des anziehenden Körpers der sogenannten Poissonschen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} = -4 \pi k \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

genügt. Eine Funktion aber, welche in einem Teile des Raumes einer und in einem anderen Teile des Raumes einer anderen Differentialgleichung genügt, kann nicht im ganzen Raume durch eine und dieselbe analytische Funktion ausgedrückt werden. Das Attraktionspotential hat zwei Ausdrücke: einen für den Raum außerhalb des anziehenden Körpers, einen zweiten für den Raum innerhalb des anziehenden Körpers. An der Grenzfläche des Körpers sind die numerischen Werte beider Potentiale, ferner die numerischen Werte ihrer ersten partiellen Differentialquotienten überall einander gleich, aber die Werte der zweiten und der höheren Differentialquotienten sind voneinander verschieden. Nehmen wir z. B. das Attraktionspotential einer homogenen Kugel vom Radius R und von der Masse M. Innerhalb der Kugel wird dasselbe durch die Formel

$$V_i = \frac{k M}{2 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18$$

außerhalb durch die Formel

$$V_e = \frac{k M}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

ausgedrückt. Wie gewöhnlich bedeutet r die Distanz vom Zentrum der Kugel und k die Attraktionskonstante.

Aus der soeben gefundenen Eigenschaft des Attraktionspotentials fließt eine wichtige Konsequenz für das Schwerkraftpotential. Dieses unterscheidet sich von jenem nur durch das additive Potential der Zentrifugalkraft; folglich hat es auch zwei Ausdrücke: einen außerhalb des anziehenden Körpers, einen zweiten innerhalb des anziehenden Körpers.

§ 6. Flächen, aus denen das Geoid zusammengesetzt ist.

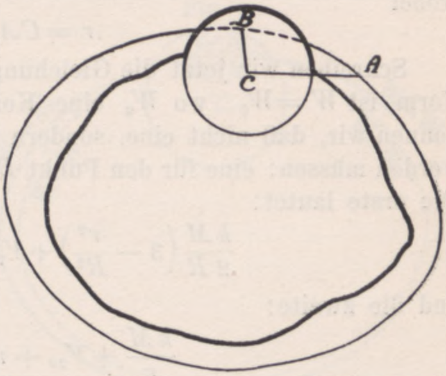
Betrachten wir ein einfaches Beispiel*). Nehmen wir statt der Erde einen fiktiven Körper an, der mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert und denken wir uns, daß dieser Körper von Wasser bedeckt ist, das sich im Zustande einer vollkommenen (relativen) Ruhe befindet, so daß die physische

---

*) Dieses Beispiel ist der Abhandlung Poincarés: Les mesures de la gravité et la géodésie (Bulletin astron. Bd. XVIII [1901] S. 7 ff.) entlehnt.

Oberfläche des Meeres mit dem Geoid zusammenfällt (Fig. 3). Wir nehmen ferner an, daß nur ein Kontinent existiert. Um die weiteren Rechnungen zu erleichtern, nehmen wir an, daß eine große Kugel in unseren Körper wie eingewachsen ist. Ein Teil dieser Kugel ragt aus dem Meere heraus und stellt einen Kontinent vor. R sei der Radius der Kugel und C ihr Zentrum, das vom Schwerpunkte des ganzen Körpers verschieden ist.

Fig. 3.



Die dicke Linie bedeutet die Oberfläche des festen Körpers, die dünne des Wassers.

Das Potential der Schwerkraft W besteht aus dem Potential der Zentrifugalkraft v und aus dem Potential der Attraktion V. Dieses letztere setzt sich wieder aus zwei Teilen zusammen: aus dem Attraktionspotential der Kugel V_1 und aus dem Attraktionspotential des übrigen Körpers (mit Einschluß des Wassers) V_2. Folglich haben wir

$$W = V_1 + V_2 + v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 20$$

Die Funktion v hat nur einen Ausdruck im ganzen Raume, während V_1 und V_2 je zwei Ausdrücke besitzen. — Das Geoid umschließt vollkommen alle Massen, welche zum Potential V_2 beisteuern, denn auf dem Meere ist das Geoid mit der physischen Oberfläche identisch und innerhalb des Kontinents verläuft das Geoid so, wie es die punktierte Linie in der Zeichnung angibt, d. h. außerhalb der Massen, deren Potential durch V_2 bezeichnet wurde. Folglich kann das Potential V_2 im ganzen Geoid, sowohl in solchen Punkten wie A, die in der Meeresoberfläche liegen, als in solchen Punkten wie B, die sich im Inneren des Kontinentes befinden, durch eine und dieselbe Funktion, nämlich durch den für den äußeren Raum gültigen Ausdruck, sagen wir V_{2e}, dargestellt werden. Dabei ist für die Kugel ein Punkt der Meeresoberfläche, etwa A, ein äußerer Punkt, und ein Punkt des Geoids innerhalb des Kontinentes, etwa B, ein innerer Punkt. Auf Grund der Gleichung 18 haben wir in B:

$$V_1 = V_{1i} = \frac{kM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad . \; . \; . \; . \; . \; 21$$

wobei

$$r = CB.$$

Gleichzeitig haben wir in A auf Grund der Gleichung 19:

$$V_1 = V_{1e} = \frac{kM}{r}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 22$$

wobei

$$r = CA.$$

Schreiben wir jetzt die Gleichung des Geoids. Ihre allgemeine Form ist $W = W_0$, wo W_0 eine Konstante bedeutet. Sofort erkennen wir, daß nicht eine, sondern zwei Gleichungen geschrieben werden müssen: eine für den Punkt B, eine zweite für den Punkt A. Die erste lautet:

$$\frac{kM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) + V_{2e} + v = W_0, \quad \ldots \ldots \quad 23$$

und die zweite:

$$\frac{kM}{r} + V_{2e} + v = W_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 24$$

Die erste stellt das Geoid innerhalb des Kontinents, die zweite das Geoid auf dem Meere dar. Setzen wir noch der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{kM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) + V_{2e} + v &= W_c \\ \frac{kM}{r} + V_{2e} + v &= W_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 25$$

Wir können nun leicht verifizieren, daß auf der Grenze des Meeres und des Kontinentes

$$W_m = W_c, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 26$$

ferner

$$\frac{dW_m}{dx} = \frac{dW_c}{dx}, \quad \frac{dW_m}{dy} = \frac{dW_c}{dy}, \quad \frac{dW_m}{dz} = \frac{dW_c}{dz}, \quad \ldots \quad 27$$

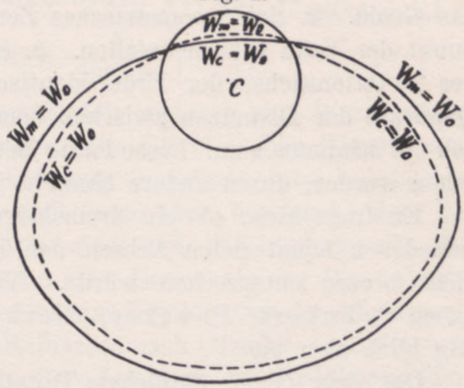
daß aber die zweiten Differentialquotienten verschieden sind.

Somit besteht das Geoid aus einem Stück der Fläche $W_m = W_0$ und aus einem Stück der Fläche $W_c = W_0$. Aus den Gleichungen 26 und 27 folgt, daß an der Küste die Flächen einander berühren, ohne sich zu schneiden. Es ist interessant, zu erfahren, ob die Fläche $W_m = W_0$ über der Fläche $W_c = W_0$ verläuft oder umgekehrt. Um darüber zu entscheiden, bilden wir die Differenz $W_m - W_c$; es ergibt sich:

$$W_m - W_c = kM\left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right] = \frac{kM}{2R^3 r}(R-r)^2(2R+r), \quad 28$$

woraus zu ersehen ist, daß die Funktion W_m überall größere Werte als die Funktion W_c besitzt. Da nun das Potential eine von unten nach oben abnehmende Funktion ist, so muß W_c den Wert W_0 in einer niedrigeren Lage erreichen als W_m. Mit anderen Worten: die Fläche $W_m = W_0$ verläuft überall über der Fläche $W_c = W_0$, und an der Küste, wo sich die beiden Flächen berühren, berührt die erste Fläche die zweite von oben (Fig. 4).

Fig. 4.



Wir erinnern noch einmal daran, daß das Geoid auf dem Meere mit der Fläche $W_m = W_0$, unter dem Lande mit der Fläche $W_c = W_0$ zusammenfällt. Unter dem Land hat die Fläche $W_m = W_0$, auf dem Meere die Fläche $W_c = W_0$ keine physische Bedeutung.

Alles, was soeben von unserem fiktiven Körper und von seinem Geoid gesagt wurde, kann mutatis mutandis auf die Erde und auf das irdische Geoid angewandt werden. Nur sind bei der Erde die Verhältnisse komplizierter. Das irdische Geoid besteht nicht aus zwei Stücken von zwei verschiedenen Flächen, sondern aus zahlreichen größeren und kleineren Stücken verschiedener analytischer Flächen, die längs der Küsten zusammengefügt sind. Auch hier verläuft die maritime Fläche $W_m = W_0$ oberhalb aller kontinentalen und insularen Flächen $W_{c_1} = W_0$, $W_{c_2} = W_0$ usw. und berührt sie längs der Küsten von oben. Auf den Ozeanen fällt das Geoid mit der Fläche $W_m = W_0$ zusammen, unter den Kontinenten und Inseln mit kontinentalen und insularen Flächen $W_{c_1} = W_0$, $W_{c_2} = W_0$, $W_{c_3} = W_0$ usw. Was nicht zum Geoid gehört, hat keine physische Bedeutung.

Wir fügen noch hinzu, daß die Distanzen zwischen der Fläche $W_m = W_0$ und den Flächen $W_{c_1} = W_0$, $W_{c_2} = W_0$ usw. wahrscheinlich nirgends über einige Meter hinausgehen.

§ 7. Das Erdellipsoid und seine Dimensionen.

Es scheint auf den ersten Blick nicht leicht, charakteristische Dimensionen einer so komplizierten Fläche wie das Geoid anzugeben. Glücklicherweise ist das Geoid einem Rotationsellipsoid

ähnlich. Man nützt diese Ähnlichkeit in solcher Weise aus, daß man die Dimensionen des dem Geoid „ähnlichsten" Rotationsellipsoids angibt. Aber das Wort „ähnlichst" ist etwas unbestimmt; wir müssen eine genauere Definition geben.

Helmert definiert das „ähnlichste" Rotationsellipsoid folgendermaßen: 1. Das Rotationsellipsoid soll dasselbe Volumen haben wie das Geoid. 2. Sein geometrisches Zentrum soll mit dem Schwerpunkt der Erde zusammenfallen. 3. Seine kleinere Achse soll mit der Rotationsachse der Erde identisch sein. 4. Die Summe der Quadrate der Distanzen zwischen dem Geoid und dem Erdellipsoid soll ein Minimum sein. Diese letzte Bedingung kann, wie wir weiter sehen werden, durch andere ähnliche Bedingungen ersetzt werden.

Es fragt sich, ob ein dreiachsiges Ellipsoid mit wenig verschiedenen äquatorialen Achsen den Forderungen der Ähnlichkeit nicht besser entsprechen würde. Versuche in dieser Richtung haben Schubert, Paucker, Clarke, Fergola getan, der Erfolg blieb aber aus.

Das dem Geoid ähnlichste Rotationsellipsoid wird nach dem Vorschlage Helmerts „Erdellipsoid" genannt. Es scheint, daß die Kenntnis des Geoids der Kenntnis des „Erdellipsoids" vorangehen soll; in der Wirklichkeit aber findet das Umgekehrte statt: die Methoden der Erdmessung sind so gestaltet, daß die Dimensionen des Erdellipsoids sich zuerst ergeben. Je nach der Berechnungsmethode paßt ein aus bestimmten Messungen berechnetes Erdellipsoid mehr oder minder in die Helmertsche Definition, aber die Frage, ob es mehr oder minder paßt, ist nicht besonders wichtig, denn alle üblichen Definitionen und Methoden weichen wenig voneinander ab. Die Unterschiede zwischen den Dimensionen der von den verschiedenen Autoren vorgeschlagenen Erdellipsoide beruhen hauptsächlich darauf, daß das als Grundlage der Rechnung benutzte faktische Material in den einzelnen Fällen verschieden war. Es sei zuletzt bemerkt, daß die in der geläufigen Redeweise sogenannten „Erddimensionen" nichts anderes als die Dimensionen des Erdellipsoids sind. Einem vielverbreiteten Gebrauch folgend werden wir die größere und kleinere Halbachse des Erdellipsoids mit a bezw. mit b, die Abplattung mit e und die Exzentrizität mit ε bezeichnen. Es ist:

$$e = \frac{a - b}{a}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e\,(2 - e).$$

Nach Bessel (1841) ist:

$$a = 6\,377\,397{,}15 \text{ m}, \quad b = 6\,356\,078{,}96 \text{ m}, \quad e = \frac{1}{299{,}15}.$$

Auf Grund der anglo-französischen, russisch-skandinavischen, indischen und einigen kleinen Gradmessungen hat Clarke 1880

$$a = 6\,378\,253 \pm 75 \text{ m*)}, \quad b = 6\,356\,521 \pm 111 \text{ m}, \quad e = \frac{1}{293{,}5 \pm 1{,}1}$$

$$\left(\text{eigentlich } \frac{1}{293{,}466}\right)$$

gefunden. — Die Besselschen Erddimensionen sind in zahlreiche astronomische Tafeln eingegangen. Die Clarkeschen Dimensionen wurden bald nach ihrer Publizierung in verschiedene Lehrbücher usw. aufgenommen. Heute weiß man aber bestimmt, daß die Besselschen a und b zu klein sind und daß andererseits die Abplattung nach Clarke zu groß ist. Besser als das Besselsche oder das Clarkesche System wäre eine Kombination der Abplattung nach Bessel mit der großen Halbachse nach Clarke. — Indem wir verschiedene weniger wichtige Berechnungen der Erddimensionen beiseite lassen, wollen wir noch die Abplattung nach Harkneß und die Dimensionen Helmerts anführen. Harkneß**) hat seinen Abplattungswert nicht bloß aus geodätischen, sondern auch aus verschiedenen astronomischen Daten berechnet. Er fand:

$$e = \frac{1}{300{,}205 \pm 2{,}964}.$$

Seit 1901 nimmt Helmert als Abplattung an: $e = 1 : 298{,}3$, die er aus Schweremessungen berechnet hat. Dieser Abplattung entspricht ein Wert von ε^2, welcher beinahe genau $1 : 149{,}4$ beträgt. Ferner hat Helmert 1906***) aus dem russisch-skandinavischen und dem westeuropäisch-afrikanischen Meridianbogen, sowie aus den Längengradmessungen in 52^0 und $47^1/_2{}^0$ nördl. Breite unter Annahme der Besselschen Abplattung für a den Wert 6 378 150 m berechnet. Dieser Wert würde sich bei der Annahme $e = 1 : 298{,}3$ nur um rund 10 m verkleinern. Doch bald nach der Publikation des letztgenannten Wertes für a hat Helmert auf eine Anfrage seitens des ägyptischen Vermessungsbureaus mit Rücksicht auf die neuesten

---

*) Eigentlich $a = 20926201$, $b = 20854895$ engl. Fuß.

**) Harkneß, The Solar Parallax and its related Constants. Washington Observations for 1885. Appendix III, S. 138.

***) Helmert, Die Größe der Erde. Sitzungsber. der Königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin 1906. S. 525—537.

rechnerischen Ergebnisse in den Vereinigten Staaten von Amerika ein Rotationsellipsoid mit

$$a = 6\,378\,200 \text{ m}, \; e = 1 : 298{,}3$$

empfohlen.

Die letzten Zahlen geben zugleich Aufschluß über die Präzision, mit welcher die Dimensionen des Erdellipsoids heutzutage bekannt sind. Einen noch zuverlässigeren Wert von a wird man erst nach mehreren Jahren haben können, wenn zahlreiche zum Teil unlängst beendete, zum Teil noch im Gang befindliche geodätische Messungen endgültig berechnet sein werden. So wurde die Messung des Meridianbogens durch Russen und Schweden auf Spitzbergen 1902 und die Messung des Meridianbogens in Peru und Ecuador durch französische Offiziere 1906 beendet, die Messung des großen Bogens in Südafrika ist noch im Gange; ebenfalls noch nicht geschlossen sind gewisse Messungen in Nordamerika, in Ostasien usw.

Als ungünstigen Umstand muß man betonen, daß die weit überwiegende Mehrheit der geodätischen und der Schweremessungen auf der nördlichen Hemisphäre ausgeführt wurden. Infolgedessen urteilen wir aus den Dimensionen und Gestalt einer Halbkugel über die Dimensionen und die Gestalt beider. Minder wichtig, aber ebenfalls ungünstig ist die Beschränkung der geodätischen Messungen auf das Land. Sie ist in bezug auf geodätische Messungen ein „malum necessarium“; man kann weder eine Triangulation noch eine Basismessung auf dem Meere ausführen.

Wir müssen jetzt zwei Fragen nähertreten: erstens auf welche Weise die Gestalt und die Dimensionen des Erdellipsoids resp. des Geoids erkannt werden können; zweitens welche Beziehung zwischen diesen beiden Flächen besteht.

§ 8. Bestimmung der Gestalt der Erde aus Schweremessungen.

Die Gestalt und die Dimensionen des Erdellipsoids, resp. des Geoids können einerseits aus geodätischen, andererseits aus Schweremessungen bestimmt werden. — Man kann nicht sagen, daß die Schweremessungen allein dazu hinreichen; gewisse andere Messungen müssen zu Hilfe genommen werden. So ist z. B. bei der Reduktion der Schwerkraft auf das Meeresniveau die Kenntnis der Höhe der Station über dem genannten Niveau erforderlich. Diese Kenntnis, falls sie genau sein soll, setzt ein Nivellement voraus. Ferner braucht man die geographischen Koordinaten der Station, d. h. ihre

Breite und Länge. Die Koordinaten einer Station können entweder direkt durch astronomische Beobachtungen oder indirekt aus den bekannten Koordinaten einer anderen Station durch eine Triangulation ermittelt werden. Immerhin muß man gewisse astronomische bezw. geodätische Messungen ausführen, um zur Kenntnis geographischer Koordinaten zu gelangen. Weiter braucht man bei der Berechnung gewisser Korrektionen Angaben über die Dichte und Lagerung der Gesteine, was eine geologische Untersuchung der Gegend voraussetzt. — Sobald aber diese Hilfsdaten zu Gebote stehen, wird die Bestimmung der Gestalt und Größe der Erde aus Schweremessungen möglich; denn die Gestalt und die Dimensionen des Geoids sind durch die Schwereverteilung in seiner Oberfläche gegeben. Das folgt unmittelbar aus dem Satze von Stokes. Dieser Satz scheint auf den ersten Blick ein Paradoxon zu enthalten. Mit Recht könnte man fragen: wie ist es möglich, die Länge der größeren Halbachse des Erdellipsoids ohne eine mit linearen Maßen auf der Erdoberfläche ausgeführte Längenmessung zu bestimmen? Darauf ist zu antworten, daß die Ausmessung einer Länge mit einem linearen Maße auch bei den Schweremessungen vorkommt. Nur wird nicht ein Bogen auf der Erdoberfläche, sondern die Länge des Sekundenpendels gemessen.

Vor dem Stokesschen Satze müssen wir zuerst den Satz von Gauß kennen lernen.

§ 9. **Gauß' Lehrsatz.**

Wir wissen schon, daß das Attraktionspotential V innerhalb des anziehenden Körpers der Differentialgleichung von Poisson (Gleichung 17)

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi k\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29$$

genügt. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit dem Volumenelement $d\omega = dx\,dy\,dz$ und integriert über den ganzen vom anziehenden Körper eingenommenen Raum, so folgt:

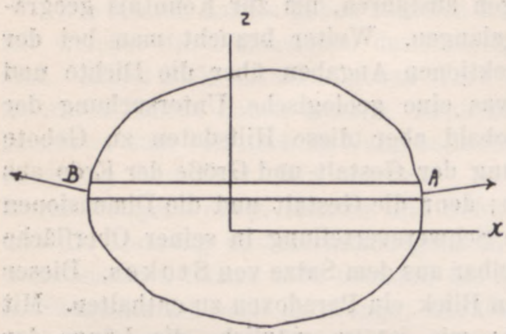
$$S\left[\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right]dx\,dy\,dz=-4\pi kM, \quad . \quad . \quad 30$$

wo M die Masse des ganzen anziehenden Körpers bedeutet. Durch teilweise Integration können wir das erste Glied links auf die Gestalt:

$$S\frac{d^2V}{dx^2}dx\,dy\,dz=\left[\iint\frac{dV}{dx}dy\,dz\right]_{\text{I}}-\left[\iint\frac{dV}{dx}dy\,dz\right]_{\text{II}} \quad . \quad 31$$

bringen. Das erste Integral rechts bezieht sich auf Oberflächenelemente von der Art A, welche der oberen Integrationsgrenze nach x entsprechen (Fig. 5), und das zweite Integral bezieht sich auf Oberflächenelemente von der Art B, welche der unteren Integrationsgrenze nach x entsprechen. Aber in der Oberfläche des Körpers ist

Fig. 5.



$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dn} \cdot \cos\alpha,$$

wo dn das Element der äußeren Normale zur Oberfläche und $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ den Richtungskosinus der Normale bezeichnet. Gleichzeitig hat man:

$$dy\,dz = \cos\alpha\,d\sigma, \text{ wenn } \cos\alpha > 0$$

$$\text{und } dy\,dz = -\cos\alpha\,d\sigma, \text{ wenn } \cos\alpha < 0,$$

wobei $d\sigma$ das Oberflächenelement bezeichnet. Infolgedessen hat man in A, wo $\cos\alpha > 0$:

$$\frac{dV}{dx}\,dy\,dz = \frac{dV}{dn}\cos^2\alpha \cdot d\sigma$$

und in B, wo $\cos\alpha < 0$:

$$\frac{dV}{dx}\,dy\,dz = -\frac{dV}{dn}\cos^2\alpha \cdot d\sigma.$$

Nach Substitution dieser Werte in die Formel 31 und unter Berücksichtigung der richtigen Vorzeichen bekommt man:

$$S\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz = \int\frac{dV}{dn}\cos^2\alpha \cdot d\sigma,$$

wobei die Integration rechts des Gleichheitszeichens auf die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnt werden soll. Es ist klar, daß dasselbe Verfahren, auf das zweite und dritte linksseitige Glied der Gleichung 30 angewandt, zu den Formeln:

$$S\frac{d^2V}{dy^2}\,dx\,dy\,dz = \int\frac{dV}{dn}\cos^2\beta \cdot d\sigma,$$

$$S\frac{d^2V}{dz^2}\,dx\,dy\,dz = \int\frac{dV}{dn}\cos^2\gamma \cdot d\sigma$$

führt. Durch Addition sämtlicher drei Formeln bekommt man:

$$S\left[\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right]dx\,dy\,dz=\int\frac{dV}{dn}d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad 32$$

was, in 31 eingesetzt, sofort die Formel:

$$\int\frac{dV}{dn}d\sigma=-4\pi kM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33$$

ergibt, welche den Gaußschen Lehrsatz darstellt. Man darf nicht vergessen, daß die Integration sich auf die ganze Oberfläche des Körpers bezieht und daß der Differentialquotient $\frac{dV}{dn}$ in der Richtung der äußern Normale genommen werden muß.

§ 10. Stokes' Lehrsatz.

Wir werden den Beweis dieses Satzes nach dem Vorbild Poincarés durchführen. Wir denken uns einen Körper, dessen physische Oberfläche gleichzeitig eine Äquipotentialfläche (Niveaufläche) ist. Man kann sonst den Lehrsatz auf einen Körper anwenden, dessen physische Oberfläche mit keiner Äquipotentialfläche zusammenfällt; dann aber muß man als äußere Grenze des Körpers nicht seine physische Oberfläche, sondern irgendeine den ganzen Körper umgebende Äquipotentialfläche ansehen.

Wir setzen also voraus, daß die Oberfläche des Körpers gleichzeitig Äquipotentialfläche ist und behaupten, daß die Schwerkraft in der Oberfläche des Körpers und im ganzen äußeren Raume durch die Gestalt der Oberfläche eindeutig bestimmt ist, ganz unabhängig von der Massenverteilung innerhalb des Körpers. Mit anderen Worten: wir behaupten, daß einer gegebenen Äquipotentialfläche nur eine Schwerkraftverteilung in dieser Fläche selbst und im ganzen Außenraume entspricht.

Um das zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Massenverteilung innerhalb des Körpers variieren kann, ohne daß die Schwerkraft eine Änderung erfahre, wenn die Oberfläche des Körpers sich nicht ändert und eine Äquipotentialfläche bleibt. — Wir nehmen zwei Massenverteilungen an: die Massenverteilung Nr. 1 mit dem (äußeren) Attraktionspotential V_1 und die Massenverteilung Nr. 2 mit dem (äußeren) Attraktionspotential V_2. Das Potential der Zentrifugalkraft v bleibt dasselbe, denn wir setzen voraus, daß

die Winkelgeschwindigkeit und die Achse der Rotation keine Änderung erfahren. Im ersten Falle haben wir folglich:

und im zweiten:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= V_1 + v \\ W_2 &= V_2 + v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34$$

Setzen wir noch:

$$U = W_1 - W_2 = V_1 - V_2 \quad \ldots\ldots \quad 35$$

Indem die Oberfläche des Körpers laut Voraussetzung ebenso bei der zweiten wie bei der ersten Massenverteilung eine Äquipotentialfläche bleibt, hat man in der Oberfläche im ersten Falle:

$$W_1 = A_1 \text{ und im zweiten: } W_2 = A_2,$$

wobei A_1 und A_2 Konstanten sind. Infolgedessen hat man in der Oberfläche:

$$U = A_1 - A_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36$$

Nach Gleichung 35 ist U auch ein Attraktionspotential. Dem Sinne nach ist es ein äußeres Attraktionspotential und es muß der L a p l a c e schen Gleichung

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 37$$

im ganzen Außenraume genügen.

Nach Feststellung der Eigenschaften der Funktion U betrachten wir das Integral:

$$J = S\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz, \quad . . \quad 38$$

in welchem die Integration auf den ganzen Raum zwischen der Oberfläche des Körpers und einer Kugelfläche mit dem Zentrum im Koordinatenanfang und einem sehr großen Radius ausgedehnt werden soll. Dabei bemerken wir, daß es bequem ist, den Koordinatenanfang innerhalb des anziehenden Körpers, am besten in den Schwerpunkt, zu versetzen. Ebenso wie im vorigen Paragraphen bei der Gleichung 30 wenden wir die teilweise Integration an. Aber wir müssen darauf achten, daß, während im vorigen Paragraphen der Integrationsraum von e i n e r geschlossenen Fläche begrenzt war, hier die Grenze aus zwei separaten geschlossenen Flächen: einer inneren und einer äußeren, besteht. Infolgedessen erhalten wir statt eines Oberflächenintegrals zwei solche Integrale, d. h. wir bekommen:

$$J = \int U \cdot \frac{dU}{dn}\, d\sigma_e - \int U \cdot \frac{dU}{dn}\, d\sigma_i, \quad \ldots\ldots \quad 39$$

wo $d\sigma_e$ das Oberflächenelement der äußeren Kugel mit dem sehr großen Radius und $d\sigma_i$ das Oberflächenelement der inneren Grenzfläche des Integrationsraumes bezeichnet. Die Integration bezieht sich in jedem der Integrale auf die ganze betreffende Fläche. Aber die Außenfläche ist eine Kugel, folglich kann man im ersten Integral rechter Seite der Gleichung 39:

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dU}{dr}, \quad d\sigma_e = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\psi$$

setzen und das Integral selbst in der Form:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U \frac{dU}{dr} r^2 \cdot \sin\vartheta d\vartheta d\psi$$

schreiben. Aber in einer großen Entfernung vom anziehenden Körper nähert sich das Attraktionspotential der Grenze: $\frac{kM}{r}$, wo M die Masse des Körpers, k die Gravitationskonstante bedeutet; ferner nähert sich der Differentialquotient des Potentials nach r der Grenze $-\frac{kM}{r^2}$. Der ersten Grenze streben V_1 wie V_2, der zweiten $\frac{dV_1}{dr}$ und $\frac{dV_2}{dr}$ zu. Wir können somit behaupten, daß $U = V_1 - V_2$ in einer großen Entfernung vom anziehenden Körper ohne Zweifel viel kleiner ist als $\frac{kM}{r}$ und $\frac{dU}{dr} = \frac{dV_1}{dr} - \frac{dV_2}{dr}$ viel kleiner (wir sprechen vom absoluten Wert) als $\frac{kM}{r^2}$; weiter können wir behaupten, daß das erste Integral rechter Seite in der Gleichung 39 viel kleiner ist als

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{k^2M^2}{r} \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\psi = \frac{4\pi k^2 M^2}{r}.$$

Dieser letzte Wert nähert sich offenbar der Null, wenn r unbegrenzt wächst, indem k und M endliche Konstanten sind. Wenn wir also voraussetzen, daß der Radius der äußeren Kugelfläche ins Unendliche wächst, verschwindet das erste Integral und die Gleichung 39 reduziert sich auf:

$$J = -\int U \cdot \frac{dU}{dn} \cdot d\sigma_i. \qquad \text{40}$$

Die Integration im Integrale rechts erstreckt sich über die ganze Äquipotentialfläche, welche die äußere Begrenzung des Körpers bildet. — Man hat aber in dieser Fläche laut der Gleichung 36:

$$U = V_1 - V_2 = A_1 - A_2, \qquad \frac{dU}{dn} = \frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_2}{dn}$$

und die Gleichung 40 verwandelt sich in:

$$J = -(A_1 - A_2)\int\left(\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV_2}{dn}\right) d\sigma_i.$$

Wir können jetzt den Gaußschen Lehrsatz anwenden. Er wurde zwar für das innere Attraktionspotential bewiesen, da aber die ersten Differentialquotienten überall auch in der Grenzfläche kontinuierlich sind, so kann man unter $\frac{dV_2}{dn}$ und $\frac{dV_2}{dn}$ ebensogut Differentialquotienten des inneren wie des äußeren Attraktionspotentials verstehen und den Gaußschen Lehrsatz anwenden. Wir schreiben somit:

$$\int\frac{dV_1}{dn} d\sigma_i = -4\pi k M, \quad \int\frac{dV_2}{dn} d\sigma_i = -4\pi k M \quad . \quad . \quad 41$$

Nach Substitution dieser Werte bekommt man: $J = 0$, oder wenn man sich der Gleichung 38 erinnert:

$$S\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 42$$

Diese letzte Gleichung ist aber dann und nur dann möglich, wenn im ganzen Integrationsraume gleichzeitig:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dz} = 0.$$

Diese letzten Gleichungen sind gleichbedeutend mit den drei Gleichungen:

$$\frac{dW_1}{dx} = \frac{dW_2}{dx}, \quad \frac{dW_1}{dy} = \frac{dW_2}{dy}, \quad \frac{dW_1}{dz} = \frac{dW_2}{dz}$$

oder mit den drei Gleichungen:

$$\frac{dV_1}{dx} = \frac{dV_2}{dx}, \quad \frac{dV_1}{dy} = \frac{dV_2}{dy}, \quad \frac{dV_1}{dz} = \frac{dV_2}{dz},$$

welche nichts anderes ausdrücken, als daß die drei Komponenten der Schwerkraft und die drei Komponenten der Anziehung im ganzen äußeren Raume dieselben geblieben sind, obwohl die Massenverteilung im Innern des Körpers verändert wurde. Die Bedin-

gungen, unter denen das geschehen konnte, waren: 1. Die gesamte Masse des Körpers ist unverändert geblieben; 2. die Winkelgeschwindigkeit und die Achse der Rotation sind dieselben geblieben; 3. die Oberfläche des Körpers hat sich nicht geändert und ist eine Äquipotentialfläche geblieben.

Was bedeutet das soeben erhaltene Resultat? Es bedeutet, daß die Attraktion und die Schwerkraft im ganzen Außenraume nur von der Gestalt des anziehenden Körpers abhängen, soweit seine Oberfläche eine Äquipotentialfläche ist. Mit anderen Worten, es existieren unendlich viele Massenverteilungen, welche einer und derselben Schwerkraft- und Attraktionskraftverteilung entsprechen. Man kann leicht solche vikarierende Massenverteilungen mit Hilfe der bekannten Sätze über die Äquivalenz der Attraktionen konzentrischer homogener Kugelschalen von gleicher Masse bilden (ohne Rücksicht auf Dicke, Dichte und Radius), ferner über die Äquivalenz der Attraktionen konfokaler homogener Ellipsoide von gleicher Masse usw. usw.

Wir haben gesehen, daß einer gegebenen Gestalt des Körpers nur eine Schwerkraftverteilung im ganzen äußeren Raume entspricht, sobald diese Figur eine Äquipotentialfläche ist. Speziell also ist die Verteilung der Schwerkraft in der Oberfläche sofort gegeben, sobald die Oberfläche eine gegebene Äquipotentialfläche ist. Es fragt sich nun, ob umgekehrt einer gegebenen oberflächlichen Schwerkraftverteilung (wir denken uns die Schwerkraft als Funktion der geographischen Breite und Länge gegeben) nur eine einzige Gleichgewichts-(Äquipotential)fläche entspricht. Auf diese Frage können wir keine allgemeine Antwort geben, nur so viel können wir sagen, daß, insoweit es sich um die Anwendung auf die Erde handelt, dieselbe ohne Belang ist, da wir ohnehin schon wissen, daß das Geoid einem Rotationsellipsoid sehr ähnlich ist. — Wir können nämlich in erster Annäherung annehmen, daß das Geoid ein Rotationsellipsoid ist und nachher durch konsekutive Annäherungen die Abweichungen des Geoids vom Rotationsellipsoid bestimmen.

§ 11. **Anwendung des Stokesschen Satzes auf das Geoid.**

Es ist klar, daß der Stokessche Lehrsatz auf die physische Oberfläche der Erde nicht angewendet werden kann. Die mittlere Meeresoberfläche ist zwar, wie wir im § 1 dargetan haben, bei-

nahe identisch mit einer Äquipotentialfläche, aber die Landoberfläche weicht zu sehr von einer Äquipotentialfläche ab. — Eine Idee von Laplace wieder aufnehmend, hat vor einigen Jahren M. Brillouin vorgeschlagen, statt des Meeresniveaus eine 10000 m höher verlaufende Äquipotentialfläche zur Referenzfläche zu wählen. Daß das Stokessche Theorem auf diese Äquipotentialfläche anwendbar wäre, ist ohne weiteres klar; ferner hat diese Niveaufläche gewisse weitere Vorteile: sie schneidet keine Flächen diskontinuierlicher Dichte, hat also eine stetige Krümmung; sie ist einheitlich und nicht, wie das Geoid, aus Stücken verschiedener Flächen zusammengeschweißt; außerdem muß sie eine etwas regelmäßigere Gestalt haben als das Meeresniveau. Diesen Vorteilen stehen aber große Nachteile gegenüber. — Da die Schwerkraft in 10000 m Höhe nicht direkt gemessen werden kann, müßte man dieselbe aus den Beobachtungen an der Erdoberfläche extrapolieren, d. h. von einem gegebenen Niveau auf ein ca. 9 oder 10 km höher gelegenes reduzieren. Die dabei anzubringenden Reduktionsbeträge sind sehr groß und es haftet ihnen regelmäßig eine Unsicherheit von einigen Einheiten der fünften, ja zuweilen der vierten Dezimalstelle*) an. Prinzipiell ohne Bedeutung, aber aus praktischen Rücksichten sehr empfindlich wäre das Verschwinden des Unterschiedes zwischen „Höhen“ und „Tiefen“, da alle hypsometrischen Daten sich in „Tiefen“ verwandelt hätten. Es wäre z. B. ziemlich schwer, eine zum Flachland gehörige „Tiefe“ von einer zur Flachsee gehörigen „Tiefe“ zu unterscheiden.

Infolgedessen ist es bequemer, das Meeresniveau als Referenzfläche beizubehalten. Um aber die Anwendung des Stokesschen Lehrsatzes auf dieses Niveau zu ermöglichen, müssen wir zu einem Kunstgriff Zuflucht nehmen und statt der Erde einen Idealkörper, „das Geoid“, betrachten, das wir uns jetzt nicht bloß als eine geometrische Fläche, sondern als einen mit Masse ausgestatteten Körper vorstellen. Wir denken uns nämlich alle äußeren Massen, d. h. alle Massen, die sich zwischen der Oberfläche des Geoids (d. h. dem Meeresniveau) und der physischen Landoberfläche befinden, abgetragen, gleichzeitig denken wir uns andere Massen im Innern bezw. auf der Oberfläche des Geoids so verteilt, daß das

---

*) Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Schwerkraft in Metern per Sekunde^2 mit fünf Dezimalen angegeben wird, wie es die Präzision der modernen Pendelmessungen erlaubt.

Attraktionspotential derselben in einem jeden Punkte der Oberfläche des Geoids genau denselben Wert hat wie das Attraktionspotential der abgetragenen äußeren Massen. Es ist klar, daß bei einer solchen Substitution von inneren resp. oberflächlichen Massen für äußere die Oberfläche des Geoids eine Niveaufläche bleibt. In Punkten, die zur Oberfläche des Geoids nicht gehören, wird das Attraktionspotential und dementsprechend das Schwerkraftpotential verändert. Die Schwerkraft wird ebenfalls verändert, selbst in der Oberfläche des Geoids, auch die Masse des Geoids wird von der Masse der Erde um eine Kleinigkeit verschieden sein. All dies sind Nebensachen, die gar nicht störend wirken, indes wird auf diese Weise das wichtige Resultat erreicht, daß das Geoid, ohne sich zu ändern, ohne seine Eigenschaften als Niveaufläche zu verlieren, doch gleichzeitig zu einer Außenfläche wird und den Forderungen des Stokesschen Lehrsatzes genügt.

Die Substitution von inneren Massen für äußere ist immer ausführbar. Die komplizierte Natur (vergl. § 6) des Geoids bildet kein Hindernis dazu. Neuere Untersuchungen von Korn, Liapunow, Steklow und Zaremba über die Methode des arithmetischen Mittels von Neumann und Robin haben gezeigt, daß es immer möglich ist, eine anziehende Schicht in der Oberfläche des Geoids zu bilden, deren Attraktionspotential in irgendeinem Punkte derselben Oberfläche gleich sein wird dem Attraktionspotential der abgetragenen äußeren Massen.

Dabei begegnet man einer gewissen Schwierigkeit. Um die anziehende Schicht zu bilden, sollten wir die Gestalt des Geoids bereits kennen, in der Tat aber kennen wir diese Gestalt noch nicht. Wir können aber diese Schwierigkeit durch successive Approximationen umgehen. Wir können nämlich die Ähnlichkeit des Geoids mit dem Ellipsoid ausnützen und in erster Approximation die Substitution der inneren (eigentlich die Substitution der Oberflächenschicht) für äußere Massen unter Zuhilfenahme von Formeln ausführen, die sich auf das Rotationsellipsoid beziehen. Nachdem die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid in erster Approximation berechnet worden sind, kann man zur zweiten Approximation schreiten. Man breitet die ersetzende Schicht auf dem ersten Geoide aus, berechnet die Schwerkraft in zweiter Approximation usw. . . . usw. Zu Beginn kann man sich selbst mit einer noch roheren Annäherung begnügen: man kann das Geoid einfach als eine Kugel auffassen. Für praktische Zwecke wird diese gröbere

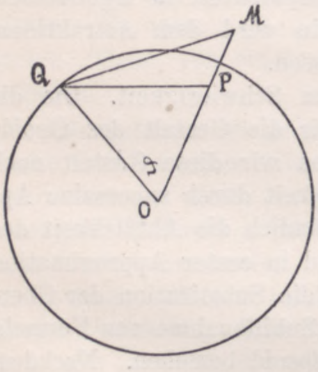
Auffassung sich als ausreichend erweisen, indem die Fehler, zu welchen sie Anlaß gibt, kleiner sind als die Fehler, welche ihren Grund in der unvermeidlichen Unsicherheit des Beobachtungsmaterials und in den Reduktionen haben.

Die Formeln und Rechnungen, die sich auf ellipsoidale oberflächliche, anziehende Schichten beziehen, sind ziemlich kompliziert, weit einfacher gestalten sich die Rechnungen, wenn das Geoid als Kugel aufgefaßt wird. Man braucht dann keine oberflächliche anziehende Schicht einzuführen; man kann sich der einfacheren „Inversionsmethode" bedienen. Diese Methode wollen wir sofort auseinandersetzen.

§ 12. Inversionsmethode. Kondensationsmethode von Helmert.

Setzen wir voraus, daß das Geoid die Gestalt einer Kugel vom Radius R besitzt. Wir behaupten, daß ein materieller Punkt von der Masse m (Fig. 6), der sich in einer Distanz r (wo $r > R$) vom Zentrum der Kugel befindet, durch einen materiellen Punkt von der Masse $m' = m \frac{R}{r}$ in der Entfernung $r' = \frac{R^2}{r}$ vom Zentrum auf demselben Radiusvektor wie m ersetzt werden kann, indem das Attraktionspotential des Punktes m' in der ganzen Oberfläche der Kugel dem Attraktionspotential des Punktes m gleich ist.

Fig. 6.



Um das zu beweisen, werden wir folgendermaßen verfahren. Es sei $OM = r$, folglich M der Punkt, wo sich das Massenelement m befindet, und $OP = r' = \frac{R^2}{r}$. Nehmen wir irgendeinen Punkt der Kugeloberfläche, z. B. Q und bezeichnen den Winkel QOM mit ϑ. — Das Potential von m in Q, das wir mit E bezeichnen wollen, ist:

$$E = \frac{m}{MQ} = \frac{m}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43$$

wobei wir die Gravitationskonstante k gleich der Einheit gesetzt haben, um die Formel 43 zu vereinfachen. Ebenso setzen wir die

Attraktionskonstante gleich Eins im Ausdruck für das Attraktionspotential von m' in Q, das wir mit J bezeichnen wollen, und schreiben dasselbe in der Gestalt:

$$J = \frac{m'}{PQ} = \frac{m'}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos\vartheta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44$$

Wenn wir hierin die oben angegebenen Werte: $m' = m \cdot \frac{R}{r}$ und $r' = \frac{R^2}{r}$ substituieren, so werden wir sofort erblicken, daß

$$J = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45$$

Indem der Punkt Q ganz willkürlich gewählt wurde, gilt unser Beweis für die ganze Oberfläche der Kugel; außerhalb der Kugeloberfläche ist die Gleichung 45 nicht mehr erfüllt.

Laut Voraussetzung ist die Kugel vom Radius R nichts anderes als das Geoid, mit anderen Worten ist dies eine Äquipotential-(Niveau)fläche und ihre Gleichung kann geschrieben werden:

$$W = V + v = W_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46$$

wo, wie gewöhnlich, W das Schwerkraftpotential, W_0 dessen konstanten Wert in der Geoidfläche, V das Attraktionspotential, v das Potential der Zentrifugalkraft bezeichnet. Dieses letztere wird von etwaigen Änderungen in der Massenverteilung nicht berührt. Fassen wir das Potential E eines außerhalb des Geoids gelegenen Punktes, sagen wir M, von der Masse m ins Auge. Laut Gleichung 45 kann dieses Potential in der Gleichung 46 durch das Potential J des Punktes P von der Masse $m' = m\frac{R}{r}$ ersetzt werden, ohne daß die Gleichung 46, folglich auch das Geoid, irgendeine Änderung erfahre.

Was hier soeben mit dem Punkte M geschehen ist, kann mit jenen Teilen des Landes, die über das Geoid hinausragen, ausgeführt werden. Man braucht nur das Land in unendlich kleine Elemente zu zerlegen und ein jedes außerhalb des Geoids gelegene Element mit Hilfe der Inversionsmethode durch ein äquivalentes innerhalb des Geoids gelegenes Element zu ersetzen. Eine praktische Anweisung zur Ausführung dieser Substitution hat der Schreiber dieser Zeilen an einer anderen Stelle gegeben*).

---

*) M. P. Rudzki, La gravité à Cracovie, à S. Francisco usw. Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie (1907), S. 937—958.

Wie schon gesagt wurde, ist die Gleichung 45 nur in der Kugeloberfläche erfüllt. Daraus folgt, daß die Substitution vermittels der Inversionsmethode das Potential nur in der Kugelfläche unverändert läßt, außerhalb derselben wird das Potential geändert. Die Schwerkraft ändert sich ebenfalls, und zwar nicht bloß außerhalb, sondern auch in der Kugeloberfläche. Das schadet aber nicht, denn es handelt sich weder um die Werte des Potentials außerhalb des Geoids, noch um die Schwerkraft, sondern einzig und allein um das Geoid. Sobald dieses unverändert bleibt, entspricht die Methode ihrem Zweck vollkommen.

Die soeben beschriebene Methode ist der „Kondensationsmethode" Helmerts*) ähnlich. Sie ist auch tatsächlich nur eine Modifikation der Kondensationsmethode, Modifikation in dem Sinne, daß die Substitution von inneren Massen für äußere, die bei Helmert eigentlich willkürlich geschieht, hier einer zweckmäßig gewählten Bedingung unterworfen wird. Helmert verschiebt nämlich alle äußeren Massen vertikal entweder bis zu einer 21 km unter dem Geoid gelegenen Fläche oder nur bis zum Geoid und denkt sich diese Massen daselbst in einer unendlich dünnen aber unendlich dichten Schicht kondensiert.

Auf diese Weise wird die Masse nicht geändert, aber das Potential im Geoid und die Gestalt des Geoids werden notwendig geändert. Die Deformation des Geoids besteht in einer Depression desselben um lokal wechselnde Beträge, die nach Helmerts Untersuchung nur ausnahmsweise über 30 m hinausgehen können.

Wir haben gesagt, daß die Inversionsmethode das Geoid nicht ändert, aber eine Massenänderung herbeiführt. Wir wollen uns über diese Massenänderung orientieren. Bei der Inversionsmethode verhält sich die innere ersetzende Masse zur äußeren ersetzten wie $\left(1 - \frac{h}{R}\right) : 1$, wo h die Höhe der gegebenen Masse über dem Meeresniveau und R, wie gewöhnlich, den mittleren Erdradius bedeutet. Dieses Verhältnis ist nur auf dem Gipfel des Mount Everest 720 : 721, sonst ist es der Einheit viel näher. Indem die mittlere Höhe der Erdoberfläche nur ca. 710 m be-

---

*) Helmert, Theorien der höheren Geodäsie. II. Bd. 3. Kap. Leipzig 1884. Außerdem in zahlreichen Abhandlungen in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie und in den Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen der internationalen Erdmessung.

trägt*), ist die mittlere Höhe äußerer Massen bloß halb so groß und es ist erlaubt, im Mittel $\frac{h}{R} = \frac{355}{6370000}$ zu setzen. Folglich sind die ersetzenden Massen nur um ungefähr $\frac{1}{18000}$ kleiner als die ersetzten. Da andererseits die außerhalb des Geoids gelegenen Massen nur ungefähr $\frac{1}{22000}$ der totalen Erdmasse ausmachen, so können wir die Änderung der Gesamtmasse der Erde auf $\frac{1}{396 \times 10^6}$ veranschlagen. Das ist eine sehr kleine Änderung. Übrigens würde auch eine größere Änderung keinen schädlichen Einfluß ausüben, denn es handelt sich nicht um die Masse der Erde, sondern um die Gestalt des Geoids.

§ 13. **Korrektionen der Schwerkraft auf dem Lande.**

Die Pendelmessungen geben uns die Schwerkraft g auf der Landoberfläche. Behufs Bestimmung der Gestalt des Geoids muß g zuerst in gehöriger Weise reduziert werden. Erstens enthält g die Komponente der Attraktion der äußeren Massen. Wir brauchen aber diejenige Schwerkraft, welche nach Abtragung äußerer und Substitution innerer Massen entsteht. Das Potential der Schwerkraft sei W, das Attraktions-(Gravitations)potential der äußeren Massen E und der substituierten inneren J. Nach ausgeführter Substitution ist das neue Schwerkraftpotential: $W - E + J$. Es sei ferner n die Richtung der Vertikale auf der Station, von unten nach oben gerechnet; die wahre Schwerkraft ist dann: $g = -\frac{dW}{dn}$, die ideale: $-\frac{dW}{dn} + \frac{dE}{dn} - \frac{dJ}{dn} = g + \frac{dE}{dn} - \frac{dJ}{dn}$. Mit anderen Worten: man muß zur gemessenen Schwerkraft g eine Korrektion, sagen wir f, wo $f = \frac{dE}{dn} - \frac{dJ}{dn}$, addieren, um die ideale, den Forderungen des Stokesschen Lehrsatzes entsprechende, Schwerkraft zu erhalten. — In dieser Ableitung haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Richtung der Vertikale über dem idealen Körper mit der Richtung der reellen Vertikale zusammenfällt. Das ist

*) Nach der letzten Berechnung (vergl. siebentes Kapitel, § 1) 800 m.

nicht streng richtig: die erste Richtung ist von der zweiten verschieden, aber die Richtungsdifferenz ist eine kleine Größe höherer Ordnung, so daß $g + f$ nur um einen absolut verschwindenden Bruchteil (es handelt sich um Brüche mit dem Zähler Eins und Nenner von mehreren hundert oder tausend Millionen) seines eigenen Wertes von der idealen Schwerkraft abweicht.

Es ist klar, daß die Korrektion f für eine jede Station getrennt berechnet werden muß. E enthält die Potentiale der über das Meeresniveau hinausragenden Teile der Kontinente und Inseln, J die Potentiale der substituierten inneren Massen. Es versteht sich, daß die nächsten Massen den größten Einfluß auf die Korrektion f haben, der Einfluß der weiter entfernten Massen ist sehr gering, ja über eine gewisse Entfernung (sicher über 30^0) ganz verschwindend. Nähere Einzelheiten über die Korrektion kann der Leser in den Abhandlungen des Verfassers im Bulletin Astronomique Bd. XXII und im Bulletin de l'Acad. de Cracovie 1907 finden.

Was hier bezüglich der Korrektion f gesagt wurde, bezieht sich auch auf die Korrektion, zu welcher die Kondensationsmethode von Helmert führt. Hier wie dort werden gewisse Massen abgetragen und durch andere ersetzt. — Im älteren Verfahren, in der sogenannten Methode von Bouguer (in England als Methode von Dr. Young bezeichnet) berücksichtigt man nur die, sonst sehr roh berechnete, Attraktion der äußeren Massen, ohne sie durch die Attraktion innerer Massen zu ersetzen, d. h. man verfährt so, als wenn $J = 0$ wäre. Infolgedessen wird das Potential nicht nur außerhalb des Geoids, sondern auch im Geoid verändert, das Meeresniveau wird nach oben und dazu ungleichmäßig verschoben usw. Es ist klar, daß dieses Verfahren den Forderungen des Stokesschen Satzes auch approximativ nicht genügt. Es ist auch älter als dieser Lehrsatz; es wurde zu einer Zeit erfunden, als die Lehre von der Attraktion und vom Potential nicht so ausgebildet war wie jetzt.

Die Korrektion ist nicht die einzige, die erforderlich ist. In der Wirklichkeit stellt $g + f$ zwar die Schwerkraft über einem Körper dar, auf den der Stokessche Lehrsatz angewandt werden kann, aber es ist die Schwerkraft in der Höhe der Station. Indes braucht man zur Berechnung des Geoids die Schwerkraft im Geoid selbst und man muß noch $g + f$ auf das Meeresniveau (Geoid) reduzieren.

Nicht besonders streng kann man diese Reduktion mit Hilfe der bekannten angenäherten Regel, daß die Schwerkraft umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Erdzentrum variiert, ausführen. Bezeichnet man mit γ die gesuchte Schwerkraft im Meeresniveau, so kann man auf Grund dieser Regel die Proportion: $\gamma : g + f = (R + h)^2 : R^2$ schreiben. Erwägt man, daß $\frac{h}{R}$ nur auf dem Gipfel des Mount Everest den Wert 1 : 720 erreicht und daß f gewöhnlich einige zehntausend-, wenigstens einige tausendmal kleiner ist als g und γ, so kann man aus der obigen Proportion die angenäherte Formel

$$\gamma = g + f + g\frac{2h}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 47$$

ableiten. Obgleich auch nicht absolut streng, aber im hohen Grade genau ist die Formel:

$$\gamma = g + f + (0{,}000\,003\,069 - 0{,}000\,000\,004 \sin^2 \beta)\, h, \quad . \quad 48$$

die Verfasser im Bulletin Astronomique Bd. XXII (1905) S. 56 abgeleitet hat. In dieser Formel bedeutet h die Höhe der Station über dem Meeresniveau, β ihre geographische Breite. Die Höhe ist ausgedrückt in denselben Einheiten wie g und f, d. h. in Metern, wenn diese letzten Größen in Metern, in Zentimetern, wenn g und f in Zentimetern ausgedrückt sind usw. Es versteht sich von selbst, daß die Zeit in Sekunden gemessen wird.

§ 14. Berechnung des Geoids aus Schweremessungen.

Denken wir uns, daß die im vorigen Abschnitt beschriebenen Reduktionen schon ausgeführt worden sind: die äußeren Massen sind weggeräumt und durch innere ersetzt worden, der Stokessche Lehrsatz kann angewandt und die Dimensionen und Gestalt des Geoids können aus der Verteilung der Schwerkraft γ in demselben bestimmt werden.

Wenn das Geoid genau die Gestalt eines Rotationsellipsoids hätte, wäre es sehr leicht, die Abplattung und die Länge der größeren Halbachse zu bestimmen. Der allgemeine Ausdruck für das Potential eines Ellipsoids und der Ausdruck für die Schwerkraft in dessen Oberfläche sind bekannt. In beiden Ausdrücken figurieren dieselben drei Konstanten, wenn das Ellipsoid dreiachsig, zwei Konstanten, wenn das Ellipsoid eine Rotationsfigur ist. Nehmen wir das Ro-

tationsellipsoid. Die zwei Konstanten sind entweder die Längen beider Halbachsen oder die Länge der äquatorialen Halbachse a und die Abplattung e. Der Ausdruck für die Schwerkraft in der Oberfläche des Ellipsoids ist eine Funktion von a, e und β, wo β die geographische Breite bezeichnet, d. h.

$$\gamma = F(a, e, \beta).$$

Hätte man also zwei genaue Werte von γ in zwei gegebenen Breiten, z. B. γ_1 in der Breite β_1 nnd γ_2 in der Breite β_2, so könnte man a und e bestimmen. In der Tat, zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= F(a, e, \beta_1) \\ \text{und } \gamma_2 &= F(a, e, \beta_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49$$

reichen aus, um zwei Unbekannte: a und e, zu bestimmen. — In der Praxis würde sich die Aufgabe etwas anders gestalten. Die Werte γ_1, γ_2 usw. muß man aus gemessener Schwerkraft mit Hilfe der im vorigen Abschnitt besprochenen Reduktionen ermitteln. Jede Messung, jede Reduktion ist mit gewissen Fehlern behaftet und infolgedessen sind die γ-Werte nicht absolut genau und die aus zwei Gleichungen bestimmten Werte von a und e unsicher. Man würde sich, wie sonst in ähnlichen Fällen üblich, durch Vermehrung von Schweremessungen zu helfen suchen. Denken wir uns, daß n-Werte $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, in n-Breiten $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ gemessen werden; die Anzahl der Gleichungen von der Gestalt 49 wäre jetzt n, und es wäre notwendig, die Unbekannten a und e mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Je größer die Zahl n, desto kleiner werden, ceteris paribus, die wahrscheinlichen Fehler von a und e sein.

Obgleich wir a priori wissen, daß das Geoid nicht genau die Gestalt eines Rotationsellipsoides haben kann, handeln wir doch entweder genau in der soeben beschriebenen oder in einer auf dasselbe hinauslaufenden Weise, d. h. wir werfen Abweichungen der Schwerkraft im Geoid von der Schwerkraft im Ellipsoid mit den Fehlern der Schweremessungen und der Reduktionen zusammen.

Nachdem a und e berechnet worden sind, geht man zur Berechnung der theoretischen Schwerkraft in der Oberfläche des Ellipsoids über, was sehr leicht geschieht, und vergleicht die theoretische Schwerkraft mit den γ. Es wird sich dann zeigen, 1. daß die Differenzen zwischen γ und der theoretischen Schwerkraft oder, wie man sie nennt, die Anomalien der Schwerkraft nicht besonders

groß sind, was bedeutet, daß das Geoid vom Ellipsoid wenig abweicht; 2. daß die Anomalien zum Teil doch zu groß sind, um durch Messungs- und Reduktionsfehler erklärt zu werden und vor allem einen regelmäßigen Gang aufweisen, der durch Zufall nicht erklärt werden kann. Folglich muß man annehmen, daß die Anomalien der Schwerkraft hauptsächlich durch Abweichungen des Geoids vom Erdellipsoid bedingt sind.

Wir müssen nun die Methode, die bei dergleichen Rechnungen anzuwenden ist, besprechen.

Unter den Funktionen, welche der Laplaceschen Gleichung:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = 0$$

genügen und zum Ausdrücken des äußeren Attraktionspotentials geeignet sind, verdienen die Kugelfunktionen und die Funktionen von Lamé eine besondere Beachtung. Die ersten sind mit der Kugel, die zweiten mit dem Ellipsoid innig verknüpft. Bisher wurden in der Theorie der Gestalt der Erde hauptsächlich die Kugelfunktionen gebraucht, obgleich die Funktionen von Lamé geeigneter sind. Erst in der letzten Zeit haben sich Hamy*), Poincaré**) und der Schreiber dieser Zeilen***) dieser letzten Funktionen bedient. Im übrigen kann man die Kugelfunktionen als einen besonderen Fall der Funktionen von Lamé betrachten, so daß die Theorie der ersten in der Theorie der letzten mit eingeschlossen ist.

Nicht nur das Attraktionspotential eines Ellipsoids, sondern auch das Attraktionspotential eines jeden Körpers, dessen Gestalt sich nicht viel von der Gestalt eines Ellipsoids unterscheidet, kann mit Hilfe der Funktionen von Lamé ausgedrückt werden. Das Potential der Zentrifugalkraft ist ebenfalls mit Hilfe derselben Funktionen darstellbar. Endlich läßt sich jede vom Ellipsoid wenig verschiedene Fläche mit ihrer Hilfe leicht darstellen. Natürlich enthalten diese Funktionen gewisse vorderhand unbestimmte Koeffizienten, die ebenso im Ausdruck des Potentials, wie in demjenigen

---

*) Hamy, Remarques sur la théorie de la figure des planètes. Journ. des math. pures et appl. (1890).

**) Poincaré, Les mesures de la gravité ... Bull. Astron. Bd. XVIII.

***) Rudzki, Sur la détermination de la figure de la Terre ... Bull. Astron. Bd. XXII.

der Schwerkraft auftreten. Setzt man den theoretischen Ausdruck der Schwerkraft den aus Schweremessungen berechneten γ gleich, so erhält man eine Reihe von Gleichungen von der Gestalt 49, aus denen die Koeffizienten bestimmt werden könnten. Aber es stecken in den γ noch verschiedene Messungs- und Reduktionsfehler, weshalb die Bestimmung der Koeffizienten nicht ohne vorhergehende Ausgleichungen ausgeführt werden darf. Hat man mehr als zwei Koeffizienten bestimmt, so kann man nicht nur die größere Halbachse und die Abplattung, sondern auch einige wichtigere Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid berechnen. Aber aus Gründen, die näher auseinanderzusetzen hier nicht der Ort ist, lohnt es sich gegenwärtig nicht, die Abweichungen des Geoids vom Erdellipsoid aus den γ zu berechnen. Man beschränkt sich auf die Bestimmung der Halbachse und der Abplattung des Erdellipsoids. Es ist bequemer, die Abweichungen des Geoids zwar nicht vom Erdellipsoid, aber von lokalen Referenzellipsoiden aus den sogenannten Lotabweichungen, d. h. aus den Differenzen zwischen den astronomisch und geodätisch bestimmten Koordinaten einzelner Punkte zu berechnen. Diese Methode ist aber zu speziell, um hier behandelt zu werden.

Zweites Kapitel.

Funktionen von Lamé. Bestimmung des Erdellipsoids aus Schweremessungen. Die Schwerkraft und ihre Anomalien.

§ 1. Elliptische Koordinaten.

Die Funktionen, welche seinen Namen führen, hat Lamé bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Wärmeleitung in Ellipsoiden erfunden. Es sind Produkte von gewissen Polynomen, welche der bekannten Laplaceschen Gleichung in elliptischen Koordinaten genügen. Bevor wir also den Laméschen Funktionen nähertreten, müssen wir uns mit den elliptischen Koordinaten vertraut machen.

Man nehme die Gleichung:

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - b^2} + \frac{z^2}{t^2 - c^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

in welcher t ein variabler Parameter, b und c zwei (positive) Konstanten sind, wobei:

$$b < c.$$

Solange $0 < t^2 < b^2$, repräsentiert die Gleichung 1 ein zweischaliges Hyperboloid, wenn $b^2 < t^2 < c^2$, repräsentiert sie ein einschaliges Hyperboloid, wenn endlich $b^2 < c^2 < t^2$, wird sie zur Gleichung eines Ellipsoids. Läßt man also den Parameter t^2 von 0 bis ∞ variieren, so erhält man zuerst eine Familie von zweischaligen Hyberboloiden, dann eine Familie von einschaligen Hyperboloiden, endlich eine Familie von Ellipsoiden. Sämtliche Flächen dieser drei Familien sind konfokal.

Die Gleichung 1 hat immer drei reelle positive Wurzeln, von denen eine, die erste, sagen wir $t^2 = \nu^2$, immer zwischen 0 und b^2, die zweite, sagen wir $t^2 = \mu^2$, immer zwischen b^2 und c^2, die dritte, sagen wir $t^2 = \varrho^2$, immer zwischen c^2 und ∞ liegt. Der ersten entspricht ein zweischaliges, der zweiten ein einschaliges Hyperboloid, der dritten Wurzel entspricht ein Ellipsoid. Folglich gehen durch einen jeden Punkt des Raumes je drei Flächen: ein zweischaliges Hyperboloid, ein einschaliges und ein Ellipsoid. Die drei Flächen schneiden einander orthogonal (rechtwinklig), was sofort verifiziert werden kann, sobald man die partiellen Differentialquotienten $\frac{dx}{d\varrho}, \frac{dx}{d\mu} \ldots$ usw. bildet und die Bedingungen der Orthogonalität:

$$\frac{dx}{d\varrho} \cdot \frac{dx}{d\mu} + \frac{dy}{d\varrho} \cdot \frac{dy}{d\mu} + \frac{dz}{d\varrho} \cdot \frac{dz}{d\mu} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

usw. usw.

niederschreibt.

Die drei Wurzeln der Gleichung 1: ϱ, μ, ν heißen elliptische Koordinaten. Ihre Beziehungen zu den rechtwinkligen Koordinaten können leicht gefunden werden. Bekannterweise bestehen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten der Gleichung 1 folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 \\ \varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 &= (b^2 + c^2)\,x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2 + b^2 c^2 \\ \varrho^2\mu^2\nu^2 &= b^2 c^2 x^2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad 3$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{\varrho \mu \nu}{bc} \\ y &= \pm \frac{(\varrho^2 - b^2)^{1/2} (\mu^2 - b^2)^{1/2} (b^2 - \nu^2)^{1/2}}{b (c^2 - b^2)^{1/2}} \\ z &= \pm \frac{(\varrho^2 - c^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}{c (c^2 - b^2)^{1/2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; 4$$

Durch geeignete Wahl der Vorzeichen kann man die 8 Punkte des Raumes, deren Koordinaten dieselben absoluten Werte haben, voneinander unterscheiden.

Das Quadrat des Linienelements ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = A^2 d\varrho^2 + B^2 d\mu^2 + C^2 d\nu^2, \; . \; . \; 5$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} \\ B^2 &= \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\varrho^2 - \mu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} \\ C^2 &= \frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6$$

Aus den Formeln 5 und 6 sieht man sofort, daß die Elemente der äußeren Normalen folgende Ausdrücke haben:

Element der Normale zum Ellipsoid	$dn_1 = A\,d\varrho$	7
„ „ „ „ einschaligen Hyperboloid	$dn_2 = B\,d\mu$	
„ „ „ „ zweischaligen „	$dn_3 = C\,d\nu$	

Das Element der Oberfläche des Ellipsoids wird durch die Formel:

$$d\sigma = \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{(\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2} (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}} \cdot d\mu \, d\nu \quad . \; 8$$

ausgedrückt.

Setzt man

$$l = (\varrho^2 - \mu^2)^{-1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{-1/2}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 9$$

so ist das Produkt $l d\sigma$ von ϱ unabhängig. Es ist das Flächenelement einer Kugel mit dem Radius Eins, deren Koordinaten $x'\, y'\, z'$ den Koordinaten des Ellipsoids folgendermaßen zugeordnet sind:

$$x' = \frac{x}{\varrho}, \quad y' = \frac{y}{(\varrho^2 - b^2)^{1/2}}, \quad z' = \frac{z}{(\varrho^2 - c^2)^{1/2}}. \; . \; . \; 9a$$

§ 2. Funktionen von Lamé*).

Die Gleichung von Laplace in elliptischen Koordinaten lautet:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV}{d\varrho}\right)+\frac{d}{d\mu}\left(\frac{AC}{B}\frac{dV}{d\mu}\right)+\frac{d}{d\nu}\left(\frac{AB}{C}\frac{dV}{d\nu}\right)=0, \quad . \quad . \quad 10$$

wobei A, B, C den Gleichungen 6 des vorigen Paragraphen entnommen sind. Die Gleichung 10 wird durch ein Produkt von Lamés Funktionen: $R_n M_n N_n$ oder auch durch ein Produkt $S_n M_n N_n$ befriedigt, wobei R und S Funktionen von ϱ allein, M von μ allein, N von ν allein bedeuten. Diese Funktionen sind nicht willkürlich: erstens müssen R_n, M_n und N_n desselben Grades sein, wobei n eine positive Zahl bedeutet, zweitens muß R_n eine der vier Formen haben:

$$\left.\begin{array}{l} R_n = P_n, \quad R_n = (\varrho^2 - c^2)^{1/2} P_{n-1}, \quad R_n = (\varrho^2 - b^2)^{1/2} P_{n-1}, \\ \qquad R_n = (\varrho^2 - b^2)^{1/2} (\varrho^2 - c^2)^{1/2} P_{n-2}, \end{array}\right\} \quad . \quad 11$$

in denen P_n ein Polynom $n$ten Grades in ϱ, P_{n-1} ein solches Polynom $(n-1)$ten Grades, P_{n-2} ein solches Polynom (n — 2)ten Grades bezeichnet. Alle vier Formen befriedigen eine und dieselbe Differentialgleichung:

$$\left.\begin{array}{l} (\varrho^2 - c^2)(\varrho^2 - b^2)\dfrac{d^2 R_n}{d\varrho^2} + \varrho\,(2\varrho^2 - b^2 - c^2)\dfrac{d R_n}{d\varrho} = \\ \qquad = [n(n+1)\,\varrho^2 - B_n]\,R_n \end{array}\right\} \quad . \quad 12$$

B_n bezeichnet eine Konstante, die aber nicht willkürlich gewählt werden kann; sie muß im Gegenteil den Wurzeln einer Gleichung entnommen werden, zu welcher man gelangt, wenn man die Koeffizienten der einzelnen Potenzen des Polynoms R_n aus der Gleichung 12 zu bestimmen trachtet. Jedem bestimmten ganzen Werte n entsprechen $2n+1$ verschiedene reelle B-Wurzeln und $2n+1$ verschiedene Funktionen R_n. Einer bestimmten B-Wurzel entspricht nur eine Funktion R_n, die durch die Wahl von B bis auf einen konstanten Faktor vollkommen bestimmt ist. — Diesen bestimmt man aus der Bedingung, daß der Koeffizient der höchsten Potenz in den bezüglichen Polynomen P_n, P_{n-1}, P_{n-2} der Einheit gleich sein soll. Die Funktion S_n entsteht aus der

*) Hauptsächlich nach Hamy, Théorie de la figure des planètes. Journ. des math. pures et appl. Ser. IV, Bd. VI (1890).

entsprechenden Funktion R_n durch Integration. Nach der Definition von Hamy ist nämlich:

$$S_n = R_n \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{R_n^2 (\varrho^2 - b^2)^{1/2} (\varrho^2 - c^2)^{1/2}} \quad . \; . \; . \; . \; 13$$

Wir haben hier die Definition von Hamy als die bequemere angenommen. Die ältere Definitionsformel von Liouville unterschied sich von der Formel 13 nur durch den Faktor $(2n+1)$ vor R_n, d. h. nach der Definition von Liouville war

$$S_n = (2n+1) R_n \ldots \text{usw. wie in 13.}$$

Die Funktion M_n erhält man aus der Funktion R_n, wenn man in den Polynomen P_n, P_{n-1}, P_{n-2} überall μ statt ϱ, $(\mu^2 - b^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - b^2)^{1/2}$, $(c^2 - \mu^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - c^2)^{1/2}$ schreibt. Ebenso erhält man N_n aus R_n, wenn man ν statt ϱ, $(b^2 - \nu^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - b^2)^{1/2}$, $(c^2 - \nu^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - c^2)^{1/2}$ schreibt.

Es muß an dieser Stelle hervorgehoben werden, daß die Gleichung von Laplace nur von solchen Produkten R_n, M_n, N_n bezw. S_n, M_n, N_n befriedigt wird, in denen die Funktionen R_n, M_n, N_n, bezw. S_n, M_n, N_n nicht nur vom selben Grade sind, sondern auch zu derselben B-Wurzel gehören.

Wir müssen nun gewissen Eigenschaften der Funktionen von Lamé, die uns weiterhin nützlich sein werden, noch ein paar Worte widmen.

§ 3. Gewisse Eigenschaften der Funktionen von Lamé.

A) Es sei D der Abstand des Punktes A mit den Koordinaten ϱ, μ, ν vom Punkt B mit den Koordinaten ϱ' μ' ν'. Ferner seien S_n, R_n, M_n, N_n Funktionen $n$ten Grades von ϱ, μ, ν und S'_n, R'_n, M'_n, N'_n ebensolche Funktionen von ϱ' μ' ν', wobei wieder gemeint ist, daß alle diese Funktionen zu derselben Wurzel B gehören. Es sei weiter wie früher (§ 1, Formel 9)

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}} \qquad l' = \frac{1}{\sqrt{(\varrho'^2 - \mu'^2)(\varrho'^2 - \nu'^2)}} \quad . \; 14$$

und endlich $d\sigma'$ ein Element der Oberfläche des Ellipsoids, auf welchem sich der Punkt ϱ' μ' ν' *) befindet. Man hat dann:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{l' M'_n N'_n}{D} d\sigma' &= 4\pi S'_n \cdot R_n M_n N_n, \text{ wenn } \varrho < \varrho' \\ \text{„} \quad \text{„} \quad &= 4\pi R'_n \cdot S_n M_n N_n, \quad \text{„} \quad \varrho > \varrho' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 15$$

*) ϱ' ist die größte, $(\varrho'^2 - b^2)^{1/2}$ die mittlere, $(\varrho'^2 - c^2)^{1/2}$ die kleinste Halbachse dieses Ellipsoids. Ebenso liegt der Punkt ϱ, μ, ν auf dem Ellipsoid, dessen größte Halbachse ϱ, die mittlere $(\varrho^2 - b^2)^{1/2}$, die kleinste $(\varrho^2 - c^2)^{1/2}$ ist.

wobei zu beachten ist, daß die Integration über die ganze Oberfläche des Ellipsoids ϱ' ausgedehnt werden soll.

B) Nimmt man irgendwelche voneinander verschiedene Produkte $(MN)_1$ *) und $(MN)_2$ und bildet ein über die ganze Oberfläche eines Ellipsoids ausgedehntes Integral, so erhält man als Resultat Null, d. h. es ist

$$\int (MN)_1 (MN)_2 \, l d\sigma = 0 \, , \quad \dots\dots \quad 16$$

wobei die Integration über die ganze Oberfläche eines Ellipsoids ausgedehnt wird. Wenn aber die beiden Produkte MN identisch sind, dann ist das obige Integral von der Null verschieden, positiv und von ϱ unabhängig. Diese letzte Eigenschaft wird sofort einleuchtend, wenn man sich daran erinnert, daß weder das Produkt MN noch das Element $l d\sigma$ ϱ enthalten. — Speziell für $n = 0$ hat man je eine Funktion R, M und N, wobei alle drei konstant sind; es -st nämlich: $R_0 = M_0 = N_0 = 1$. Man hat dann:

$$\int (M_0 N_0)^2 \, l d\sigma = 4\pi, \quad \dots\dots\dots \quad 17$$

wobei wieder die Integration über die ganze Oberfläche des Ellipsoids ausgedehnt werden soll.

§ 4. Abgeplattetes Umdrehungsellipsoid.

Um aus der Gleichung eines dreiachsigen Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \quad \dots\dots\dots \quad 18$$

diejenige eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoids mit z als Umdrehungsachse zu erhalten, müssen wir $b = 0$ setzen. Dann wird aber die Variable ν, die zwischen 0 und b enthalten ist, gleichzeitig Null, und die Lage eines Punktes auf der Oberfläche des Ellipsoids wird unbestimmt. Um die Unbestimmtheit aufzuheben, setzt man $\nu = b\nu'$, hebt den Faktor b in Zähler und Nenner auf und setzt erst nachträglich $b = 0$. Nach diesen Operationen ist es bequemer, wieder ν statt ν' zu schreiben, nur wird jetzt ν eine andere Bedeutung haben; früher war ν eine Strecke, jetzt ist es eine absolute

---

*) Die Zeichen 1 und 2 sollen durchaus nicht bedeuten, daß das eine Produkt vom ersten, das zweite vom zweiten Grade ist; sie können von irgendeinem beliebigen Grade sein. Falls beide vom selben Grade sind, gehören sie zu verschiedenen B-Wurzeln.

Zahl. Sonst ist das neue ν nichts anderes als der Kosinus der geographischen Breite, d. h.

$$\nu = \cos\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19$$

Unter diesen Voraussetzungen reduzieren sich die Gleichungen 3 auf:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 + \mu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + c^2 \\ \varrho^2\mu^2 &= c^2(x^2 + y^2) \\ \varrho^2\mu^2\nu^2 &= c^2 x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 20$$

und die Gleichungen 4 auf:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\varrho\mu\nu}{c} \\ y &= \frac{\varrho\mu}{c}\sqrt{1-\nu^2} \\ z &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\cdot\sqrt{c^2-\mu^2}}{c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 21$$

Der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements bleibt derselbe wie früher, nämlich

$$A^2 d\varrho^2 + B^2 d\mu^2 + C^2 d\nu^2,$$

aber ν hat die neue in der Gleichung 19 angegebene Bedeutung, und die Quadrate der Koeffizienten A, B und C sind jetzt:

$$A^2 = \frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2 - c^2}, \quad B^2 = \frac{\varrho^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}, \quad C^2 = \frac{\varrho^2\mu^2}{c^2(1-\nu^2)} \quad \ldots \quad 22$$

Im Falle eines dreiachsigen Ellipsoids genügt die Funktion R_n der Gleichung 12, M_n und N_n genügen Gleichungen, welche durch eine Substitution aus der Gleichung 12 entstehen. Die Gleichung für M entsteht aus der Gleichung 12, wenn μ statt ϱ, $(\mu^2 - b^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - b^2)^{1/2}$ und $(c^2 - \mu^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - c^2)^{1/2}$ geschrieben wird. Ebenso entsteht die Differentialgleichung für N, wenn in der Gleichung 12 ν statt ϱ, $(b^2 - \nu^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - b^2)^{1/2}$ und $(c^2 - \nu^2)^{1/2}$ statt $(\varrho^2 - c^2)^{1/2}$ geschrieben wird. Im Falle eines Rotationsellipsoids ist $b = 0$ und die Differentialgleichung 12 reduziert sich auf

$$\varrho^2(\varrho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \varrho(2\varrho^2 - c^2)\frac{dR}{d\varrho} = [n(n+1)\varrho^2 - B]R; \quad . \quad 23$$

die Gleichungen für M und N reduzieren sich auf:

$$\left.\begin{aligned} &c^2\cos^2\varphi^2\frac{d^2M}{d\varphi^2} - c^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{dM}{d\varphi} = [n(n+1)c^2\cos^2\varphi - B]\,M \\ &\text{und} \\ &c^2\frac{d^2N}{d\psi^2} + BN = 0 \end{aligned}\right\} \quad 24$$

In diesen Gleichungen haben wir einerseits laut Gleichung 19 $\nu = \cos\psi$, andererseits $\mu = c\cos\varphi$ gesetzt und die Winkel ψ und φ zu unabhängigen Variabeln gewählt. Die Funktion M soll eine ganze Funktion von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, die Funktion N eine ganze Funktion von $\cos\psi$ und $\sin\psi$ sein. Zu diesem Zwecke müssen wir setzen:

$$B = i^2 c^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 25$$

wobei $i = 0, 1, 2, 3 \ldots n$ sein kann. Wir sehen also, daß im Falle eines Rotationsellipsoids die Konstanten B durch die höchst einfache Formel 25 gegeben werden. Gleichzeitig sehen wir, daß die Gleichungen 23 und 24 in der Form:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho^2(\varrho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \varrho(2\varrho^2 - c^2)\frac{dR}{d\varrho} = [n(n+1)\varrho^2 - i^2c^2]R \\ &\cos^2\varphi\frac{d^2M}{d\varphi^2} - \sin\varphi\cos\varphi\frac{dM}{d\varphi} = [n(n+1)\cos^2\varphi - i^2]M \\ &\frac{d^2N}{d\psi^2} + i^2N = 0, \text{ wo } i = 0, 1, 2 \ldots n \end{aligned}\right\} \quad . \quad 26$$

geschrieben werden können. Diesen Differentialgleichungen genügen die Funktionen R, M und N $n$ten Grades. Es ist klar, daß $n+1$ solche Gleichungen geschrieben werden können, da i $n+1$ verschiedene Werte haben kann. Die Integrale dieser Differentialgleichungen können sofort niedergeschrieben werden, sie heißen:

$$\left.\begin{aligned} &R_n = \frac{(c^2+t^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \cdot \frac{d^{i+n}(c^2+t^2)^n}{dt^{i+n}}, \\ &\qquad \text{wo } t = \sqrt{\varrho^2 - c^2} \\ &M_n = \frac{(c^2-q^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \cdot \frac{d^{i+n}(c^2-q^2)^n}{dq^{i+n}}, \\ &\qquad \text{wo } q = \sqrt{c^2 - \mu^2} \\ &N_n = \cos i\psi \text{ oder } \sin i\psi. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 27$$

Um die sämtlichen Funktionen $n$ten Grades zu erhalten, hat man in diesen Formeln nacheinander $i = 0, 1, 2 \ldots n$ zu setzen. Jedem i entsprechen: eine Funktion R, eine Funktion M und zwei Funktionen N; nur für $i = 0$ hat man bloß eine Funktion $N_{n,o} = 1$. Somit hat man für $n = n$ und $i = o$ ein Produkt RMN, wobei $N = 1$, aber für $n = n$ und $o < i \leqq n$ je zwei Produkte RMN. In beiden Produkten treten dieselben Funktionen R und M auf; was N anbetrifft, so ist einmal $N = \cos i\psi$, ein zweites Mal $N = \sin i\psi$. Alles in allem wird man also $2n+1$ voneinander

verschiedene Produkte RMN $n$ten Grades bilden können. Ein jedes von diesen Produkten befriedigt die Laplacesche Differentialgleichung.

Die Funktionen von Lamé, sowohl allgemeine wie spezielle, auf ein Rotationsellipsoid bezügliche, können zur Entwicklung ganz willkürlicher, kontinuierlicher und diskontinuierlicher Funktionen der Variabeln μ und ν verwendet werden. So kann irgendeine Funktion $F(\mu, \nu)$ in eine konvergente Reihe entwickelt werden von der Form: ΣAMN, worin A Konstanten bedeuten. Dieser Satz ist jedoch nicht ohne gewisse Einschränkungen und Bedingungen gültig. So z. B. muß die zu entwickelnde Funktion $F(\mu, \nu)$ jedenfalls integrierbar sein und das Integral

$$\iint F(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu,$$

erstreckt auf das ganze Gebiet, auf welches sich die Reihenentwicklung bezieht, muß endlich bleiben. — Es existieren außerdem noch andere Einschränkungen, auf welche wir aber nicht näher einzugehen brauchen, indem in praktischen Anwendungen eigentlich keine unendlichen, sondern nur endliche Reihen zur Verwendung kommen. Denken wir uns z. B., daß verlangt wird, die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid, d. h. die Höhen und Tiefen des Geoids in bezug auf das Erdellipsoid mit Hilfe einer Reihe von der Gestalt ΣAMN darzustellen. Da die betreffenden Abweichungen in letzter Instanz aus gewissen Beobachtungen bestimmt werden, kann man nur eine endliche Anzahl von Koeffizienten A berechnen und die Reihe wird notwendig endlich sein.

§ 5. Anwendung der Funktionen von Lamé auf das Erdellipsoid. Die Schwerkraft in der Oberfläche des Ellipsoids.

Wir werden jetzt das sogenannte Erdellipsoid bestimmen. Die Helmertsche Definition des Erdellipsoids wurde im § 7 des ersten Kapitels angeführt, die Definition, die wir hier akzeptieren, deckt sich nahezu mit der Definition Helmerts: sie ist nur so weit modifiziert, als die Anwendung der Funktionen von Lamé es erheischt. Wir nehmen also an, daß das Erdellipsoid folgende Eigenschaften hat: 1. Es ist ein Rotationsellipsoid. 2. Seine Oberfläche ist eine Niveaufläche (Äquipotentialfläche der Schwerkraft). 3. Seine Masse ist der Masse des Geoids gleich. 4. Bezeichnet man die Schwerkraft in der Oberfläche des Geoids im Punkte μ,

ν mit γ und die (theoretische) Schwerkraft im Punkte μ, ν der Oberfläche des Erdellipsoids mit Γ, so muß das über die ganze Oberfläche des Erdellipsoids ausgedehnte Integral

$$\int (\gamma - \Gamma)^2 \, l \, d\sigma = \text{Minimum} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 28$$

sein. Die soeben aufgezählten vier Bedingungen bestimmen das Erdellipsoid vollständig.

Es sei: M die Masse des Geoids, k die Attraktionskonstante, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, U das zum Erdellipsoid gehörige Schwerkraftpotential, ϱ_0 die äquatoriale Halbachse des Erdellipsoids, c seine Linearexzentrizität, e seine Abplattung, φ die exzentrische Anomalie einer Meridianellipse. Außerdem wissen wir, daß die Gleichung des Erdellipsoids in elliptischen Koordinaten durch die einfache Formel

$$\varrho = \varrho_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 29$$

ausgedrückt wird.

Es ist klar, daß das Attraktionspotential eines Ellipsoids durch Lamés Funktionen ausgedrückt werden kann, da diese Funktionen derselben Differentialgleichung wie das genannte Potential genügen. Man findet, daß eine Funktion des nullten Grades und eine des zweiten Grades zu diesem Zwecke ausreichen; ebenso wird das Potential der Zentrifugalkraft durch eine Lamésche Funktion zweiten Grades plus eine Konstante ausgedrückt, und das Schwerkraftpotential des Ellipsoids kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$U = A_0 S_0 M_0 N_0 + A_2 S_2 M_2 N_2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 \varrho^2 (\tfrac{2}{3} + M_2 N_2), \quad . \quad 30$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} & A_0 = kM, \quad S_0 = \int_\varrho^\infty \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - c^2}}, \quad M_0 = N_0 = 1 \\ & S_2 = (\varrho^2 - \tfrac{2}{3} c^2) \int_\varrho^\infty \frac{d\varrho}{(\varrho^2 - \tfrac{2}{3} c^2)^2 \varrho \sqrt{\varrho^2 - c^2}} \\ & M_2 = \frac{\mu^2}{c^2} - \tfrac{2}{3}, \quad N_2 = 1, \quad \mu = c \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 31$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\varrho^2 (\tfrac{2}{3} + M_2 N_2) = x^2 + y^2.$$

Endlich ist A_2 durch die Gleichung:

$$A_2 S_2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 \varrho^2 = 0, \text{ für } \varrho = \varrho_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 32$$

definiert. Dank dieser letzten Bedingung ist das Potential U für $\varrho = \varrho_0$ eine Konstante, d. h. die Oberfläche des Erdellipsoids ist

eine Niveaufläche, wie es die Bedingung 2 erfordert; auch die Bedingungen 1 und 3 sind bereits erfüllt, nur die Bedingung 4 ist noch übrig geblieben. Um diese letztere zu erfüllen, müssen wir zunächst den Ausdruck für Γ bilden. Laut Definition ist:

$$\Gamma = -\frac{dU}{d\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dn} \quad (\text{für } \varrho = \varrho_0), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 33$$

wobei dn das Element der äußeren Normale bedeutet. Wir werden zuerst die Derivierte $\frac{dU}{d\varrho}$, dann die Derivierte $\frac{d\varrho}{dn}$ bilden. Mit Berücksichtigung der Gleichung 32 erhält man aus der Gleichung 30:

$$\frac{dU}{d\varrho} = A_0 \frac{dS_0}{d\varrho} + \omega^2 \varrho \left(1 - \frac{\varrho}{6 S_2} \cdot \frac{dS_2}{d\varrho}\right) - \omega^2 \varrho \left(1 - \frac{\varrho}{2 S_2} \frac{dS_2}{d\varrho}\right) \sin^2 \varphi$$
$$(\text{für } \varrho = \varrho_0) \quad 34$$

Um $\frac{d\varrho}{dn}$ zu bilden, kehren wir zu den Gleichungen 7 zurück und benutzen die erste dieser Gleichungen. Der Faktor A (mit den Konstanten A_0, A_2 nicht zu verwechseln) soll aus der ersten Gleichung 6 genommen werden. Da unser Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, darf man $b\nu$ statt ν schreiben und nachträglich $b = 0$ setzen. Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{d\varrho}{dn} = \sqrt{\frac{\varrho_0{}^2 - c^2}{\varrho_0{}^2 - \mu^2}} = \sqrt{\frac{\varrho_0{}^2 - c^2}{\varrho_0{}^2 - c^2 \cos^2 \varphi}} \quad . \; . \; . \; . \quad 35$$

und es bleibt nur noch übrig, die Werte von $\frac{dU}{d\varrho}$ und $\frac{d\varrho}{dn}$ aus den Gleichungen 34 und 35 in die Gleichung 33 einzusetzen. Im Äquator des Erdellipsoids ist $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, folglich fällt für solche Punkte das dritte Glied rechts in Gleichung 34 ganz fort und $\frac{d\varrho}{dn}$ reduziert sich auf Eins. Indem die Schwerkraft am Äquator mit Γ_0 bezeichnet wird, kann man somit schreiben:

$$\Gamma_0 = -A_0 \frac{dS_0}{d\varrho} - \omega^2 \varrho \left(1 - \frac{\varrho}{6 \cdot S_2} \cdot \frac{dS_2}{d\varrho}\right)_{(\varrho = \varrho_0)} \quad . \; . \; . \quad 36$$

Nach Einsetzen der Werte 34 und 35 kann man mit Hilfe dieses letzten Ausdruckes die Formel 33 auf die Gestalt bringen:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left[1 + m\left(1 - \frac{\varrho}{2 S_2} \frac{dS_2}{d\varrho}\right) \sin^2 \varphi\right] \sqrt{\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - c^2 \cos^2 \varphi}}_{(\varrho = \varrho_0)} \quad . \; . \quad 37$$

worin der Kürze wegen

$$m = \frac{\omega^2 \varrho_0}{\Gamma_0}$$

gesetzt wurde. Übrigens sieht man, daß m nichts anderes als das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator des Erdellipsoids bedeutet. Die Formel 37 ist jedoch in einer Hinsicht unbequem: sie enthält S_2 und $\frac{dS_2}{d\varrho}$, die beide in der Form unendlicher Reihen auftreten. Glücklicherweise sind diese Reihen stark konvergent und es ist möglich, ihren Quotienten durch einen einfachen angenäherten Ausdruck zu ersetzen. In der Tat: setzt man

$$q^2 = \frac{c^2}{\varrho^2 - c^2}, \text{ so ist } \frac{dq}{d\varrho} = -\frac{q^3}{c^2}\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38$$

und man findet folgende Ausdrücke für S_2 und für seine Derivierte:

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= \frac{3}{c^3} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(2n+1)(2n+3)} q^{2n+1} \\ \frac{dS_2}{d\varrho} &= -\frac{3}{c^5}\varrho \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n}{2n+3} \cdot q^{2n+3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 39$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung 37 ein, führt die Division aus und beschränkt sich auf die Glieder nullten und zweiten Grades in bezug auf q, so folgt:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left[1 + m\left(\tfrac{5}{2} + \tfrac{9}{14} q^2\right)\sin^2\varphi\right] \cdot \sqrt{\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - c^2\cos^2\varphi}}_{(\varrho=\varrho_0)} \quad . \quad . \quad 40$$

Wir haben die Glieder mit q^4 und höheren Potenzen von q vernachlässigt, da m und q^2 beide von gleicher Größenordnung wie die Abplattung sind; es lohnt sich aber nicht, Glieder von höherer Ordnung als das Quadrat der Abplattung beizubehalten, da Glieder von der Ordnung der dritten Potenz der Abplattung in der Regel erst auf die fünfte Dezimale*) des Zahlenausdruckes der Schwerkraft Einfluß haben, während in den aus guten Pendelmessungen berechneten Schwerkraftwerten bereits die dritte Dezimale nicht ganz sicher ist. — Jetzt ist es geraten, statt φ die geographische Breite β einzuführen. Diese letztere hängt mit φ vermittels der Formel:

$$\sin\varphi = \sin\beta \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - c^2\sin^2\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41$$

---

*) Wir setzen voraus, daß die Schwerkraft in Zentimetern per Sekunde² angegeben wird.

zusammen. Somit ist:

$$\frac{d\varrho}{dn} = \sqrt{\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - c^2\cos^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2\sin^2\beta}}{\varrho} \quad . \; . \; . \; 42$$

Nach der Substitution von β ist es weiter bequem, q^2 durch die Abplatttung zu ersetzen. Dazu dient die Formel:

$$q^2 = 2e + 3e^2 + \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 43$$

Zuletzt benutzt man noch die Relation:

$$\sin^4\beta = \sin^2\beta - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\beta.$$

Durch diese Substitutionen, wobei man die Glieder von der Ordnung e^3 und höherer Ordnungen vernachlässigt, verwandelt sich endlich die Formel 40 in:

$$\Gamma = \Gamma_0\left[1 + \left(\tfrac{5}{2}m - e - \tfrac{17}{14}me\right)\sin^2\beta - \frac{e}{8}(5m - e)\sin^2 2\beta\right] \; . \; 44$$

Das ist die Formel, die zur Berechnung der Schwerkraft in der Oberfläche des Erdellipsoids dienen soll. Sie ist nicht ganz streng, aber hinreichend genau, um allen Forderungen zu genügen.

Betrachten wir jetzt die vierte Bedingung:

$$\int (\gamma - \Gamma)^2 l\, d\sigma = \text{Minimum} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 45$$

Die γ-Werte werden durch die Beobachtung gefunden. Zwar muß man zu den beobachteten Werten von g gewisse Korrektionen addieren, um γ zu bekommen, aber das ändert nicht grundsätzlich den Charakter dieser Größen; immerhin sind sie aus Beobachtungen hergeleitet und müssen als gegeben betrachtet werden, daraus folgt aber, daß sie nicht variieren können. Die Funktion Γ enthält vier Konstanten. Unter diesen sind A_0 und ω gegeben und variieren nicht, nur ϱ_0 und c sind variabel. Aus praktischen Rücksichten ist es bequemer, nicht ϱ_0 und c, sondern zwei Funktionen dieser Parameter, nämlich Γ_0 und e einzuführen, wie es auch in der Gleichung 44 getan wurde. Γ_0 und e hängen mit ϱ und c vermittels folgender Formeln zusammen:

$$\left.\begin{aligned} e &= 1 - \frac{\sqrt{\varrho_0{}^2 - c^2}}{\varrho_0} \quad \text{und} \\ \Gamma_0 &= -A_0\frac{dS_0}{d\varrho} - \omega^2\varrho\left(1 - \frac{\varrho}{6S_2}\frac{dS_2}{d\varrho}\right)_{(\varrho=\varrho_0)}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 46$$

Die zweite dieser Formeln kann sofort in

$$\Gamma_0 = \frac{A_0}{\varrho_0{}^2(1-e)} - \omega^2\varrho_0\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{7}e + \ldots\right) \quad . \; . \; . \; . \; 47$$

umgewandelt werden. In dieser letzten Form ist der Zusammenhang zwischen Γ_0 einerseits und ϱ_0 und e andererseits besonders klar ersichtlich.

Wir werden somit die Bedingungen des Minimums (vergl. die Gleichung 45) folgendermaßen schreiben:

$$\int (\gamma - \Gamma) \frac{d\,\Gamma}{d\,\Gamma_0}\, l\, d\sigma = 0, \quad \int (\gamma - \Gamma) \frac{d\,\Gamma}{d e}\, l\, d\sigma = 0\;.\;\;.\;\;.\quad 48$$

Es sei nebenbei daran erinnert, daß $l\,d\sigma$ von den Dimensionen und der Gestalt des Ellipsoids nicht abhängt. — In die Formeln 48 werden die Derivierten von Γ, aus der Formel 44 berechnet, eingesetzt. Dieselbe kann kurz folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Gamma = \Gamma_0 + G \sin^2\beta + H \sin^2 2\beta\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad 44'$$

Nach dieser Substitution werden die Gleichungen 48 die Form:

$$\left.\begin{aligned} &\int \left(1 + \frac{d\,G}{d\,\Gamma_0} \sin^2\beta + \frac{d H}{d\,\Gamma_0} \sin^2 2\beta\right)(\gamma - \Gamma)\, l\, d\sigma = 0 \\ &\int \left(\frac{d\,G}{d e} \sin^2\beta + \frac{d H}{d e} \sin^2 2\beta\right)(\gamma - \Gamma)\, l\, d\sigma = 0 \end{aligned}\right\}\;.\quad 48'$$

annehmen.

Die Aufgabe kann dadurch erleichtert werden, daß die kleinen Koeffizienten von $\sin^2 2\beta$ in beiden Formeln a priori berechnet werden. In roher Annäherung kann man selbst die kleinen Koeffizienten ganz vernachlässigen und die Formeln 48 auf die einfache Form:

$$\int (\gamma - \Gamma)\, l\, d\sigma = 0 \text{ und } \int (\gamma - \Gamma) \sin^2\beta\, l\, d\sigma = 0\;.\;\;.\;\;.\quad 48''$$

bringen. Wir wollen nun an der Hand dieser einfachen Formeln das zu befolgende Verfahren kurz skizzieren.

Wir nehmen an, daß der Ausdruck der Schwerkraft in der Oberfläche des Ellipsoids sich auf $\Gamma = \Gamma_0 + G \sin^2\beta$ reduziert, wobei Γ_0 und G vorläufig unbestimmt sind. Für die Schwerkraft in der Oberfläche des Geoids haben wir einen Interpolationsausdruck mit mehr oder weniger Koeffizienten, je nachdem man mehr oder weniger Schweremessungen berücksichtigt und je nachdem man diese Messungen mehr oder weniger genau darstellen will. Diese Koeffizienten sind als gegeben zu betrachten. Nach ausgeführter Integration erhalten wir aus den Gleichungen 48 zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten Γ_0 und G. Wir werden diese Gleichungen

nach Γ_0 und G auflösen. Nehmen wir an, daß Γ_0 und G schon berechnet worden sind. Nach der Gleichung 44 ist

$$G = \Gamma_0 \left(\tfrac{5}{2} m - e - \tfrac{17}{14} m e\right).$$

Bei dem Genauigkeitsgrad, der mit den Formeln 48″ erreicht werden kann, darf man das Glied zweiter Ordnung in der soeben geschriebenen Formel vernachlässigen und einfach

$$G = \Gamma_0 \left(\tfrac{5}{2} m - e\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49$$

schreiben. Da G und Γ_0 schon bekannt sind, ist die Differenz $(\frac{5}{2} m - e)$ gegeben. Es ist aber

$$m = \frac{\omega^2 \varrho_0}{\Gamma_0}.$$

In diesem Ausdruck ist ω eine bekannte Konstante, Γ_0 wurde aus den Gleichungen 48 bestimmt, endlich ist ϱ_0 eine Funktion der Parameter e, Γ_0 und ω, wie aus der Gleichung 47 ersichtlich. Es ist klar, daß die Gleichung 47 in bezug auf ϱ_0 dritten Grades ist, sie hat aber immer nur eine reelle positive Wurzel. Jetzt haben wir wieder zwei Gleichungen: 49 und 47, und zwei Unbekannte, e und ϱ_0, die aus diesen Gleichungen bestimmt werden können. In der Praxis kommt es aber nicht zur Auflösung dieser Gleichungen. Es ist üblich, den Wert von ϱ_0, d. h. der äquatorialen Halbachse, den geodätischen Messungen zu entnehmen und m direkt zu berechnen.

Der numerische Wert von m ist nahezu $1/289 = 1/17^2$; Helmert gibt $m = 0{,}0034677\ldots$ an. Sobald m bekannt ist, kehrt man zur Gleichung 49 zurück, in welcher jetzt nur noch e unbekannt geblieben ist, und berechnet diese letzte Größe. Das ist aber nichts anderes als die Abplattung. — Numerische Werte von e und ϱ_0 (das dort mit a bezeichnet wurde) wurden im ersten Kapitel, § 7, angegeben.

§ 6. Theorem von Clairaut. Formel für die Abnahme der Schwerkraft mit der Höhe.

Wir werden numerische Werte für die Koeffizienten der Formel 44 des vorigen Paragraphen später geben. Zuerst wollen wir gewisse Anwendungen dieser Formel und anderer Formeln des vorigen Paragraphen bringen. Nehmen wir zunächst die Formel 44 und beschränken uns auf kleine Größen erster Ordnung; wir vernachlässigen somit den Koeffizienten von $\sin^2 2\beta$ und das Produkt $m e$ und schreiben:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left[1 + \left(\tfrac{5}{2} m - e\right) \sin^2 \beta\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 50$$

Diese Formel kann als approximativer Ausdruck für die Schwerkraft in der Oberfläche eines wenig abgeplatteten Rotationsellipsoids oder irgendeines wenig abgeplatteten Rotationssphäroids gelten. Setzen wir darin einmal $\beta = 0$, ein andermal $\beta = \frac{\pi}{2}$, so werden wir auf diese Weise für den Äquator $\Gamma = \Gamma_0$, wie es sein soll, und für den Pol $\Gamma = \Gamma_{90} = \Gamma_0 \, [1 + (\frac{5}{2} m - e)]$ erhalten. Aus dieser letzten Formel folgt sofort:

$$e + \frac{\Gamma_{90^0} - \Gamma_0}{\Gamma_0} = \tfrac{5}{2} m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 51$$

Das ist die berühmte Formel von Clairaut, welche eine approximative Beziehung zwischen der Abplattung, der Zentrifugalkraft am Äquator, der Schwerkraft am Pol und der Schwerkraft am Äquator gibt.

Wir wollen noch eine Formel für die Abnahme der Schwerkraft mit der Höhe ableiten. Aus der Definition der Schwerkraft folgt:

$$\frac{d\Gamma}{dn} = \frac{d\Gamma}{d\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dn} = -\left[\frac{d^2 U}{d\varrho^2}\frac{d\varrho}{dn} + \frac{dU}{d\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dn}\right)\right]\frac{d\varrho}{dn} \quad . \quad . \quad 52$$

Da die Ausdrücke für $\frac{dU}{d\varrho}$ und $\frac{d\varrho}{dn}$ schon früher gegeben wurden, brauchen wir nur noch $\frac{d^2 U}{d\varrho^2}$. Man findet sofort:

$$\frac{d^2 U}{d\varrho^2} = A_0 \frac{d^2 S_0}{d\varrho^2} + \omega^2\left(1 - \frac{\varrho^2}{6 S_2}\frac{d^2 S_2}{d\varrho^2}\right) - \omega^2\left(1 - \frac{\varrho^2}{2 S_2}\frac{d^2 S_2}{d\varrho^2}\right)\sin^2\varphi; \quad 53$$

ferner findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dn}\right) &= \frac{\varrho\,(c^2 - \mu^2)}{(\varrho^2 - c^2)^{1/2}\,(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2 S_0}{d\varrho^2} &= -\frac{(2\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2\,(\varrho^2 - c^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2 S_2}{d\varrho^2} &= \frac{3}{c^5}\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+3}{2n+3}\,q^{2n+3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54$$

Aus leichten Rechnungen, wenn man noch Γ einführt, alle Glieder höherer Ordnungen, mit Gliedern von der Ordnung e^2 angefangen, vernachlässigt und zuletzt $\varrho = \varrho_0$ setzt, folgt:

$$\frac{d\Gamma}{dn} = -\frac{2}{\varrho}\,\Gamma\,(1 + m + e\cos^2\varphi)\,\frac{d\varrho}{dn}_{(\varrho = \varrho_0)} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55$$

Hierin haben wir noch φ durch β zu ersetzen, Γ aus der Formel 44, $\frac{d\varrho}{dn}$ aus der Formel 35 zu substituieren und Glieder höherer Ordnungen zu vernachlässigen. Nach allen diesen Operationen werden wir endlich die Formel:

$$\frac{d\Gamma}{dn} = -\frac{2}{\varrho_0}\Gamma_0\left[1 + m + e - (3e - \tfrac{5}{2}m)\sin^2\beta\right] \quad . \quad . \quad 56$$

erhalten.

Die numerischen Werte von Γ_0, m usw. entnehmen wir einer Abhandlung Helmerts*) und erhalten:

$$\frac{2\Gamma_0}{\varrho_0} = 0{,}00000306687, \quad 1 + m + e = 1{,}006821, \quad 3e - \tfrac{5}{2}m = 0{,}001389.$$

Alsdann folgt:

$$\frac{d\Gamma}{dn} = -0{,}000003069 + 0{,}000000004 \sin^2\beta. \quad . \quad . \quad 57$$

Wir haben diesen Ausdruck bereits im voraus im ersten Kapitel, Gleichung 48, benutzt.

§ 7. Abweichungen des Geoids vom Erdellipsoid.

Auf Grund der Gleichungen des § 5 ist es leicht, Formeln zur Bestimmung der Abweichungen des Geoids vom Erdellipsoid abzuleiten. Wir unterlassen es hier aber, da solche Formeln gegenwärtig ohne praktische Bedeutung sind. Den Leser, der sich darüber zu informieren wünscht, verweise ich auf meine Abhandlung im „Bulletin astronomique", Bd. XXII (1905), wo die Formeln von Bruns und Poincaré abgeleitet wurden. Soviel müssen wir aber sagen, daß jene Formeln, sowie die von Stokes und Helmert übereinstimmend zeigen, daß zur Berechnung der Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid die Kenntnis der lokalen Schwerkraft nicht ausreicht. Man muß die Schwerkraft in der ganzen Oberfläche des Geoids, oder wenigstens an zahlreichen, regelmäßig auf der ganzen Oberfläche der Erde verteilten Stationen, kennen. Die ehemals vielverbreitete Formel von Listing, nach welcher die Abweichung des Geoids vom Ellipsoid einfach proportional der Abweichung der Schwerkraft im Geoid von der

---

*) Helmert, Über die Reduktion usw. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Berlin 1903, S. 650—667.

Schwerkraft im Ellipsoid sein sollte, ist falsch und die Konsequenzen, die vor etwa 30 Jahren besonders von Ph. Fischer und von Borenius aus dieser Formel gezogen wurden, sind irrtümlich. Leider haben diese falschen Schlüsse Aufnahme in Lehrbücher gefunden, aus denen sie erst vor kurzem unter dem Einfluß der Lehren Helmerts verschwunden sind. Die genannten Autoren haben nämlich die positiven Anomalien der Schwerkraft auf ozeanischen Inseln arg mißdeutet. Borenius behauptete z. B., daß auf den Bonininseln das Geoid um 1400 m tiefer liegt als das Ellipsoid und an den Küsten der Kontinente um hunderte von Metern ansteigt. Indes haben synthetische Untersuchungen Helmerts gezeigt, daß die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid höchstens ± 200 m betragen können. Freilich hat Helmert dabei eine im Grunde willkürliche Annahme bezüglich der Konstitution der Erde gemacht: er hat angenommen, daß die Kontinente auf einer regelmäßig konzentrisch aufgebauten Erdkugel sitzen. Die Erfahrung lehrt aber, daß die Annahme Helmerts die obere Grenze der möglichen Abweichungen gibt, denn die Kontinente werden wahrscheinlich durch Dichtedefekte in tieferen Schichten zum Teil kompensiert. Auch sind die Messungen der Schwerkraft auf den Ozeanen von O. Hecker in dem Sinne zu deuten, daß das Geoid vom Ellipsoid nur wenig abweichen kann.

Zu den Messungen Heckers, ebenso zu der Kompensationsfrage werden wir etwas später zurückkehren. Hier müssen wir zuerst noch die Frage erwägen, ob die gegenwärtig vorhandenen Schweremessungen schon ausreichen, um die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid zu berechnen. Wir haben schon gesagt, daß zu diesem Zwecke theoretisch die Kenntnis der Schwerkraft im ganzen Meeresniveau erforderlich ist, praktisch aber die Kenntnis der Schwerkraft in zahlreichen diskreten, regelmäßig über die ganze Erde verteilten Punkten ausreicht. Die älteren Schweremessungen konzentrierten sich in den Kulturländern, außerdem haben in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts Sabine, Freycinet, Duperrey, Lüdke die Schwerkraft auf mehreren ozeanischen Inseln gemessen. Aber diese Messungen waren nicht besonders zahlreich und wegen der großen Anomalien, mit denen die Schwerkraft auf ozeanischen Inseln gewöhnlich behaftet ist, nicht gerade brauchbar. Daß die Anomalien der Schwerkraft auf ozeanischen Inseln die gelehrte Welt anfangs stutzig gemacht und zu falschen Theorien Anlaß gegeben haben, wurde schon erwähnt.

Die neueste Zeit brachte viele neue Messungen, nicht nur in Kulturländern, sondern auch in exotischen Gebieten. Große Verdienste haben sich die Offiziere der österreichischen Kriegsmarine erworben, welche sehr viele Schweremessungen an verschiedenen Küsten in verschiedenen Weltteilen ausgeführt haben. Am wichtigsten aber sind die Messungen Heckers (siehe unten) auf dem Meere, die endlich nicht die insulare, sondern die wahre ozeanische Schwerkraft gegeben haben.

Doch sind die Orte, an denen die Schwere gemessen wurde, so unregelmäßig auf der Erdoberfläche verteilt, daß eine Berechnung der Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid noch wenig Aussicht auf Erfolg hätte. Da andererseits die diesbezüglichen Rechnungen sehr lang und kompliziert sind, so ist nicht zu verwundern, daß diese Aufgabe bisher nicht in Angriff genommen wurde.

§ 8. Die Schwerkraft in der Oberfläche des Erdellipsoids.

In den letzten Paragraphen haben wir uns hauptsächlich mit theoretischen Fragen beschäftigt. Jetzt ist der Zeitpunkt gekommen, die Theorie durch einige Zahlenangaben zu illustrieren.

Wie gesagt, ist die dreigliedrige Formel 44 für die Schwerkraft im Ellipsoid mehr als hinreichend genau. Wie ihre Koeffizienten zu berechnen sind, haben wir bereits in § 5 erörtert. Es ist hier nicht der Ort, diese Rechnungen bis ins kleinste auszuführen; wir legen eine im Jahre 1901 von Helmert*) ausgeführte Berechnung zugrunde.

Ausschließlich aus Schweremessungen auf dem Lande hat Helmert gefunden, daß

$$\Gamma = 978{,}046\,[1 + 0{,}005\,302 \sin^2\beta - 0{,}000\,007 \sin^2 2\beta] \text{ cm per Sek.}^2 \qquad 58$$

Mit der Formel 44 verglichen, ergibt Formel 58 Folgendes:

die Schwerkraft am Äquator $\Gamma_0 = 978{,}046$ cm per Sek.²

und

$$\tfrac{5}{2}\, m - e - \tfrac{17}{14}\, m\, e = 0{,}005\,302.$$

Nimmt man mit Helmert $m = 0{,}0034677$ an, so folgt:

$$e = 1 : 298{,}25 \text{ und } \frac{e}{8}(5\,m - e) = 0{,}000\,006.$$

*) Helmert, Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Berlin 1901, S. 328–336.

Indes hat Helmert als Koeffizienten von $\sin^2 2\beta$ nicht 0,000006, sondern 0,000007 gesetzt. Dies erklärt sich dadurch, daß Helmert seinen Koeffizienten einer Theorie Wiecherts entlehnt hat. Warum der Wiechert-Helmertsche Koeffizient etwas größer ist wie der unsere, brauchen wir nicht auseinanderzusetzen, weil das ganze Glied mit $\sin^2 2\beta$ von sekundärem Einfluß auf die Γ-Werte ist. Wir müssen aber hervorheben, daß die Methode, deren sich Helmert bedient hat, mit der in § 5 dieses Kapitels skizzierten Methode zwar nicht identisch, doch annähernd äquivalent ist.

Die Differenzen $\gamma - \Gamma$, zwischen der wirklichen Schwerkraft im Meeresniveau und der theoretischen, heißen Schwereanomalien. Wohlverstanden sind diese Anomalien innerhalb gewisser Grenzen unsicher, und zwar nicht nur infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, welche die γ-Werte beeinflußen, sondern auch deswegen, weil die Γ-Werte noch nicht vollkommen sicher sind. Die Koeffizienten der Formel 58 sind noch nicht endgültig festgestellt. Im Jahre 1884, als noch viel weniger Schweremessungen als jetzt vorhanden waren, hat Helmert die Formel:

$$\Gamma = 978{,}000\,(1 + 0{,}00531 \sin^2\beta) \text{ cm per Sek.}^2, \quad . \quad . \quad . \quad 59$$

im Jahre 1901 die Formel 58 angegeben. Hoffentlich wird man in 20 Jahren Formeln angeben, die von der Formel Helmerts von 1901 weniger verschieden sein werden, wie die Formel von 1884 von der Formel von 1901, doch kann man nicht verbürgen, daß die Formel 58 gar keine Änderung erfahren wird.

Das aber ist sicher, daß große ausgeprägte Anomalien nicht verschwinden oder etwa das Vorzeichen ändern werden. Höchstens kann es geschehen, daß bei einer Neuberechnung diese oder jene Anomalie etwas vergrößert oder vermindert wird. Wir meinen natürlich Anomalien, welche auf guten, verläßlichen Messungen beruhen. Diese Bemerkung ist nicht überflüssig. Die viel besprochenen sehr großen negativen Anomalien, die Basevi und Heaviside seinerzeit im Himalaja gefunden haben, wurden durch neuere Messungen von Lenox Conyngham nur teilweise bestätigt; in Dehra Dun hat Conyngham gleich wie Basevi eine negative, aber numerisch um die Hälfte kleinere Anomalie*) gefunden.

---

*) S. G. Burrard, On the Intensity and Direction of the Force of Gravity in India. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A., Bd. 205, S. 289—318.

Hiermit haben wir einen Punkt berührt, bei dem wir etwas länger verweilen müssen.

Die Anomalien der Schwerkraft sind nicht zufällig: sie haben einen systematischen Charakter, es gibt Gebiete, wo negative, andere, wo positive Anomalien überwiegen. Negative Anomalien sind im Gebirge häufig, während positive auf ozeanischen Inseln und in Niederungen vorkommen.

Noch in den dreißiger Jahren des 18. Jahrhunderts hat Bouguer in Peru (gegenwärtig gehört dieses Territorium zur Republik Ecuador) wider Erwarten bemerkt, daß der Chimborasso und andere Bergriesen in den Anden das Lot nicht anziehen. Ähnliche Erfahrungen hat man auch anderswo (z. B. Petit in Toulouse) gemacht, doch blieben diese Beobachtungen unbeachtet, bis es sich um die Mitte des 19. Jahrhunderts bei geodätischen Messungen in Indien herausstellte, daß der Himalaja so gut wie keine Lotablenkungen in der Gangesebene erzeugt. Pratt trat damals mit der Hypothese auf, daß der Himalaja und andere Bergketten durch Massendefekte innerhalb und unterhalb der Gebirge kompensiert sind.

Schweremessungen haben gezeigt, daß im Gebirge negative Anomalien vorwiegen. So z. B. hat v. Sterneck gefunden, daß in den

österreichischen Alpen im Mittel . $\gamma - \Gamma = -0{,}120$ cm per Sek.^{2}
und in den Karpathen . . . . . $\gamma - \Gamma = -0{,}060$ „ „ „

Ebenfalls negative Anomalien haben die neuesten Schweremessungen*) im Himalaja ergeben. Auf der Station Sandakphu (27^0 6′ nördl. Br., 88^0 0′ östl. L. v. Gr.) in 3589 m Höhe über dem Meeresspiegel erreicht $\gamma - \Gamma$ den Wert $-0{,}150$ cm. Auch in anderen Gebirgen, ferner auf gewissen Hochebenen, z. B. auf der bayrischen, hat man ein Überwiegen negativer Anomalien konstatiert. Wir sagen ausdrücklich: „ein Überwiegen“, denn an einzelnen Stationen können positive Anomalien vorkommen, erst wenn man die Mittel aus Schweremessungen an zahlreichen Stationen bildet, tritt die Regel hervor. Unwillkürlich drängt sich die Hypothese auf, daß die Gebirge oder ihre Unterlagen oder beide zusammen aus leichteren Gesteinen wie die übrige Erdkruste aufgebaut sind. Doch ein Versuch, die Dichte, die Lage und die Aus-

---

*) Lenox Conyngham, Major G. P., The recent Pendulum Observations in India, Monthly Notices R. A. S. Bd. LXIX (1909), S. 383–392.

dehnung der Dichtedefekte aus der Verteilung der Schwerkraftanomalien zu bestimmen, wäre aussichtslos. Man braucht sich nur an einen der Fundamentalsätze der Attraktionstheorie zu erinnern, nämlich, daß eine und dieselbe Verteilung der Anziehungskraft in der Oberfläche (man vergleiche § 10 im ersten Kapitel) durch unendlich viele Massenverteilungen im Innern des Körpers erzeugt werden kann. Man kann somit nur mehr oder weniger plausible Vermutungen über die Lage und Ausdehnung der Massendefekte aussprechen, und wenn man von der Dicke der sogenannten kompensierenden Schicht spricht, so ist dies nichts weiter als ein bequemes Versinnlichungsmittel der Schwereanomalie. Die Anziehung einer unendlich ausgedehnten horizontalen Platte auf einen oberhalb derselben gelegenen Punkt ist: $\frac{3}{2} g \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_m}$, wo g wie gewöhnlich die Schwerkraft, R den mittleren Erdradius, h die Dicke der Platte, ϱ_m die mittlere Dichte der Erde, ϱ die Dichte der Platte bedeutet. Setzt man $\frac{\varrho}{\varrho_m} = \frac{1}{2}$, $R = 6\,370\,000$ m und $g = 978$ cm, so ist die Anziehung der Platte in Zentimetern $0{,}00011515\, h$, wenn h in Metern ausgedrückt wird.

Soeben haben wir angegeben, daß in Sandakphu $\gamma - \Gamma = -0{,}150$ cm; diese Anomalie ist äquivalent der Anziehung einer Platte von der Dicke $h = -\frac{0{,}150}{0{,}00011515} = -1303$ m; man kann sich also denken, daß unter Sandakphu ein der genannten Schicht äquivalenter Massendefekt existiert. Es ist eine zwar rohe und bei weitem nicht genaue, aber greifbare Vorstellung. Im besprochenen Falle ist die Dicke der Idealschicht (1303 m) nur nahe ein Drittel der Höhe der Station (3589 m) über dem Meeresspiegel. Wenn man dann sagt, daß die sichtbaren Massen nur teilweise, gegebenenfalls im Betrage von ungefähr 36 Proz., kompensiert sind, so ist das eigentlich nur eine Redensart. Im Gebirge scheint eine teilweise Kompensation (im erwähnten Sinne) die Regel zu sein.

Fragen wir uns jetzt, wie sich die Verhältnisse auf dem Ozean gestalten. Hier haben wir eine einige Kilometer dicke Wasserschicht, deren Dichte (ungefähr 1,03) weit unterhalb der Dichte der Gesteine der Erdkruste (2,2—2,8) liegt. Ohne Kompensation durch Dichteüberschuß in den Schichten unter dem Meeresboden würde also die Schwerkraft auf dem Ozean überall kleiner sein als auf dem Lande in derselben geographischen Breite; indes

zeigt die Erfahrung, daß durchschnittlich die ozeanische Schwerkraft der kontinentalen gleich ist.

Die Erfahrung, von der wir sprechen, ist ganz neuen Datums. Das Pendel kann nur über einer unbeweglichen Unterlage schwingen, auf einem Schiffe kann es nicht verwendet werden. Von W. Siemens mit seinem „Bathometer“ 1875 angestellte Versuche führten zu keinem befriedigenden Resultat. Die ersten Messungen der Schwerkraft auf dem Meere wurden in den Jahren 1894, 1895 und 1896 von Leutnant Scott Hansen, einem Gefährten Nansens, teils auf dem ins Eis eingefrorenen Schiffe „Fram“, teils auf dem Eise ausgeführt. Da bei diesen Beobachtungen der Ort, wo beobachtet wurde, immer nahezu im Meeresspiegel lag, kann man die beobachtete Schwerkraft g ohne weiteres mit der theoretischen Schwerkraft Γ vergleichen, um so mehr, als die Korrektion f mitten im Meere meist sehr klein ist. Prof. O. E. Schiötz*), der die Beobachtungon Scott Hansens berechnet und diskutiert hat, verwendet die ältere Formel Helmerts von 1884, die hier als Formel 59 bezeichnet wurde. Die neue Formel Helmerts wurde erst nach der Publikation der Abhandlung Schiötzs veröffentlicht. — Aus den Daten Schiötzs sieht man, daß im nördlichen Polarmeere die Anomalie der Schwerkraft zwischen — 0,064 cm und + 0,101 cm schwankte; bildet man aber das Mittel aus allen 14 Beobachtungen (Beobachtungen mit beiden Pendeln werden doppelt gezählt), so findet man eine mittlere Schwereanomalie von + 0,015 cm. Also nicht zu klein, eher etwas zu groß ist die Schwerkraft im nördlichen Polarmeere.

Bei weitem wichtiger sind die zahlreichen Schweremessungen Heckers**) auf dem Atlantischen Ozean im Jahre 1901 und auf dem Pazifischen und Indischen Ozean in den Jahren 1904 und 1905. — Als Meßinstrumente verwendete Hecker eine Kombination des Siedethermometers mit dem Quecksilberbarometer. Bekanntlich hängt die Siedetemperatur des Wassers vom Luftdruck oder mit anderen Worten vom Produkt gh ab, wo g die Schwerkraft und h die Höhe

---

*) O. E. Schiötz, The Norwegian North Polar Expedition 1893—96, VIII, Results of the Pendulum Observations, Christiania 1900. Vergl. S. 60. Wegen ungünstiger Bedingungen sind diese Polarmessungen nicht besonders verläßlich.

**) O. Hecker, Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean. Veröffentlichungen des Königl. Preuß. Geod. Instit. Nr. 11, Berlin 1903. Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Großen Ozean. Ibidem Nr. 16, Berlin 1908.

der Quecksilbersäule im Barometer bedeutet. Folglich kann man umgekehrt aus der Siedetemperatur des Wassers das Produkt gh bestimmen. Liest man noch gleichzeitig die Höhe der Quecksilbersäule am Barometer ab, so kann g sofort bestimmt werden.

So einfach im Prinzip diese Methode ist, so schwierig ist ihre praktische Ausführung. Die Beobachtungen, insbesondere auf einem Schiffe, stoßen auf zahlreiche technische Schwierigkeiten. Auf dieselben einzugehen, ist hier nicht der Ort; so viel dürfen wir aber sagen, daß Hecker den mittleren Fehler seiner Schwerkraftbestimmungen auf dem Meere mit Siedethermometer und Barometer auf $\pm$ 0,031 cm und den mittleren Fehler seiner Pendelbeobachtungen auf dem Lande auf $\pm$ 0,0014 cm berechnet.

Die Resultate seiner Messungen hat Hecker mit der Formel Helmerts von 1901 verglichen. Im Atlantischen Ozean, auf der Route Lissabon—Bahia, hat Hecker über großen Tiefen eine im großen und ganzen nahezu normale Schwerkraft gefunden, auf der Flachsee überwogen positive Anomalien, so daß die Flachsee gegen die Tiefsee einen Schwereüberschuß von $+ 0{,}028 \pm 0{,}018$ cm aufwies. Das Gesagte gilt nur von den Mitteln, denn einzelne Messungen verhielten sich verschieden; doch darf man deshalb nicht etwa glauben, daß positive und negative Anomalien ganz unregelmäßig wechselten; es war im Gegenteil ein systematischer Gang, eine Abhängigkeit von der geographischen Lage nicht zu verkennen. So sehen wir über dem Äquatorialrücken in der Nähe der St. Pauls-Insel und über der Tiefsee nördlich davon nur positive Anomalien, während zwischen den Kanarischen und den Kapverdischen Inseln negative Anomalien deutlich überwiegen.

Ähnliche Resultate hat die Reise Heckers im Jahre 1904 und 1905 gebracht: es zeigte sich, daß die Schwerkraft ebenso auf dem Großen wie auf dem Indischen Ozean der Formel Helmerts von 1901 annähernd entspricht; aber im einzelnen ergaben sich starke positive Anomalien im Golfe von Aden und in der Nähe der Insel Sokotra, dann in den ceylonischen Gewässern in der Nähe von Colombo, in der Nähe der Südwestspitze von Australien, über dem Tongaplateau und nahe den Hawai-Inseln, wo sie den Betrag von 0,250 cm erreichten und übertrafen. Dagegen besteht eine große negative Anomalie von ungefähr demselben Betrag über der tiefen Tongarinne und eine kleinere aber weitausgedehnte über der Tiefsee zwischen den Hawai-Inseln und Kalifornien. — Im Mittelmeer hat Hecker meist kleine negative, im Roten Meer meist kleine

positive Anomalien gefunden, was mit den schon früher von A. v. Triulzi an den Küsten dieses Meeres gefundenen positiven Anomalien gut übereinstimmt. Übrigens haben wir vergessen zu sagen, daß der positiven Anomalie in den Gewässern von Hawai eine bedeutende positive Anomalie auf den Inseln selbst zur Seite steht.

Auf diese Weise ist die Kompensationshypothese Pratts in großen Zügen bestätigt worden: Dichtedefekte befinden sich unter den Gebirgen, Dichteüberschüsse unter den Meeren. Schwer fällt ins Gewicht die merkwürdige Tatsache, daß die Formel Helmerts, obwohl aus kontinentalen Schweremessungen berechnet, auch der ozeanischen Schwerkraft ziemlich gut entspricht. Doch scheint die Kompensation im allgemeinen unvollständig und unregelmäßig zu sein.

Wir müssen noch einige Worte über die Schwereanomalien auf Inseln sagen. Große kontinentale Inseln verhalten sich wie die Kontinente, d. h. sie neigen eher zu negativen als zu positiven Anomalien. Ganz anders verhalten sich die kleinen ozeanischen Inseln: sie weisen in der Regel bedeutende Schwereüberschüsse auf. Auf jenen Inseln, auf denen die Schwerkraft noch in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, also mit weniger vollkommenen Mitteln gemessen wurde, ist zuweilen der Betrag des Überschusses nicht ganz sicher, doch darf das Vorhandensein bedeutender positiver Schwereanomalien auf den ozeanischen Inseln als eine im allgemeinen sichergestellte Tatsache gelten. Zu welchen falschen Schlüssen diese Anomalien Anlaß gegeben haben, wurde schon im § 7 erwähnt. Hier dürfen wir die richtige, zuerst vom französischen Astronomen Faye gegebene Erklärung derselben anführen. Dieselbe gipfelt in dem Satze, daß die Schwerkraft auf einer ozeanischen Insel größer als die ozeanische Schwerkraft sein darf, nämlich um den Überschuß der Anziehung des unterseeischen Sockels der Insel über die Anziehung des gleichen Volumens Seewasser. Ist also die Schwere auf dem umgebenden Ozean normal, so muß die Schwerkraft auf der Insel um den ganzen genannten Überschuß der Anziehung des Sockels die normale Schwere überwiegen. Daraus folgt die Regel, daß man den Überschuß der Anziehung des unterseeischen Sockels der Insel über die Anziehung des gleichen Volumens Seewasser von der insularen Schwerkraft abziehen muß, um die ozeanische Schwerkraft zu erhalten. Faye selbst hat diese Regel auf einige Fälle angewendet und gezeigt,

daß die resultierende ozeanische Schwerkraft der normalen nahe kommt. Das beweist aber, daß die ozeanischen Inseln durch Dichtedefekte in der darunterliegenden Erdkruste gar nicht oder nur wenig kompensiert werden. Bei Koralleninseln darf man übrigens keine Kompensation erwarten. Ein Korallenriff besteht aus Kalk, welcher nicht den darunterliegenden Schichten der Erdkruste, sondern dem Meerwasser entnommen wurde, er wächst nicht aus, sondern auf dem Meeresboden.

In der Geodäsie und in der Astronomie bedient man sich verschiedener Formeln, die sich auf die Voraussetzung, das Meeresniveau sei ein Ellipsoid, gründen. Weil aber diese Voraussetzung nicht streng erfüllt ist, kommen verschiedene Diskrepanzen vor. So können z. B. wenn man eine Station, sagen wir *B*, mit einer andern Station *A*, deren geographische Koordinaten bekannt sind, mittels einer Triangulation verbindet, die geographischen Koordinaten von *B* aus den geographischen Koordinaten von *A* berechnet werden. Andererseits kann man die geographischen Koordinaten von *B* (d. h. die geographische Breite und Länge) direkt durch astronomische Beobachtungen bestimmen. Nun stimmen geodätisch und astronomisch bestimmte Koordinaten gewöhnlich nicht überein. Die Differenzen sind klein, sie betragen nur Sekunden (20″ ist eine große Differenz), doch liegen sie größtenteils außerhalb der Grenzen der möglichen Fehler. Diese Differenzen werden Lotabweichungen genannt, indem sie tatsächlich nichts anderes sind als Winkel zwischen dem Lote (d. i. der Normale zum Geoid) und der Normale zum Referenzellipsoid. Vor kurzem hat Hayford*) die Lotabweichungen in den Vereinigten Staaten Nordamerikas einer eingehenden Diskussion unterworfen und gezeigt, daß eine Erklärung derselben durch die Anziehung sichtbarer Erhebungen und die zu geringe Anziehung des Meeres zu keinem befriedigenden Resultate führt. Bessere Resultate werden durch die Annahme erzielt, daß sichtbare Höhen durch Dichtedefekte und das Meer durch Dichteüberschüsse kompensiert sind. Hayford hat nämlich die Frage folgendermaßen gestellt. Er betrachtet die Hauptachsen und die Abplattung als vorderhand unbekannt und bestimmt sie aus der Bedingung, daß die Summe der Quadrate der Lotabweichungen im Meridian und im ersten Vertikalkreis

---

*) Hayford, The Figure of the Earth and Isostasy. Coast and Geod. Survey, Washington 1909.

so klein als möglich ausfalle. Bei der Hypothese, daß die Lotabweichungen nur von den sichtbaren Reliefformen abhängen, bekam Hayford eine zu grosse Abplattung und eine zu große Äquatorialhalbachse — nämlich den Wert: $\frac{1}{268,7}$ für die erstere und 6383096 m für die letztere. Gleichzeitig war die Quadratsumme der Residua noch recht bedeutend. Bessere Resultate erhielt Hayford als er zur Hypothese einer vollkommenen Kompensation (Isostasie) überging. Er denkt sich in einer gewissen Tiefe eine zum Meeresniveau parallele Fläche; vom Erdzentrum bis zu dieser Fläche sind die Flächen gleicher Dichte identisch mit den Niveauflächen, oberhalb der genannten Fläche, die als Kompensationsfläche (Ausgleichsfläche) bezeichnet wird, ist die Dichte in verschiedenen bis zur Erdoberfläche reichenden Säulen verschieden. In kontinentalen Gebieten, wo die Säulen höher sind, enthalten sie gleichmäßig von der Kompensationsfläche bis zum Meeresniveau verteilte Dichtedefekte, unter dem Meere, wo sie kürzer sind, enthalten sie gleichmäßig verteilte Dichteüberschüsse, aber immer so, daß zwei Säulen mit gleichem Querschnitt dieselbe Masse enthalten, wobei das Meerwasser mitgerechnet wird. Es ist klar, daß auf diese Weise alle Säulen sich in der Kompensationsfläche das Gleichgewicht halten.

Es hat sich gezeigt, daß bei einer Kompensationstiefe von 113,7 km (d. h. wenn die Kompensationsfläche 113,7 km unter dem Meeresniveau liegt) die besten Resultate erzielt werden: die Quadratsumme der Residua ist achtmal so klein als im vorigen Falle, gleichzeitig stimmen die Abplattung und die äquatoriale Halbachse mit den besten Werten sehr gut überein; man erhält nämlich:

$$e = \frac{1}{297,8}, \quad a = 6\,378\,282 \text{ m}.$$

Aber auch eine Kompensationstiefe von 120,9 km und eine von 162,2 km, folglich auch alle zwischenliegenden Werte, liefern beinahe ebenso gute Resultate. Auch gibt die Hypothese einer kompensierenden Schicht zwischen 43,5 und 59,5 km Tiefe und einige andere Hypothesen ebenso gute, vielleicht noch bessere Resultate. Alle diese Hypothesen haben nur das gemein, daß die Kompensation immer vollständig ist, d. h. alle Säulen von gleichem Querschnitt auch gleiche Masse haben. Nach dem, was auf S. 67 gesagt wurde, erscheint dieses Resultat gar nicht wunderbar.

Daß die Resultate der Untersuchungen Hayfords zugunsten der Kompensationshypothese sprechen, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden. Dagegen wird es am Platze sein zu sagen, daß nicht nur das Gebiet, auf welches sie sich beziehen, sehr ausgedehnt, sondern auch das Beobachtungsmaterial, auf welches sie sich stützen, sehr groß ist. Um eine Idee von dem Umfange des Materials zu geben, führen wir an, daß Hayford über 257 astronomische Breitenbestimmungen und über 246 astronomische Längenbestimmungen verfügte.

Diese Resultate wurden übrigens durch eine mit einer anderen Methode ausgeführte Untersuchung Helmerts*) bestätigt. Aus den Störungen der Schwerebeschleunigung an den Steilküsten der Ozeane fand er für die Tiefe der Kompensationsfläche:

$$118 \pm 22 \text{ km}.$$

Drittes Kapitel.

Bestimmung der Gestalt der Erde aus geodätischen Messungen.

§ 1. Meridiangradmessung.

Die Gestalt der Erde wäre sehr leicht aus geodätischen Messungen zu bestimmen, wenn die physische Erdoberfläche die Gestalt einer regulären geometrischen Figur, z. B. eines Rotationsellipsoids hätte. Fassen wir zuerst diesen einfachen Fall ins Auge.

Am einfachsten gestaltet sich die Aufgabe, wenn man einen Bogen eines Meridians mißt. Es seien ds das Element eines Meridianbogens, β die geographische Breite, R der Krümmungsradius, a die größere, b die kleinere Halbachse der Meridianellipse und ε endlich die sogenannte Exzentrizität, wobei

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

*) Helmert, Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Prattschen Hypothese. Sitzungsberichte der Akademie der Wissensch., Berlin, XLVIII (1909), S. 1192—1198.

Man hat dann die bekannte Relation:

$$R = \frac{ds}{d\beta} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{[1-\varepsilon^2 \sin^2 \beta]^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

Denken wir uns, daß zwei kurze Meridianbogen gemessen und daß die geographischen Breiten β_1 und β_2 der Mittelpunkte dieser Bogen astronomisch bestimmt wurden, so können wir schreiben:

$$R_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{[1-\varepsilon^2 \sin^2 \beta_1]^{3/2}}, \quad R_2 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{[1-\varepsilon^2 \sin^2 \beta_2]^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen a, so folgt:

$$\varepsilon^2 = \frac{R_1^{2/3} - R_2^{2/3}}{R_1^{2/3} \sin^2 \beta_1 - R_2^{2/3} \sin^2 \beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Nachdem ε^2 aus der Gleichung 3 bestimmt worden ist, kann man a aus der ersten oder der zweiten Gleichung 2 bestimmen.

Die in der Gleichung 3 auftretenden Werte von R_1 und R_2 kann man aus Gleichung 1 bekommen; man kann nämlich näherungsweise

$$R_1 = \frac{\triangle s_1}{\triangle \beta_1}, \quad R_2 = \frac{\triangle s_2}{\triangle \beta_2}$$

setzen, worin $\triangle s_1$ und $\triangle s_2$ die Längen der gemessenen Bogen, $\triangle \beta_1$ und $\triangle \beta_2$ die Differenzen der Breiten der Endpunkte der Bogen bedeuten. Wohlverstanden sind die soeben geschriebenen approximativen Gleichungen um so exakter, je kürzer die gemessenen Bogen sind.

Im Zähler und Nenner der Gleichung 3 haben wir Differenzen; der Wert von ε^2 wird ceteris paribus um so exakter sein, je größer die Differenz im Nenner ist. Es ist klar, daß diese Differenz ihren größten Wert dann erreicht, wenn $\beta_1 = 90^0$ und $\beta_2 = 0$ ist, d. h. wenn ein Bogen am Pol, der andere am Äquator gemessen wird. Das war der Grund, welcher die Pariser Akademie, als sie in den dreißiger Jahren des 18. Jahrhunderts den Streit bezüglich der wahren Gestalt der Erde entscheiden wollte, eine Meridiangradmessung in Peru (heute gehört das Gebiet, wo der Meridianbogen gemessen wurde, zur Republik Ecuador), eine andere in Lappland zu unternehmen veranlaßte. Dieses Unternehmen wurde in den letzten Jahren wiederholt. Russen und Schweden haben 1899 bis 1901 einen Meridianbogen in Spitzbergen und die Franzosen 1901—1906 einen Meridianbogen in Ecuador gemessen.

Auf die Genauigkeit von a hat die Wahl des Ortes der Messung so gut wie keinen direkten, wohl aber einen indirekten Einfluß, nämlich durch das Auftreten von ε in den Rechnungen.

Aus der Gleichung 1 können wir sofort genaue Formeln für Bogen endlicher Länge ableiten. Wir bezeichnen die Breiten der Endpunkte des Bogens mit β' und β'' und erhalten:

$$s = a\,(1-\varepsilon^2)\int_{\beta'}^{\beta''}\frac{d\beta}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

Um eine rasch konvergierende Reihe zu erhalten, ist es ratsam, statt ε^2 eine neue Konstante:

$$n = \frac{a-b}{a+b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

einzuführen *). Dann verwandelt sich 4 in

$$s = b\,(1+n)\,(1-n^2)\int_{\beta'}^{\beta''}[1+2n\cos 2\beta+n^2]^{-3/2}\,d\beta \quad . \quad . \quad 4'$$

Nun ist aber:

$$\left.\begin{aligned}[1+2n\cos 2\beta+n^2]^{-3/2} &= 1+\frac{3^2}{2^2}n^2+\frac{3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2}n^4+\dots\\ &\quad-\cos 2\beta\left[3n+\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 2}n^3+\dots\right]\\ &\quad+\cos 4\beta\left[\frac{3\cdot 5}{2^2}n^2+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}n^4+\dots\right]\\ &\quad-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}\right\}\ 6$$

Nach Einsetzen dieses Wertes in 4′ und nach ausgeführter Integration kann man alle Potenzen über n^3 weglassen und die Differenzen trigonometrischer Funktionen in trigonometrische Funktionen der Summen und Differenzen der Argumente verwandeln. Auf diese Weise erhält man aus 4′ die Formel:

$$\begin{aligned}\frac{s}{b} &= (1+n+\tfrac{5}{4}n^2+\tfrac{5}{4}n^3)\,(\beta''-\beta')\\ &\quad-(3n+3n^2+\tfrac{21}{8}n^3)\sin(\beta''-\beta')\cos(\beta''+\beta')\\ &\quad+\tfrac{15}{8}(n^2+n^3)\sin 2(\beta''-\beta')\cos 2(\beta''+\beta')\\ &\quad-\tfrac{35}{24}n^3\sin 3(\beta''-\beta')\cos 3(\beta''+\beta'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß im ersten Gliede rechts die Differenz der Breiten **), $\beta''-\beta'$, im Bogenmaß auszudrücken ist. Wegen des

---

*) Aus Gleichung 5 folgt sofort:

$$\varepsilon^2 = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

**) Die Breiten β' und β'' der Endpunkte müssen astronomisch bestimmt werden.

kleinen Wertes von n $\left(\text{ungefähr } \frac{1}{600}\right)$ konvergiert die Reihe 6 sehr rasch und unser auf die Glieder mit n^3 beschränkter Ausdruck 7 ist noch zu genau für praktische Zwecke. Um dem Leser eine Vorstellung von der Genauigkeit der Formel 7 zu geben, führen wir folgendes Beispiel an: Es sei ein Bogen von ungefähr 25^0 gegeben (also $\beta'' - \beta' = 25^0$). Berechnet man dessen Länge in Kilometern (ungefähr 2780 km) einmal mit Hilfe der Formel 7 und ein zweites Mal mit Hilfe derselben Formel, aber mit Fortlassung der Glieder mit n^3, so wird ein Resultat vom anderen höchstens um 2—3 cm verschieden sein.

Hat man zwei gemessene Bogen s_1 und s_2, so hat man zwei Gleichungen zur Bestimmung von b und n. Nach Elimination von b erhält man eine kubische Gleichung für n^3, die wenigstens eine positive und reelle Wurzel haben muß*). Da n eine sehr kleine und dazu näherungsweise bekannte Größe ist, so lohnt es sich nicht, die Gleichung für n nach den allgemeinen Methoden aufzulösen. Es geschieht dies vielmehr durch sukzessive Näherungen, d. h. man setzt anfangs für n^2 und n^3 genäherte Werte ein und wandelt die Gleichung in eine lineare um usw. Nachdem man n berechnet hat, ist die Berechnung von b aus der Gleichung 7 ein leichtes.

Die Gleichung 7 wird bei der Berechnung der irdischen Meridianbogen tatsächlich benutzt. Man nimmt an, daß das Geoid sich nur wenig vom Rotationsellipsoid unterscheidet**), und wendet die für das Ellipsoid gültigen Formeln auf das Geoid an. Daraus aber entspringen zwei Konsequenzen. Erstens, da die Messungen in der physischen Oberfläche ausgeführt und die Formeln auf das Geoid angewandt werden, müssen die Messungen auf das Meeresniveau reduziert werden. Zweitens, um sich vom Einfluß lokaler Unregelmäßigkeiten des Geoids zu befreien, muß man mehrere Bogen in verschiedenen Weltteilen und in verschiedenen Breiten ausmessen. Ein regelmäßiges, engmaschiges, über die ganze Erde ausgebreitetes Netz von geodätischen Messungen würde den theoretischen Forderungen am besten entsprechen. Doch wird ein solches Netz für immer ein Ideal bleiben, da mehr als zwei Drittel der Erdoberfläche vom Meere bedeckt sind.

---

*) Hat sie aber drei reelle positive Wurzeln, so hat nur eine derselben eine physische Bedeutung.

**) Bekanntlich ist diese Annahme gerechtfertigt.

Mit mehreren Bogen kann man mehr als zwei Gleichungen 7 aufstellen. Übrigens kann man auch einen längeren Bogen in mehrere kleinere zerteilen, wenn nur Stationen, wo die geographische Breite astronomisch gemessen wurde, in entsprechender Zahl vorhanden sind. Kurz und gut ist ein Geodät, insbesondere aber ein Geodät des 20. Jahrhunderts, in der Lage, über sehr viele Gleichungen zu verfügen. Da nur zwei Unbekannte n und b zu bestimmen sind, wendet er die Methode der kleinsten Quadrate an.

Auf die Einzelheiten der Theorie geodätischer Messungen können wir hier nicht eingehen, wir wollen aber nicht unterlassen, die hauptsächlichen Operationen, Reduktionen und Rechnungen, die zu einer Meridianbogenmessung gehören, kurz zu skizzieren.

§ 2. **Basismessung. Basisapparate.**

Längere Bogen werden mit Hilfe der Triangulation gemessen. Direkt mit Meßstangen bezw. Meßbändern mißt man nur kurze Linien, sogenannte Grundlinien oder Basen. Von hervorragender Wichtigkeit ist die Wahl der Örtlichkeit für die Basis. Die ganze Länge derselben soll übersichtlich sein, der Boden fest und überall zugänglich, möglichst wagrecht und eben. Die Enden müssen gut mit Hauptpunkten der Triangulation durch wohlgeformte Dreiecke verbunden, Winkelinstrumente müssen in den Endpunkten aufgestellt werden können. Es ist ferner erforderlich, wenigstens an einem Endpunkte astronomische Bestimmungen vornehmen zu können, um die Lage gegen den Vermessungsmeridian mit großer Genauigkeit festzulegen. Die Endpunkte der Basis werden durch feine, mit einem Kreis umgebene Punkte auf Metallplatten bezeichnet, die selbst in festen gemauerten Pfeilern sitzen. Gegen die Witterung werden die Metallplatten durch passende Bedachung geschützt.

Die Basis muß mit der größten Genauigkeit gemessen werden, da ein bei der Messung der Basis begangener Fehler das ganze Dreiecksnetz beeinflußt. Hat man bei der Messung der Basis einen Fehler begangen, sagen wir, die Basis um ein Hunderttausendstel ihrer Länge zu groß gefunden, so werden alle Dreiecksseiten und der Meridianbogen um ein Hunderttausendstel ihrer Länge zu groß sein*). — Im 18. Jahrhundert hat man noch mit Holzstangen gemessen, in Lappland legte man die Stangen auf den Schnee.

*) Zur Kontrolle pflegt man in einem Dreiecksnetz wenigstens zwei Grundlinien zu messen.

Gegenwärtig verwendet man Metallstangen mit einem H förmigen Querschnitt, um der Biegung so weit als möglich vorzubeugen. Man legt die Stangen auf besondere Stative, umhüllt sie mit Stoffen und schließt sie in längliche Kasten ein, um sie vor Beschädigung und vor jähen Temperaturänderungen zu schützen. Außerdem wird die Temperatur der Stangen beständig kontrolliert, ihre Ausdehnungskoeffizienten werden aufs sorgfältigste an den Stangen selbst bestimmt. Es gibt Basisapparate mit zwei Stangen, die aneinander gelegt werden. Um Stöße, Druck usw. zu vermeiden, läßt man gewöhnlich einen gewissen freien Raum zwischen den Enden der Stangen, dessen Breite mit besonderen Meßkeilen gemessen wird. In anderen Apparaten, nämlich in solchen, in denen die eigentlichen Längenmaße mit Strichen bezeichnet sind, hat man besondere Vorrichtungen, um die Distanz zwischen den Strichen beider Stangen auszumessen. Es gibt auch Basisapparate mit nur einer Meßstange; spezielle Vorkehrungen werden getroffen, um die Lage der Striche zu fixieren, während die Meßstange um ihre eigene Länge weiterbefördert wird. — Kurz und gut: alle Mittel, welche die feinste moderne Technik bietet, werden verwendet, um die Genauigkeit der Messung bis zur äußersten Grenze zu steigern. Behufs Kontrolle pflegt man eine Basis immer zweimal zu messen, einmal in einer, ein zweites Mal in der entgegengesetzten Richtung. Tatsächlich erreicht man jetzt eine große Genauigkeit: bei den neueren Messungen beträgt der mittlere Fehler der Messung gewöhnlich nicht mehr als ein Milliontel der Basislänge, oft erzielt man noch bessere Resultate.

Es ist klar, daß solche Messungen sehr umständlich, zeitraubend und kostspielig sind. Infolgedessen, ferner infolge der Schwierigkeit, große geeignete Grundstücke zu finden, können die mit Metallstangen gemessenen Grundlinien nicht sehr lang gemacht werden. Eine Basis von 12 bis 15 km Länge gilt schon als lang, eine von 20 km Länge*) ist eine Ausnahme. Viel längere Grundlinien kann man mit dem Jäderinschen Apparate messen, denn einerseits ist die Operation viel rascher und weniger umständlich, andererseits aber sind Kanäle, kleinere Flüsse und Schluchten so gut wie kein Hindernis. Bei der alten Methode der Basismessung muß man mit einer schweren und massiven Metallstange von

---

*) Die bayrische Basis ist 21,7 km lang. C. Bohn, Die Landmessung, S. 602, Berlin 1886.

nur 2 bis 4 m Länge hantieren; hier verwendet man einen leichten, dünnen Metalldraht oder ein Stahlband von 24, 25 oder 50 m, ja zum Messen über Schluchten hinweg verfertigt man Drähte von 72 m Länge. Man zieht gegenwärtig die Drähte den Bändern vor, da sie bequemer sind und dem Winde eine kleinere Fläche bieten als Bänder. Als Material wird Invar gebraucht, eine Art Nickelstahl, mit einem außerordentlich kleinen Ausdehnungskoeffizienten. Ein Draht von 24 m Länge und 1,7 mm Querschnittsdurchmesser wiegt samt Haken und Stäbchen an beiden Enden nur ungefähr ein halbes Kilogramm. Die Stäbchen an den Enden sind mit Millimeterstrichen versehen, die Haken dienen zum Aufhängen von Gewichten (gewöhnlich 10 kg), mit deren Hilfe man den Draht zwischen zwei in einer Distanz von ungefähr 24—25 m aufgestellten, mit feinen Marken versehenen festen Stativen ausspannt*). — Sobald der Draht gespannt worden ist, liest man an beiden Enden diejenigen Millimeterstriche ab, welche mit den Marken auf den Stativen zusammenfallen. Nach der Ablesung wird das hintere Stativ abgenommen und vor das vordere wieder in einer Distanz von ungefähr 24—25 m aufgestellt. Jetzt wird der Draht hinüber getragen, zwischen den Stativen ausgespannt, es wird wieder abgelesen und so fort. Die Arbeit schreitet sehr rasch fort; man kann 7—8 km täglich messen. Man hat mit Jäderinschen Apparaten schon weit längere Grundlinien als mit Metallstangen gemessen, so z. B. die Basis von Pietersburg in Südafrika mit 33 969,35 m. Ja in einer Steppe könnte man einen ganzen einige Grade umfassenden Meridianbogen mit einem Jäderinschen Basisapparat messen. — Doch ist diese letztere Möglichkeit weniger wichtig als die andere, mehr Grundlinien als mit anderen Basisapparaten in ein Dreiecksnetz einzufügen.

Indes, was an Billigkeit, Bequemlichkeit und Schnelligkeit gewonnen wird, das wird teilweise an Genauigkeit eingebüßt. Sie erreicht kaum die Hälfte der mit Stangenapparaten erreichbaren Genauigkeit. Außerdem kann man mit Recht gewisse Zweifel hegen, ob bei verhältnismäßig neuen Apparaten, wie es diejenigen Jäderins sind, schon alle Fehlerquellen entdeckt worden sind. So z. B. weiß man noch nicht genau, welchen Einfluß auf die Drähte das tägliche Abwickeln und Aufwickeln derselben auf Trom-

---

*) Genaueres bei J. R. Benoît und Ch. Ed. Guillaume, Mesure rapide des Bases géodésiques, Paris 1906.

meln hat: es ist nämlich nicht möglich, den Draht während der Nacht draußen hängen zu lassen, ebenso unmöglich ist es, einen 25 m langen Draht in einem Zimmer oder in einem Zelte unterzubringen; man muß ihn tagtäglich nach beendeter Tagesarbeit behufs Aufbewahrung auf eine Trommel aufwickeln und des Morgens wieder abwickeln. Weiter sind trotz der eingehenden Untersuchungen Guillaumes die physikalischen Eigenschaften der Invardrähte noch nicht so allseitig bekannt, daß eine Überraschung ausgeschlossen wäre. — Bedenklich erscheint die äußerste Variabilität der Ausdehnungsfähigkeit des Invars: ein jeder Guß hat einen anderen mit der Temperatur rasch wechselnden*) Ausdehnungskoeffizienten.

§ 3. Theorie des Basisapparates von Jäderin.

Obgleich durch Gewichte gespannt, bildet der Draht keine Gerade: bei 1,7 mm Querschnittsdurchmesser und 24 m Länge mit 10 kg Spannung hängt er in der Mitte 12 bis 14 cm niedriger als an den Enden. Die Kurve, welche der Draht bildet, heißt Kettenlinie, ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten ist:

$$z = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8$$

wobei die z-Achse vertikal nach oben und die x-Achse horizontal läuft. Die Koordinaten des niedrigsten Punktes der Kurve sind $x = 0$, $z = a$. Die Länge des Drahtes vom Punkte $x = 0$, $z = a$ bis zum Punkte mit der Abszisse x (Fig. 7) ist:

$$l = \pm \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem x positiv oder negativ ist. Setzen wir voraus, daß ein Endpunkt des Drahtes die Koordinaten x_1, z_1 und der andere die Koordinaten $-x_2$, z_2 hat, dann wird die Totallänge des Drahtes:

$$L = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} + e^{\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_2}{a}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 9$$

$\frac{x_1}{a}$ und $\frac{x_2}{a}$ sind immer sehr klein. Für den Draht z. B., von welchem oben die Rede war, ist $a = 554$ m, während x_1 und x_2 un-

---

*) Dabei bleiben die Koeffizienten sehr klein; sie sind z. B. zwanzigmal so klein als beim Stahl. Der lineare Ausdehnungskoeffizient des Stahls bei ungefähr 20° C beträgt $105 . 10^{-7}$.

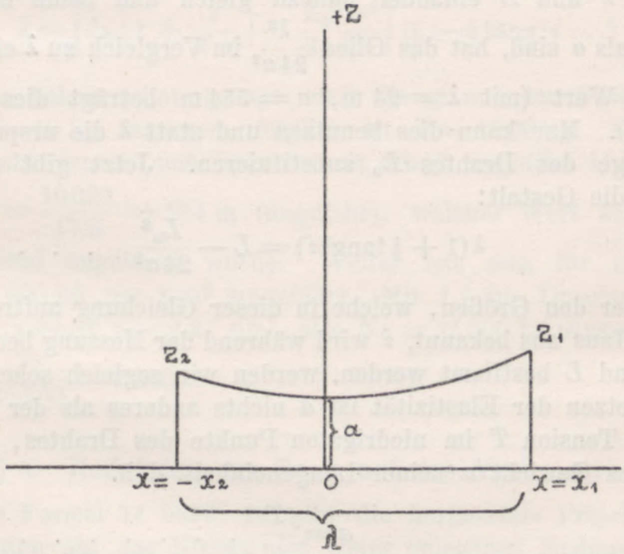
gefähr 12 m betragen. Wir können dies ausnutzen und die rechte Seite der Gleichung 9 in eine Reihe entwickeln, wobei man beim zweiten Gliede stehen bleiben kann. Auf diese Weise erhalten wir die Näherungsformel:

$$L = x_1 + x_2 + \frac{1}{6a^2}(x_1^3 + x_2^3) \ldots$$

Aber $x_1 + x_2$ ist die horizontale Entfernung zwischen den Endpunkten des Drahtes, d. h. jene Größe, welche das eigentliche Endziel der Messung bildet. Setzen wir $x_1 + x_2 = \lambda$, nehmen an, daß $z_1 > z_2$, $x_1 > x_2$ *) und endlich:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\lambda + \varepsilon, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}\lambda - \varepsilon,$$

Fig. 7.



so verwandelt sich unsere Näherungsgleichung für L in

$$L = \lambda + \frac{1}{6a^2}\left(\frac{\lambda^3}{4} + 3\lambda\varepsilon^2\right).$$

Jetzt entwickelt man die rechte Seite der Gleichung 8 in eine Reihe, die ebenfalls mit dem zweiten Gliede abgebrochen werden kann, und erhält:

$$z = a + \frac{x^2}{2a} + \ldots$$

*) Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeinheit des Endresultats nicht beeinträchtigt.

Daraus erhält man:

$$x_1 - x_2 = \frac{\lambda \varepsilon}{a}.$$

Es ist aber

$$x_1 - x_2 = \lambda \operatorname{tang} i,$$

worin i die Neigung der Geraden, welche die Endpunkte des Drahtes miteinander verbindet, bezeichnet; folglich ist:

$$\varepsilon = a \operatorname{tang} i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

und

$$L = \lambda + \tfrac{1}{2} \lambda \operatorname{tang}^2 i + \frac{\lambda^3}{24 a^2}.$$

Da λ und L einander nahezu gleich und beide bedeutend kleiner als a sind, hat das Glied $\frac{\lambda^3}{24 a^2}$ im Vergleich zu λ einen sehr kleinen Wert (mit $\lambda = 24$ m, $a = 554$ m beträgt dieses Glied 1,88 mm). Man kann dies benutzen und statt λ die ursprüngliche Totallänge des Drahtes L_0 substituieren. Jetzt gibt man der Formel die Gestalt:

$$\lambda (1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 i) = L - \frac{L_0^3}{24 a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

Unter den Größen, welche in dieser Gleichung auftreten, ist L_0 von Haus aus bekannt, i wird während der Messung beobachtet; wie a und L bestimmt werden, werden wir sogleich sehen. Nach den Gesetzen der Elastizität ist a nichts anderes als der Quotient aus der Tension T im niedrigsten Punkte des Drahtes, dividiert durch das Gewicht w seiner Längeneinheit, d. h.

$$a = \frac{T}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

Im betrachteten Falle ist die Tension längs des ganzen Drahtes beinahe konstant*), folglich hat T hier nahezu denselben Wert wie im Endpunkte des Drahtes. Dort aber ist die Tension des Drahtes dem spannenden Gewichte gleich und man darf für T einfach das spannende Gewicht einsetzen.

Endlich ist L die Länge des gespannten, L_0 des ungespannten Drahtes. Bezeichnet E den Elastizitätsmodul und σ den Quer-

---

*) Denn das Eigengewicht des Drahtes ist unbedeutend im Vergleich zu den spannenden Gewichten.

schnitt des Drahtes, so wird die Längeneinheit des Drahtes durch das Gewicht T um $\frac{T}{E \cdot \sigma}$ Längeneinheiten gedehnt. Daraus folgt:

$$L = L_0 \left(1 + \frac{T}{E \cdot \sigma}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13$$

Es bleibt nur noch übrig, die Werte von a und L aus 12 und 13 in 11 einzusetzen; man erhält dann:

$$\lambda = \frac{L_0 \left(1 + \frac{T}{E \cdot \sigma}\right) - \frac{L_0^3 w^2}{24 T^2}}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 i} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 14$$

oder mit hinreichender Genauigkeit:

$$\lambda = \left[L_0 \left(1 + \frac{T}{E \cdot \sigma}\right) - \frac{L_0^3 w^2}{24 T^2}\right] (1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 i \ldots) \quad . \; . \quad 14'$$

Wir haben schon gesagt, daß die spannenden Gewichte gewöhnlich 10 kg betragen, folglich ist $T = 10\,000$ g. Ein Meter Invardraht von 1,7 mm Durchmesser wiegt ungefähr 17,8 g. Das giebt $a = \frac{10\,000}{17{,}8} = 554$ m (ungefähr), welcher Wert schon oben vorgreifend angeführt wurde. Weiter hat man für Invardraht $E = 15\,500$ kg per mm² (ungefähr). Mit 1,7 mm Durchmesser ist der Querschnitt $\sigma = 2{,}27$ mm², also $E\sigma = 35\,200$ kg (ungefähr) und $\frac{T}{E\sigma} = \frac{10}{35\,200} = 0{,}00028 \ldots$

§ 4. Reduktion der Basis auf das Meeresniveau.

Die Formel 14 bezw. 14′ gibt die horizontale Projektion der Drahtlänge auf das Niveau des tiefer gelegenen Endpunktes des Drahtes. Sie muß noch auf das Meeresniveau reduziert werden. Da es sich um eine kleine Länge handelt, können die Niveauflächen als konzentrische Kugelflächen betrachtet werden. Es sei nun h die Höhe des tiefer gelegenen Endpunktes des Drahtes und ϱ der Krümmungsradius des Erdellipsoids in derjenigen Vertikalebene, in welcher die Basis liegt. Die Länge der reduzierten Horizontalprojektion wird nun $\frac{\lambda \varrho}{(\varrho + h)}$ sein und die Länge der reduzierten Basis:

$$\sum \frac{\lambda_n \varrho}{\varrho + h_n} \text{ oder näherungsweise } \sum \lambda_n \left(1 - \frac{h_n}{\varrho}\right).$$

Trotzdem bei der Messung mit Metallstangen ein möglichst ebenes und wagerechtes Terrain ausgesucht wird, haben die Stangen kleine Neigungen, folglich muß man die abgelesenen (und der Temperatur wegen reduzierten) Stangenlängen mit dem Kosinus des Neigungswinkels multiplizieren. Erst nach dieser Multiplikation darf man die Reduktion auf das Meeresniveau nach der soeben angegebenen Formel vornehmen.

Man sieht daraus, daß die Reduktion der Basis auf das Meeresniveau die Kenntnis der Höhe des Terrains über demselben voraussetzt. Die Operationen während der Basismessung können nur relative Höhen geben; wenigstens eine absolute Höhe muß vermittelst eines Nivellements bestimmt werden. Eine barometrische Höhenmessung könnte leicht einen Fehler von etwa 20 m in alle h_n einführen, folglich einen Fehler von ungefähr $\frac{1}{300\,000}$ für die Basislänge ausmachen.

§ 5. Triangulation. Meeresreduktion des Azimut.

Hat man eine Basis gemessen, so kennt man die Länge einer geodätischen Linie auf dem Geoid. Aus dieser Linie kann man die Längen aller geodätischen (d. h. kürzesten) Linien auf dem Geoid, welche zum selben Dreiecksnetze, wie die Basis, gehören, bestimmen. Dazu ist nur noch die Kenntnis der Winkel notwendig.

Man mißt die Winkel mit dem Theodoliten, d. h. mit einem Fernrohr, das mit einem geteilten Horizontalkreis versehen ist. Am Horizontalkreis liest man die Winkel, um welche das Fernrohr gedreht wird, ab. Zur Kontrolle mißt man mehr Winkel, als zur Auflösung der Dreiecke unbedingt notwendig sind. Die Triangulationspunkte, d. h. die Eckpunkte der Dreiecke*) wählt man auf hohen, allseitig sichtbaren Orten. Aus Rücksicht auf die Sichtbarkeit, ferner aus anderen Gründen, dürfen sie nicht zu weit voneinander entfernt sein. Etwa 80 km können als obere Grenze der Länge einer Dreieckseite gelten, größere Distanzen werden nur ganz ausnahmsweise zugelassen. Die Triangulationspunkte erster Ordnung werden durch besondere Signalbauten aus Holzlatten, Eisenstangen usw. gekennzeichnet. Es sind schlanke, gitterartige Pyramiden, die oben in eine Spitze auslaufen. Die Spitze dient als

---

*) Wir sprechen von Dreiecken erster Ordnung, kleinere Dreiecke zweiter und dritter Ordnung interessieren uns nicht.

Signal und wird von anderen Triangulationspunkten aus anvisiert. Wenn umgekehrt vom gegebenen Triangulationspunkte andere Punkte anvisiert werden sollen, dann wird der Theodolit zentrisch unter die Spitze gestellt.

Alle Triangulationspunkte und alle Winkel müssen auf das Meeresniveau reduziert werden. Wenn in einem gewissen Triangulationspunkte die geographische Breite direkt durch astronomische Beobachtungen bestimmt wurde, so muß eigentlich eine kleine Korrektion an der gemessenen Breite vorgenommen werden. In der Tat, da die Niveauflächen keine konzentrischen Kugelflächen, ja überhaupt keine parallelen Flächen sind, so sind die Lotlinien eigentlich keine Geraden und die geographische Breite des Punktes, in welchem die Lotlinie des Triangulationspunktes das Meeresniveau trifft, ist von der Breite des Triangulationspunktes etwas verschieden. Doch sind die Differenzen immer zu klein, um berücksichtigt zu werden; etwas bedeutender sind gewisse kleine Korrektionen, die an den Horizontalwinkeln anzubringen sind.

Wir nehmen an, daß der Theodolit in A steht und daß die Punkte B und C anvisiert werden. Es versteht sich von selbst, daß A ebenso wie B und C sich über dem Meeresniveau befinden. Der Winkel zwischen AB und AC ist nichts anderes als der Winkel zwischen zwei Ebenen, deren eine durch die Lotlinie*) von A und den Punkt B und die zweite durch die Lotlinie von A und den Punkt C geht. Denken wir uns, daß der Beobachter sich mit dem Theodoliten längs der Lotlinie von A bis zu deren Fußpunkt im Meeresniveau, sagen wir A', verschiebt. Es ist klar, daß er überall, folglich auch in A' denselben Winkel messen wird, da durch die Lotlinie von A und einen gegebenen Punkt B nur eine Ebene und ebenso durch die Lotlinie von A und den Punkt C nur eine Ebene gelegt werden kann. Diese Überlegung zeigt uns, daß die Reduktion des Standpunktes A auf das Meeresniveau keinen Einfluß auf die daselbst gemessenen Winkel hat. Nicht so die Reduktion der anvisierten Punkte B und C. In der Tat: einige Fälle, von denen sofort die Rede sein wird, ausgenommen, liegt die Lotlinie von B nicht in der durch B und die Lotlinie von A gelegten Vertikalebene, ebenso liegt die Lotlinie von C nicht in

---

*) Hier und fernerhin werden wir die Lotlinien als Gerade betrachten, sowie stets annehmen, daß die Lotlinie von A in ihrem Fußpunkte A' das Ellipsoid senkrecht trifft.

der durch C und die Lotlinie von A gelegten Vertikalebene. Legt man also durch die Lotlinie von A und durch die Fußpunkte B' und C' der Lotlinien von B und C zwei Vertikalebenen, so werden sie einen anderen Winkel einschließen als die ersten Ebenen. Wir brauchen aber nicht den gemessenen Winkel BAC, sondern den Winkel $B'A'C'$, da dieser, nicht jener im Meeresniveau liegt.

Wir können nun den Winkel $B'A'C'$ aus BAC auf folgende Weise erhalten. Beide Winkel können als Differenzen anderer Winkel, sogenannter Azimute, aufgefaßt werden. Azimut heißt der Winkel zwischen einer gegebenen Vertikalebene und der Meridianebene*). Nun korrigiert man den Azimut der Richtung AB und erhält die Richtung $A'B'$, ebenso korrigiert man den Azimut der Richtung AC und erhält die Richtung $A'C'$. Der Winkel zwischen den korrigierten Azimuten ist der gewünschte Winkel $B'A'C'$.

Wir haben gesagt, daß es Fälle gibt, in denen die Lotlinie von B in der durch B und die Lotlinie von A gelegten Vertikalebene liegt. Ein solcher Fall tritt ein, wenn B sich im Meridian von A, gleichviel ob südlich oder nördlich, befindet, er tritt ferner dann ein, wenn B sich auf demselben Parallelkreise befindet wie A. Es gehen dann die Lotlinien von B und A durch einen und denselben Punkt der kleinen Achse des Erdellipsoids und liegen beide in derselben Vertikalebene. Während also der Azimut α von 0 bis 2π variiert, muß seine Korrektion (sie wird Meeresreduktion genannt) viermal verschwinden. Sie verschwindet für $\alpha = 0$ und für $\alpha = \pi$, ferner einmal zwischen 0 und π und einmal zwischen π und 2π. Es ist klar, daß für unendlich nahe Punkte diese Zwischenwerte mit $^1/_2\,\pi$ und $^3/_2\,\pi$ identisch sein müssen. In der Praxis ist die Distanz zwischen A und B immer endlich, aber im Verhältnis zu den Dimensionen der Erde sehr klein, und bei der Berechnung einer sonst immer sehr kleinen Korrektion darf man getrost $^1/_2\,\pi$ und $^3/_2\,\pi$ als Nullstellen derselben annehmen. Die Näherungsformel zur Berechnung der Meeresreduktion in Winkelsekunden ist:

$$\varDelta\alpha = 206\,265 \cdot \frac{h}{2R}\,\varepsilon^2 \cos^2\beta' \cdot \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

---

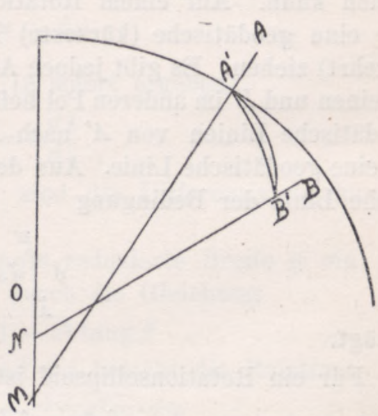
*) Wir werden die Azimute von S über W, N, O zurück nach S, also in der Richtung des Uhrzeigers zählen.

Hier bezeichnet h die Höhe von B über dem Meeresniveau, α den Azimut von B von A aus, β' die geographische Breite von A, ε wie gewöhnlich die Exzentrizität der Meridianellipse, R den mittleren Erdradius. Der numerische Wert des konstanten Koeffizienten $206\,265 \frac{\varepsilon^2}{2R}$, wenn 1 km als Längeneinheit genommen wird, beträgt 0,108″, so daß die Korrektion nur ausnahmsweise über eine halbe Winkelsekunde hinauswachsen kann. Im Harz*) erreicht sie z. B. bloß 0,0362″. In der Praxis wird diese Korrektion nur selten berücksichtigt.

§ 6. Differenz zwischen dem astronomischen und dem geodätischen Azimut.

Wir nehmen an, daß die Meeresreduktion $\Delta\alpha$ schon an allen Azimuten in allen Triangulationspunkten angebracht worden ist. Fassen wir wieder zwei solche Punkte, z. B. A und B ins Auge. Die Fußpunkte A' und B' ihrer Lotlinien sind jetzt durch zwei Vertikalschnitte $A'B'$ und $B'A'$ verbunden. Im ersten wird das Ellipsoid von derjenigen Vertikalebene geschnitten, welche durch die Lotlinie AA' und durch den Lotfußpunkt B' geht, im zweiten durch diejenige Vertikalebene, welche durch die Lotlinie BB' und durch den Lotfußpunkt A' geht. Man kann sich leicht überzeugen, daß diese beiden Ebenen (Fig. 8) verschieden sind; dazu braucht man nur die Lotlinien AA' und BB' bis zum Schnitt mit der kleinen Achse des Ellipsoids zu verlängern. Die Lotlinie AA' schneidet diese Achse in M und die Lotlinie BB' in N. Die Vertikalebene, welche durch AA' und B' geht, geht auch durch M, jene, welche durch BB' und durch A geht, geht auch durch N. Es ist klar,

Fig. 8.



---

*) A. Galle, Lotabweichungen im Harz. Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geod. Inst. N. F. 36., S. 183, Berlin 1908.

daß diese Ebenen und ihre Schnitte mit dem Ellipsoid, d. h. die Schnitte $A'B'$ und $B'A'$ verschieden sind. Man kann sie folglich als Dreieckseiten nicht verwenden, ohne eine Zweideutigkeit mit in den Kauf zu nehmen. Sie werden auch nicht verwendet; als Seite des geodätischen Dreiecks wird die geodätische Linie, welche die Lotfußpunkte A' und B' miteinander verbindet, genommen. Der Azimut der geodätischen Linie $A'B'$ in A' ist vom Azimut des Vertikalschnitts $A'B'$ in A' und ebenso vom Azimut des Vertikalschnitts $B'A'$ in A' verschieden, man kann ihn aber aus dem schon bekannten Azimut des Vertikalschnitts $A'B'$ durch Anbringung einer kleinen Korrektion ermitteln. Der Azimut des Vertikalschnitts $A'B'$ heißt astronomischer, derjenige der geodätischen Linie $A'B'$ heißt geodätischer Azimut.

§ 7. Geodätische Linie. Azimutreduktion.

Die geodätische Linie, welche A' mit B' verbindet, ist die kürzeste unter allen Linien, die man auf der gegebenen Fläche ziehen kann. Auf einem Rotationsellipsoid kann man überhaupt nur eine geodätische (kürzeste) Linie von A' nach B' (oder umgekehrt) ziehen. Es gibt jedoch Ausnahmefälle. Wenn z. B. A' sich im einen und B' im anderen Pol befindet, so kann man unendlich viele geodätische Linien von A' nach B' ziehen, denn jeder Meridian ist eine geodätische Linie. Aus der Definition folgt, daß die geodätische Linie der Bedingung

$$\delta \int_{A'}^{B'} ds = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16$$

genügt.

Für ein Rotationsellipsoid ist

$$ds^2 = r^2 d\lambda^2 + d\zeta^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 17$$

In dieser Formel bedeutet ζ die längs des Meridians gemessene Bogendistanz des betreffenden Punktes vom Nordpol, λ die geographische Länge und r die kürzeste (gerade) Entfernung von der Polarachse. Die Entfernung r ist eine Funktion von ζ, es bleiben somit zwei Variabeln λ und ζ, und es ist gleichgültig, welche von beiden als unabhängige Variable gewählt wird. Wir werden λ als unabhängige Variable betrachten, ζ und selbstverständlich r werden dann Funktionen von λ. Nach Einsetzen des

Wertes 17 in 16 und ausgeführter Variation erhalten wir die Gleichung:

$$\int_{A'}^{B'} \frac{d\zeta\, d(\delta\zeta) + d\lambda^2 \frac{r\,dr}{d\zeta} \cdot \delta\zeta}{ds} = 0.$$

Wir integrieren teilweise das erste Glied und erhalten:

$$\left[\frac{d\zeta}{ds}\delta\zeta\right]_{A'}^{B'} + \int_{A'}^{B'} \left[r\frac{dr}{d\zeta}\frac{d\lambda^2}{ds} - d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)\right]\delta\zeta = 0.$$

Das integrierte Glied verschwindet, da die Punkte A' und B' fest sind und es bleibt nur die Bedingungsgleichung:

$$r\frac{dr}{d\zeta}d\lambda^2 - d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right) \cdot ds = 0, \quad \ldots \ldots \quad 18$$

welche sofort vereinfacht werden kann. Man bedient sich dazu der zweiten unter den evidenten Relationen:

$$d\zeta = \cos\alpha\, ds, \quad r\,d\lambda = \sin\alpha\, ds, \quad \ldots \ldots \quad 19$$

wo α den Azimut des Linienelements ds bezeichnet, und bekommt

$$\frac{dr}{d\zeta}d\lambda = -d\alpha, \quad \ldots \ldots \quad 20$$

während die beiden Gleichungen 19 sofort ergeben:

$$\operatorname{tang}\alpha = r\frac{d\lambda}{d\zeta}. \quad \ldots \ldots \quad 21$$

Die Gleichungen 20 und 21 sind die Differentialgleichungen der geodätischen Linie.

Jetzt führen wir die sogenannte reduzierte Breite φ ein, die mit der geographischen Breite β durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{tang}\beta \quad \ldots \ldots \quad 22$$

zusammenhängt. Zwischen $d\zeta$ und $d\varphi$ besteht die Relation:

$$d\zeta = -a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} \cdot d\varphi \quad \ldots \ldots \quad 23$$

und andererseits ist

$$r = a\cos\varphi. \quad \ldots \ldots \quad 24$$

Unter Hinzuziehung dieser beiden Relationen verwandeln sich die Gleichungen 20 und 21 in:

$$(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{-1/2}\sin\varphi\, d\lambda = -d\alpha,$$
$$(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{-1/2}\cos\varphi\, d\lambda = -\operatorname{tang}\alpha\, d\varphi.$$

Durch Division folgt aus diesen Formeln die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi = d\alpha,$$

und aus dieser letzten Gleichung folgt die Integralgleichung der geodätischen Linie, nämlich:

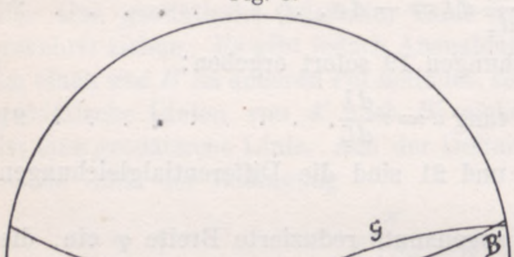
$$\sin\alpha \cdot \cos\varphi = \cos\varphi_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25$$

in welcher φ_0 die reduzierte Breite desjenigen Punktes bezeichnet, in welchem die geodätische Linie den Meridian rechtwinklig schneidet.

Aus der Gleichung 25 ist sofort ersichtlich, daß die Meridiane geodätische Linien sind, denn man kann der Gleichung 25 durch die Annahme $\alpha = 0$ bezw. $\alpha = \pi$ und $\varphi_0 = \pm\frac{1}{2}\pi$ genügen. Dagegen sind die Parallelkreise keine geodätischen Linien.

Wenn beide Punkte A' und B' auf demselben Meridian liegen, fallen die beiden Vertikalschnitte $A'B'$ und $B'A'$, ferner die geodätische Linie $A'B'$ miteinander und mit dem Meridian zusammen. Die Differenz zwischen dem astronomischen und dem geodätischen Azimut verschwindet somit für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$, sie muß ferner für dieselben Zwischenrichtungen wie die Differenz zwischen den Azimuten des Triangulationspunktes und seines Lotfußpunktes verschwinden. Wenn der anvisierte Punkt auf demselben Parallelkreise wie der Standpunkt liegt, fallen (vergl. § 5) die beiden Vertikalebenen zusammen und die beiden Vertikalschnitte $A'B'$ und $B'A'$ fallen miteinander und mit der geodätischen Linie zusammen. In nebenstehender Zeichnung (Fig. 9) stellt die Linie $A'GB'$ diese geodätische Linie vor, welche mit dem Vertikalschnitt zusammenfällt. Also ebenso wie die **Meeresreduktion** $\varDelta\alpha$ wechselt die **Azimutreduktion** $\varDelta'\alpha$ zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$ viermal das Vorzeichen. Die Näherungsformel für $\varDelta'\alpha$ (in **Winkelsekunden!**) lautet:

Fig. 9.



$$\varDelta'\alpha = -\frac{206\,265}{12}\left(\frac{s}{R}\right)^2 \varepsilon^2 \cos^2\beta' \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad 26$$

Die Bedeutung der anderen Buchstaben ist dieselbe, wie in der Formel 15, außerdem bezeichnet s die Distanz $A'B'$. Der konstante Faktor $206\,265 \cdot \frac{\varepsilon^2}{12\,R^2}$ hat den Wert $0'',028 \times 10^{-4}$, wenn ein Kilo-

meter als Längeneinheit genommen wird. Das Vorzeichen von $\Delta' \alpha$ ist immer demjenigen von $\Delta \alpha$ entgegengesetzt, der numerische Wert ist in der Regel noch kleiner als der numerische Wert von $\Delta \alpha$, weshalb diese Korrektion ebenso selten berücksichtigt wird wie $\Delta \alpha$.

§ 8. Sphärische und ellipsoidale Dreiecke.

Nach den oben beschriebenen Reduktionen erhält man ein Netz von Dreiecken, die aus geodätischen Linien bestehen. Diese geodätischen Linien verbinden die Lotfußpunkte A', B', C' usw. der Triangulierungspunkte A, B, C untereinander. Die Berechnung der Dreiecke auf dem Ellipsoid ist ziemlich umständlich; glücklicherweise kann man, da die Dreieckseiten im Verhältnis zu den Dimensionen des Ellipsoids klein sind, die Dreiecke als sphärische behandeln. Nehmen wir eine Kugel mit einem der äquatorialen Halbachse gleichen Radius, und denken wir uns auf dieser Kugel ein sphärisches Dreieck mit denselben Seiten a, b, c wie das Dreieck auf dem Ellipsoid. Es seien ferner die Winkel des ellipsoidischen Dreiecks A, B, C und die Winkel des sphärischen: $A + \Delta A$, $B + \Delta B$, $C + \Delta C$. Die Differenzen ΔA usw. lassen sich in der Form $\Delta A = m \varepsilon^2 \frac{F}{a^2} + \ldots$ ausdrücken, wobei, wie gewöhnlich, ε die Exzentrizität und a die größere Halbachse des Ellipsoids, weiter F die Fläche des Dreiecks und m einen Zahlenfaktor*) zwischen den Grenzen $-\frac{1}{3}$ und $+\frac{1}{3}$ bedeutet. Man sieht sofort, daß die Differenzen ΔA usw. immer sehr klein sind. Betrachten wir z. B. ein gleichseitiges Dreieck mit Seiten von 100 km Länge — sein Flächeninhalt kann höchstens 4330 km² und die entsprechende Korrektion ΔA höchstens $\frac{1}{3} \cdot \frac{206\,265}{149} \cdot \frac{4330}{(6378)^2} = 0'',049$ betragen. Gewöhnlich werden diese Korrektionen nicht berücksichtigt.

§ 9. Theorem von Legendre. Berechnung der sphärischen Dreiecke.

Man kann somit geodätische Dreiecke auf dem Erdellipsoid als sphärische behandeln. Aber bei der Anwendung der für sphärische Dreiecke gültigen Formeln stößt man auf eine eigentümliche

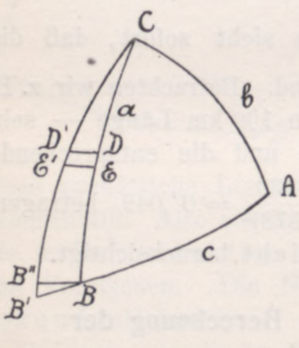
*) Dieser Zahlenfaktor hängt von den (reduzierten) Breiten der Eckpunkte ab.

Schwierigkeit. Die Rechnung liefert zunächst goniometrische Funktionen, meist den Sinus der Seiten. Daraus sind die Winkel und aus den Winkeln die Längen der Seiten in Metern abzuleiten. Nun lassen sich selbst mit vielstelligen Logarithmentafeln die Winkel aus den Logarithmen der Sinus und Tangenten schwierig auf 0″,1, höchstens auf 0″,05 genau berechnen. Dieser Unsicherheit entspricht aber eine schon nicht statthafte Unsicherheit von 3, bezw. 1½ m*) in der Länge der Seiten und man muß ein anderes Verfahren einschlagen, um die notwendige Präzision einzuhalten.

Es existieren mehrere Berechnungsmethoden; wir werden aber nur die gebräuchlichste besprechen. Sie besteht darin, daß mit Hilfe des sogenannten Theorems von Legendre statt sphärischer gewisse ebene Dreiecke mit gleich langen Seiten berechnet werden. Der Legendresche Lehrsatz sagt nämlich aus, daß in erster Annäherung ein ebenes Dreieck mit Seiten gleicher Länge wie das sphärische Winkel besitzt, die von den entsprechenden Winkeln des sphärischen Dreiecks um je ein Drittel des sphärischen Exzesses kleiner sind.

Dem Beweise des Theorems von Legendre müssen wir einen anderen Beweis vorausschicken, daß nämlich der sphärische Exzeß dem Verhältnis des Flächeninhalts des sphärischen Dreiecks zum Flächeninhalt der Kugel gleich ist. — Um den Beweis zu vereinfachen, setzen wir voraus, daß der Radius der Kugel gleich Eins ist. Der Beweis wird für alle Dreiecke, von denen zwei Seiten kleiner als π sind, gültig sein. Dreiecke, die dieser Bedingung nicht genügen, muß man passenderweise in zwei kleinere zerteilen.

Fig. 10.



Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit F und setzen voraus, daß die Seite a sich um die Ecke C um den unendlich kleinen Winkel dC dreht. (Fig. 10). Diese Seite schneidet die verlängerte Seite c in B'; ihre Länge wird jetzt $a+da$ sein. Die Fläche des Dreiecks hat den Zuwachs CBB' erhalten, folglich ist:

$$dF = CBB'.$$

*) Eine Winkelminute entspricht auf der Erdoberfläche ungefähr 1852 m.

Auf der Seite CB' mißt man $CB'' = a$ ab und zieht den unendlich kurzen Parallelkreisbogen*) $B''B$. Die Dreiecke CBB' und CBB'' sind beide unendlich Kleine erster Ordnung und unterscheiden sich voneinander nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung, nämlich um das Dreieck $BB'B''$. Wenn also unendlich Kleine zweiter Ordnung vernachlässigt werden, so darf

$$dF = CBB'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27$$

gesetzt werden. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks wird folgendermaßen berechnet: Es sei $CD = CD' = a'$; der Flächeninhalt des Vierecks $DD'EE'$ kann dann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$DD'EE' = dC \sin a' \, da'.$$

Die Fläche des Dreiecks CBB'' setzt sich aus solchen Vierecken wie $DD'EE'$ zusammen und kann durch folgendes Integral ausgedrückt werden:

$$dF = CBB'' = dC \int_0^a \sin a' \, da' = dC(1 - \cos a) \quad \ldots \quad 28$$

Jetzt werden wir den Zuwachs des sphärischen Exzesses berechnen. Laut Definition ist:

$$e = A + B + C - \pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29$$

Da A und b sich nicht verändert haben, ist:

$$de = dB + dC \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30$$

und die bekannte Differentialgleichung der sphärischen Trigonometrie:

$$dB = -\cos a \, dC - \cos c \, dA + \sin c \sin A \, db$$

reduziert sich auf:

$$dB = -\cos a \cdot dC \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31$$

Aus den Gleichungen 30, 31 und 28 folgt somit:

$$de = (1 - \cos a) \, dC = dF$$

und weiter:

$$e = F + \text{konst.}$$

Aber man sieht sofort, daß die Konstante gleich Null sein muß. Läßt man nämlich das Dreieck stetig abnehmen, so wird im Grenzfall für $F = 0$ auch $e = 0$ sein, da ein unendlich kleines sphärisches Dreieck sich nur unendlich wenig von einem ebenen Dreieck und die Summe seiner Winkel sich nur unendlich wenig von π unterscheidet. Werden aber e und F gleichzeitig unendlich

---

*) In bezug auf C als Pol.

klein, so muß auch die Konstante unendlich klein sein. Schließlich hat man auf einer Kugel mit dem Radius Eins:

$$e = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32$$

und auf einer Kugel mit dem Radius R:

$$e = \frac{F}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32'$$

In diesem Beweis haben wir nur eine Seite des Dreiecks um eine Ecke gedreht, aber es ist klar, daß dieselben Überlegungen für alle Seiten gelten und daß das Resultat 32 und 32′ allgemein gültig ist.

Jetzt können wir uns dem Lehrsatz von Legendre zuwenden. Wir setzen voraus, daß die Seiten des sphärischen und des ebenen Dreiecks einander gleich sind, und bezeichnen sie mit a, b, c. Die Winkel des sphärischen Dreiecks bezeichnen wir mit A, B, C, die Winkel des ebenen mit A', B', C'. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß der Radius der Kugel gleich Eins ist. Endlich sind wir berechtigt anzunehmen, daß a, b, c, ferner $\varDelta A = A - A'$, $\varDelta B = B - B'$, $\varDelta C = C - C'$ lauter kleine Größen sind. Als Ausgangspunkt haben wir die Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33$$

welche mit Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnungen folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} = \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24}\right) + \left(b - \frac{b^3}{6}\right)\left(c - \frac{c^3}{6}\right)(\cos A' - \sin A' \varDelta A).$$

Wir behalten nur kleine Größen vierter Ordnung bei und schreiben nach sofort ersichtlichen Umwandlungen:

$$bc\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)(\cos A' - \sin A' \cdot \varDelta A) = \frac{a^4 - [b^4 + 6\, b^2 c^2 + c^4]}{24} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 33'$$

Jetzt nehmen wir zwei Formeln der ebenen Trigonometrie zu Hilfe, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \cos A' = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \\ \text{II.} & F' = \dfrac{1}{2}\, b\, c \cdot \sin A' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34$$

worin F' den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks bezeichnet, und verwandeln die Gleichung 33′ in:

$$\frac{1}{3}(F')^2 = F' \cdot \Delta A \cdot \left[1 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2)\right].$$

Wir können noch $\frac{1}{6}(b^2 + c^2)$ neben der Einheit vernachlässigen und beiderseits durch F' dividieren. So ergibt sich:

$$\Delta A = \frac{1}{3} F'.$$

Ebenso hätten wir gefunden, daß $\Delta B = \frac{1}{3} F'$, $\Delta C = \frac{1}{3} F'$. In zweiter Annäherung findet man, daß die drei Differenzen ΔA, ΔB und ΔC untereinander etwas verschieden sind; aber schon die erste Annäherung genügt in den meisten Fällen.

Zuletzt benutzen wir noch den oben gefundenen Lehrsatz, nach welchem der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks auf einer Kugel mit dem Radius Eins dem sphärischen Exzesse gleich ist, und erhalten:

$$\Delta A = \Delta B = \Delta C = \frac{1}{3} e. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35$$

Diese Gleichungen drücken den Lehrsatz von Legendre aus.

§ 10. Berechnung der Länge eines Meridianbogens. Referenzellipsoid.

Der im vorigen Paragraphen behandelte Satz von Legendre gibt uns Mittel an die Hand, geodätische Dreiecke genau zu berechnen. Nach der Berechnung der Seiten kann man zur Berechnung der Länge des Meridianbogens schreiten.

$P_0 Q$ sei ein Stück des Meridianbogens, ferner seien P_0, P_1, P_2 . . usw. Triangulationspunkte. Wir ziehen die Parallelkreise $P_1 F_1$, $P_2 F_2$ usw., welche den Meridianbogen in kleinere Stücke zerteilen (Fig. 11). Man hat alsdann:

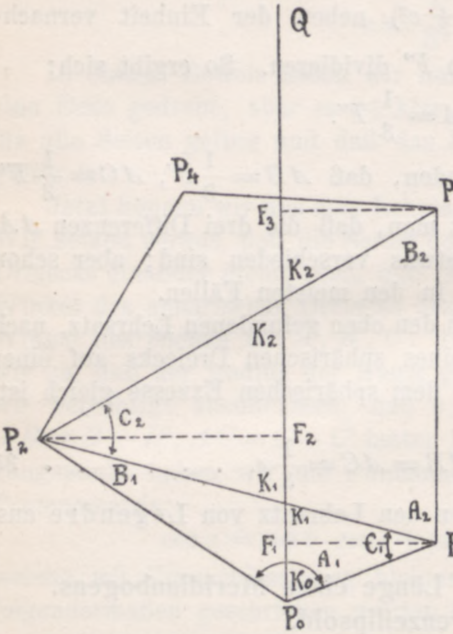
$$P_0 Q = P_0 F_1 + F_1 F_2 + F_2 F_3 + \ldots\ldots$$

Die Bogen $P_0 F_1$, $F_1 F_2$ . . . usw. oder die sogenannten „Entfernungen der Parallelen" werden aus den Seiten $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ usw. berechnet. Eine bequeme Formel dazu erhält man auf folgende Weise*). Wir fassen beispielsweise die Entfernung der

*) Im nachfolgenden wird in großen Zügen eine Ableitung Bessels wiedergegeben. Vergl. Bessels Abhandlungen. Herausgegeben von R. Engelmann. III. Bd. Leipzig 1876. S. 40—41, auch 136—137.

Parallelen $F_1 F_2$ ins Auge und nehmen eine Hilfskugel mit dem Radius Eins und auf derselben zwei Punkte P_1' und P_2' an, welche den Punkten P_1 und P_2 in der Weise entsprechen, daß die geographischen Längen von P_1' und P_2' dieselben sind, wie die geographischen Längen von P_1 und P_2 und die geographischen Breiten dieselben, wie die reduzierten Breiten (vergl. § 7) von P_1 und P_2, d. h. ihre Breiten sind φ_1 und φ_2. Wir setzen (auf dem Ellipsoid) $P_1 P_2 = s$, $F_1 F_2 = S$ und (auf der Kugel) $P_1' P_2' = \sigma$. Es ist klar, daß die Entfernung der Parallelen auf der Kugel $\varphi_2 - \varphi_1$ ist*), und daß

Fig. 11.



$$\frac{S}{s} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\sigma} [1 - \varepsilon^2 q + \ldots], \quad 36$$

worin q einen Koeffizienten bedeutet, den wir nicht ausführlich zu berechnen brauchen, und worin die weiteren Glieder der Reihenentwicklung in der Klammer ebenso wie $\varepsilon^2 q$ mit der Abplattung verschwinden.

Jetzt betrachten wir auf der Hilfskugel das Dreieck: Pol $P_1' P_2'$ mit den Seiten: $\frac{1}{2}\pi - \varphi_1$, $\frac{1}{2}\pi - \varphi_2$, σ und der gegenüberliegenden Winkeln $\pi - \alpha_2$, α_1, $\lambda_2 - \lambda_1$. Auf Grund bekannter Formeln der sphärischen Trigonometrie (der sogenannten Napierschen Analogien) erhalten wir sofort die Beziehung:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Aus dieser Beziehung können wir verschiedene Ausdrücke für $\varphi_2 - \varphi_1$ als Funktion von σ und der beiden Kosinus ableiten; bequem wird der folgende sein:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = k\sigma \left[1 + \frac{\sigma^2}{12}(1 - k^2) + \ldots\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37$$

---

*) Wir setzen $\varphi_2 > \varphi_1$ voraus.

worin der Kürze wegen

$$\frac{\cos {}^1/_2(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos {}^1/_2(\alpha_1-\alpha_2)}=k$$

gesetzt wurde. Jetzt setzt man $\varphi_2-\varphi_1$ aus 37 in 36 ein und erhält:

$$S=s\cdot\frac{\cos {}^1/_2(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos {}^1/_2(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot[1+\frac{1}{12}\sigma^2(1-\varepsilon^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)(1-k^2)\ldots] \quad 38$$

In der Reihe, welche in der Klammer steht, kann σ durch $\frac{s}{a}$ oder, etwas genauer, durch $\frac{s}{a}(1-\varepsilon^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2)^{-1/2}$ ersetzt werden.

Die Formel 38 dient zur Berechnung des „Abstandes der Parallelen“ $S=F_1F_2$ aus der Seite $s=P_1P_2$ (des geodätischen Dreiecks).

Es war hier nur unsere Absicht, dem Leser eine Idee von den zahlreichen Messungen, Beobachtungen und Rechnungen, welche zu einer Bestimmung der Gestalt der Erde aus geodätischen Messungen — speziell aus einer Meridianbogenmessung — gehören, zu geben. Dementsprechend haben wir die Fundamentalsätze angeführt; aber auf die Einzelheiten eingehen, eigentliche Rechenformeln angeben können wir hier nicht, müssen uns vielmehr auf den Hinweis beschränken, daß die Methode der kleinsten Quadrate vielfach und reichlich angewendet wird. Der Kontrolle halber mißt man mehr Winkel als nötig und statt einer Grundlinie deren mehrere in verschiedenen Teilen des Dreiecksnetzes. Man bestimmt ferner in gewissen Punkten astronomisch die Länge und die Breite, obgleich beide aus den Dreiecken berechnet werden können — kurz und gut: man trachtet darnach, mehr Gleichungen als Unbekannten zu bekommen. Eine notwendige Folge davon ist, daß man die Methode der kleinsten Quadrate anwenden muß.

Aus den verschiedenen Messungen erhält man verschiedene e und a, folglich verschiedene Ellipsoide, und zwar nicht nur den Dimensionen, sondern auch der Lage nach, d. h. die Polarachsen verschiedener Ellipsoide fallen nicht miteinander zusammen, sondern bilden gewisse Winkel miteinander. Natürlich sind die Differenzen unter den Halbachsen, die Winkel und die Distanzen zwischen den Achsen äußerst klein, aber nicht Null. Das rührt daher, daß infolge der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ein jedes Ellipsoid sich am besten demjenigen Stück des Geoids anschmiegt, für welches

die betreffenden Messungen ausgeführt wurden. Wir nennen solche Ellipsoide „Referenzellipsoide“. Es gibt folglich englische, spanische usw. Referenzellipsoide. Etwas anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn mehrere, in verschiedenen Weltteilen ausgeführte Messungen gleichzeitig berechnet werden. Das resultierende Ellipsoid hat dann allgemeinere Bedeutung als die lokalen Referenzellipsoide, aber auch solche „Erdellipsoide“ sind etwas voneinander verschieden. Wir haben im ersten Kapitel (§ 7) gesehen, daß das Clarkesche Ellipsoid vom Besselschen nicht unerheblich abweicht. Das Besselsche Ellipsoid (1841) wurde abgeleitet aus folgendem Material:

Gradmessung	Amplitude
1. Peruanische	3° 7′
2. Erste ostindische	1 35
3. Zweite ostindische	15 58
4. Französische	12 22
5. Englische	2 50
6. Hannoversche	2 1
7. Dänische	1 32
8. Preußische	1 30
9. Russische	8 2
10. Schwedische	1 37

Clarke (1880) verfügte über ein größeres Material: statt der Nr. 9 und 10 stand ihm die schon beendete russisch-skandinavische Gradmessung vom Eismeer bis zu der Mündung der Donau mit einer Amplitude von 25° 20′ zu Gebote, die englische Gradmessung war auf 11° verlängert und mit der französischen verbunden worden, so daß er statt Nr. 4 und 5 einen großen Bogen von 22° 9′ Länge hatte. Endlich hatte er für die ostindische Gradmessung statt Nr. 3 mit einer Amplitude von 15° 58′ einen Bogen von 21° 21′. Die übrigen kleineren Bogen (Nr. 1, 2, 6, 7 und 8) hat Clarke in derselben Ausdehnung wie Bessel genommen. Sie hatten aber wenig Einfluß auf das Endresultat. Die von Clarke gefundene große Abplattung erklärt sich hauptsächlich aus dem Einfluß der großen ostindischen Gradmessung.

Viertes Kapitel.

Dichte und Temperatur des Erdinnern. Hypothesen über die Konstitution der Erde.

§ 1. Dichte der Gesteinsarten. Mittlere Dichte der Erde.

Die Dichte der Ton-, Sand- und Kalksteine ist klein, sie beträgt im Mittel ungefähr 2,1; noch kleiner (ungefähr 1,4) ist die Dichte mancher vulkanischer Tuffe, und der poröse Bimsstein schwimmt sogar auf dem Wasser. Größer ist die Dichte der eruptiven und metamorphen Gesteinsarten: nach den Daten Rosenbuschs beträgt im Mittel die der Granite ungefähr 2,68, der Syenite 2,54, der Tonschiefer 2,81, der Trachytlaven 2,63, der Basaltlaven 2,99; die Dichte einiger seltener Gesteinsarten, wie des Lherzolits oder des Dunits, erreicht 3,3. Die mittlere Dichte der Erde beträgt indes gewiß nicht weniger als 5,5*), und die Dichte des Erdinnern muß noch größer sein, um das Defizit der Dichte in der Erdkruste aufzuwiegen. Diese größere Dichte kann ebensowohl durch Vorhandensein von schweren Metallen im Erdinnern als auch durch Verdichtung unter hohem Drucke stehender Gesteine verursacht werden.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß schwere Metalle, insbesondere Eisen, sich im Erdinnern befinden. Gewisse Basalte, wie z. B. diejenigen von Antrim (Irland) oder die Anamesite im Gouv. Volhynien (Rußland) enthalten Eisenkörner, es ist das aber noch kein Beweis für das Vorhandensein eines Eisenkernes.

Ebenso unterliegt es keinem Zweifel, daß die Stoffe durch Druck verdichtet werden; aber die Gesetze der Dichtezunahme unter sehr hohem Druck sind unbekannt. Es fehlen überhaupt jegliche Anhaltspunkte zur Entscheidung der Frage, ob die Verdichtung oder das Vorhandensein eines schweren metallischen Kernes die Ursache der großen mittleren Dichte der Erde bildet. Beide Erklärungen sind plausibel, für jede von ihnen kann man wichtige

*) Nach Krigar-Menzel und Richarz (1898) 5,50. Verschiedene Bestimmungen schwanken zwischen 4,39 und 6,56, aber mit verläßlichen Methoden (Drehwage, Wägungsmethode, Differentialpendel) ausgeführte Messungen ergeben immer Werte, die nahe an 5,5 und eher darüber als darunter liegen.

Argumente ins Feld führen, so daß es am besten ist, beide gleichzeitig aufrecht zu erhalten.

Die Stoffe im Erdinnern haben gewiß verschiedene Dichten, ob aber die relativen Dichten dieselben wie an der Erdoberfläche bleiben, ist eine andere Frage. Es kann sehr leicht geschehen, daß bei dem Druck einer Atmosphäre der Körper *A* eine größere Dichte besitzt als der Körper *B*, aber bei 100 000 Atmosphären umgekehrt *B* dichter als *A* ist.

Oft begegnet man der Meinung, daß die Stoffe im Erdinnern nach dem spezifischen Gewichte geordnet seien; insbesondere wird diese Meinung häufig in Verbindung mit der Hypothese eines flüssigen Zustandes des Erdinnern geäußert. Bis zu einem gewissen Grade ist sie richtig, aber nur bis zu einem gewissen Grade, denn Lava hat die Eigenschaften einer Lösung; spezifisch schwere Stoffe sind in spezifisch leichteren aufgelöst und umgekehrt. Vulkanologische Forschungen haben festgestellt, daß zu verschiedenen Zeiten aus ein und demselben vulkanischen Herde ausgeschiedene Laven ungleiche Zusammensetzung und verschiedene Dichten besitzen, wobei die Anordnung der Ausscheidung sich im allgemeinen nicht in Zusammenhang mit dem spezifischen Gewichte bringen läßt. In gewissen Gebieten wurde zuerst eine leichtere und dann eine schwerere Lava, in anderen zuerst eine schwerere und nachher eine leichtere ausgeworfen; in anderen Gebieten wieder haben schwerere und leichtere Laven mehrmals miteinander abgewechselt. — Ebenso wie in Lösungen sind es die Gesetze des chemischen, nicht des mechanischen Gleichgewichtes, welche über die Ausscheidung einer Lava von bestimmter Zusammensetzung aus dem Magma entscheiden.

Alle sogenannten Dichtegesetze: das Gesetz von Laplace, von Roche, G. H. Darwin, Lipschitz, Wiechert sind hypothetisch. Aber unter Zugrundelegung gewisser plausibler Annahmen kann man Grenzen aufstellen, in denen die einer gegebenen Tiefe zugeordnete Dichte enthalten sein muß. Stieltjes macht drei Annahmen: 1. daß die Dichte kontinuierlich variiert; 2. daß für das Erdinnere die Gesetze der Hydrostatik gelten, folglich die Dichte mit der Tiefe nur zunehmen kann; 3. daß die Dichtezunahme nach der Tiefe zu immer geringer wird.

Als Beobachtungsdaten nimmt Stieltjes folgende an: mittlere Dichte der Erde 5,56, Dichte der Erdkruste 2,6, reziproker Wert der Abplattung 288,48, Verhältnis zwischen der Schwerkraft im

Äquator und der Zentrifugalkraft daselbst 288,42, endlich setzt er mit Nyřen:

$$\frac{C-A}{C} = 0{,}00324256.$$

Hier bedeutet C das Trägheitsmoment der Erde, bezogen auf die Polarachse und A das Trägheitsmoment, bezogen auf die Äquatorialachse.

Auf Grund dieser Daten und Annahmen findet er*) folgende Grenzen der Dichte:

im Zentrum	7,61 bis	12,16
im Abstand 0,1 des Radius vom Zentrum	7,61 „	11,28
„ „ 0,2 „ „ „ „	7,61 „	10,43
„ „ 0,3 „ „ „ „	7,61 „	9,63
„ „ 0,4 „ „ „ „	7,61 „	8,93
„ „ 0,5 „ „ „ „	7,51 „	8,33
„ „ 0,6 „ „ „ „	6,87 „	7,84
„ „ 0,7 „ „ „ „	6,00 „	7,05
„ „ 0,8 „ „ „ „	5,12 „	5,81
„ „ 0,9 „ „ „ „	4,05 „	4,58
„ „ 1,0 „ „ „ „	2,60 „	2,60

Diese Zahlen sind aber sämtlich etwas zu klein, da Stieltjes eine zu große Abplattung angenommen hat; hätte er statt 288,48 für den reziproken Wert der Abplattung mit Bessel 299,2 gesetzt, so müßte die Zahl λ**), welche bei Stieltjes den Wert 1,92 besitzt, etwas größer als 2 sein, und sämtliche Zahlen der vorigen Tabelle müßten vergrößert werden. Andererseits hat Stieltjes einen wahrscheinlich zu kleinen Wert für das Verhältnis $(C-A)/C$ angenommen; es werden gewöhnlich größere Werte angegeben. Der Wert, welchen Newcomb***) angibt, ist 0,00328057. Die Annahme eines größeren Wertes für $(C-A)/C$ wirkt ebenfalls im Sinne der Vergrößerung der Zahl λ.

Anders wird die Frage von Callandreau†) aufgefaßt. Er fußt auf den gleichen Annahmen wie Stieltjes und zeigt, daß alle

---

*) Stieltjes, Archives néerlandaises, Bd. XIX (Harlem 1884), S. 456.

**) $\lambda = \frac{C-A}{C\left(e-\frac{1}{2}m\right)}$, wobei e, wie gewöhnlich, die Abplattung, m das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator, C und A die Trägheitsmomente, bezogen auf die polare und die äquatoriale Achse, bezeichnen.

***) Newcomb, Spherical Astronomy, New York 1906, S. 251.

†) Callandreau, Comptes Rendus, Ac. Sc. Paris, Bd. C (1885), S. 1204—1206.

Dichtigkeitsgesetze, welche diesen Annahmen genügen und mit den Beobachtungsdaten übereinstimmen, zu einem nahezu konstanten Werte der Abplattung führen, nämlich Werte liefern, die immer nahe an $\frac{1}{298}$ liegen.

Poincaré läßt die dritte Annahme fallen, er setzt also nur voraus, daß die Variation der Dichte kontinuierlich ist und daß das Erdinnere sich wie ein flüssiger Körper verhält. Er findet*), daß, wenn

$$\frac{C-A}{C} = 0{,}0032753 = \frac{1}{305{,}31} \text{ und } m = \frac{1}{288{,}38},$$

die obere Grenze der Abplattung $\frac{1}{295{,}85}$ beträgt.

Die Abplattungen nach Bessel und Helmert befriedigen diese Bedingung, diejenige Clarkes dagegen nicht; heute wissen wir aber, daß des letzteren Abplattung wahrscheinlich zu groß berechnet worden ist; sie wurde durch die stärkere lokale Krümmung des Geoids in Indien zu sehr beeinflußt.

§ 2. Der Druck im Erdinnern.

Nehmen wir einen festen Körper an, auf den irgendwelche Kräfte wirken. Die Druckverhältnisse innerhalb desselben können im allgemeinen erst mit Hilfe von nicht weniger als sechs Funktionen der Koordinaten seiner Punkte und der Zeit bestimmt werden. Auf ein unendlich kleines, kubisches Element des festen Körpers wirken sechs Druckkräfte, drei zu seinen Wänden normale, komprimierende**) und drei zu seinen Wänden tangentiale, scherende. Nicht so in einer ruhenden Flüssigkeit; dort existieren überhaupt keine tangentialen Drucke und die normalen sind einander gleich. Diese Tatsache drückt man auch so aus, daß man sagt: „in einem jeden Punkte einer ruhenden Flüssigkeit ist der Druck nach allen Richtungen der gleiche". Daraus sieht man, daß eine Funktion ausreicht, um den Druckzustand in einer Flüssigkeit darzustellen.

---

*) Poincaré, Figures d'équilibre, Paris 1902, S. 94.

**) Man faßt die Ausdehnung (Dilatation) als negative Kompression auf. Demnach kann der Druck positiv oder negativ sein.

Es zeigt sich also, daß die Frage nach dem Druck im Erdinnern sich anders gestaltet, je nachdem man dieses Erdinnere als fest oder flüssig ansieht. In einem festen sphäroidalen Weltkörper wäre selbst der folgende Zustand denkbar: Der Weltkörper besteht aus sphäroidalen festen Schalen, von denen eine jede sich selbst in der Art einer Wölbung stützt und auf die darunterliegenden Schalen gar nicht drückt. Bei einem solchen Bau wäre der Druck in der Richtung des Radius überall sehr klein oder Null, und senkrecht zum Radius sehr groß. Daß die Erde einen solchen Bau nicht besitzt, ist gewiß, aber die bloße theoretische Möglichkeit eines solchen Baues zeigt in drastischer Weise den Unterschied zwischen den Druckverhältnissen innerhalb eines festen und eines flüssigen Körpers.

Nehmen wir zunächst an, daß die Erde durch und durch fest ist: wir haben überall drei normale und drei tangentiale Drucke, und doch muß der Druckzustand in sehr großen Tiefen dem Zustand innerhalb eines flüssigen Körpers ähnlich sein. Der ideale Bau, von dem wir oben gesprochen haben, wäre nur möglich bei einer Festigkeit, die alles, was in der Natur vorkommt, tausendfach überflügelt. Ohne Zweifel lasten die Schichten der Erde eine auf der andern und die normalen Drucke wachsen mit der Annäherung an das Zentrum in Hunderttausende und Millionen von Atmosphären. Indes ist den tangentialen, scherenden Drucken und den Differenzen unter den normalen Drucken durch die Festigkeit des Stoffes eine obere Grenze gesetzt. Entweder erreichen sie diese Grenze nicht, oder, falls sie sie erreichen, bricht der Stoff, es treten Deformationen ein und der überschüssige Druck wird aufgehoben. Auf diese Weise kommen wir zum Schluß, daß die tangentialen Drucke und die Differenzen zwischen den normalen Drucken relativ zu den normalen Drucken abnehmen müssen*). Präziser werden wir dies so formulieren: Es seien p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} die drei normalen und p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} die drei tangentialen Drucke; es sei ferner

$$p_m = \tfrac{1}{3}\,(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Die absoluten Werte der Verhältnisse

$$\frac{p_{yz}}{p_m},\ \frac{p_{zx}}{p_m},\ \frac{p_{xy}}{p_m}\ \text{ und }\ \frac{p_{xx}-p_m}{p_m},\ \frac{p_{yy}-p_m}{p_m},\ \frac{p_{zz}-p_m}{p_m}$$

*) Ob sie absolut ab- bezw. zunehmen, wissen wir nicht.

nehmen dann mit der Tiefe ab. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß die Druckzustände mit der Tiefe immer mehr und mehr dem hydrostatischen Druckzustand ähnlich werden.

Wenn wir nun zu der Hypothese, daß das Erdinnere flüssig ist, übergehen, brauchen wir nicht erst zu beweisen, daß die Druckverteilung im Erdinnern den Gesetzen der Hydrostatik folgt.

Auf jeden Fall sehen wir, daß es sich empfiehlt, die hydrostatische Druckverteilung näher zu betrachten. In Unkenntnis des Dichtegesetzes muß man sich aber auf die Berechnung gewisser Grenzwerte beschränken. Es lohnt sich nicht, die Abplattung und die Schwungkraft zu berücksichtigen, es genügt, die Rechnung so durchzuführen, als wenn die Erde eine Kugel ohne Rotationsbewegung wäre.

Wir nehmen eine homogene, flüssige Kugel von den Dimensionen und der mittleren Dichte der Erde an: nach den Gesetzen der Hydrostatik muß innerhalb dieser Kugel die Gleichung erfüllt sein:

$$\varrho V - p = C, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

worin ϱ die Dichte, V das Attraktionspotential, p den Druck und C eine gewisse, vorderhand noch unbestimmte Konstante bedeutet. Aus dem ersten Kapitel (§ 6, Gleichung 21) wissen wir, daß innerhalb einer Kugel

$$V = \frac{k\,M}{2\,R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad \ldots \ldots$$

Damit verwandelt sich 1 in:

$$\frac{k\,\varrho\,M}{2\,R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) = C + p \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3$$

Die Konstante C kann aus der Bedingung, daß der Druck in der Oberfläche dem Atmosphärendruck gleich sein soll, bestimmt werden. Diese Bedingung ergibt nämlich sofort:

$$C = k\,\varrho\,\frac{M}{R} - \varrho_h \cdot g_{45} \cdot H, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4$$

worin ϱ_h die Dichte des Quecksilbers, H die mittlere Barometerhöhe im Meeresniveau und g_{45} die Schwere unter 45° Breite bedeutet. Die Attraktionskonstante k können wir mit Hilfe der Relation

$$a = \frac{k\,M}{R^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5$$

worin a die Attraktion in der Oberfläche der Kugel bedeutet, eliminieren. Substituiert man die Werte von C und k aus den Gleichungen 4 und 5 in Gleichung 3, so erhält man:

$$p = \varrho_h g_{45} \cdot H \left[1 + \tfrac{1}{2} \frac{\varrho}{\varrho_h} \frac{R}{H} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 6$$

Der Faktor außerhalb der Klammer ist nichts anderes als der Atmosphärendruck; rechnet man den Druck nämlich in Atmosphären, so kann er einfach der Einheit gleichgesetzt werden. Die Formel 6 wird dann zu:

$$p = 1 + \tfrac{1}{2} \frac{\varrho}{\varrho_h} \cdot \frac{R}{H} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ Atmosphären} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 7$$

Jetzt können wir die numerischen Werte einsetzen: mit $\varrho = 5{,}5$, $\varrho_h = 13{,}6$, $H = 0{,}760$ m, $R = 6\,370\,000$ m folgt:

$$\tfrac{1}{2} \frac{\varrho}{\varrho_h} \cdot \frac{R}{H} = 1\,694\,853.$$

Unter Zugrundelegung dieses Wertes berechnet man aus der Gleichung 7 leicht die folgende Tabelle:

Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des Radius	Druck in Atmosphären
0,00	1 694 854
0,10	1 678 106
0,20	1 627 060
0,30	1 542 317
0,40	1 423 678
0,50	1 271 141
0,60	1 084 707
0,70	864 376
0,80	610 148
0,90	322 023
0,95	165 249
0,99	33 729

Wegen der Annahme, daß die Dichte in allen Tiefen den konstanten Wert 5,5 hat, sind die Drucke in der Nähe der Oberfläche zu groß, in der Nähe des Zentrums zu klein. Hätten wir z. B. angenommen, daß bis zu $r = \frac{1}{2} R$ die Dichte nur die Hälfte der mittleren Dichte betrüge, dann hätten wir bekommen:

Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des Radius	Druck in Atmosphären (abgerundet)
0,50	1165200
0,60	836080
0,70	579140
0,80	364400
0,90	166800
0,95	85930
0,99	16990

Man kann sagen, daß die erste Tabelle gewissermaßen die obere, die zweite die untere Grenze des Druckes zwischen 0,50 und 0,99 des Radius angibt. In den obersten Schichten weichen die Druckverhältnisse schon zu sehr vom hydrostatischen Drucke ab und obige Formeln verlieren ihre Geltung. Deshalb haben wir auch beide Tabellen bei $r = 0{,}99\, R$ abgebrochen. Die obere Grenze des Druckes im Zentrum kann nicht angegeben werden, denn theoretisch kann der Druck daselbst einen unendlichen Wert erreichen, aber unter Annahme von nicht ganz unwahrscheinlichen Dichtegesetzen, wie z. B. denjenigen von Legendre und Laplace, bekommt man ungefähr 3 Millionen Atmosphären.

Welche Eigenschaften die Stoffe unter Drucken von einigen Hunderttausenden von Atmosphären haben, wissen wir nicht, da keine Mittel existieren, solche Drucke in einem Laboratorium zu erzeugen. Es ist sehr wohl möglich, daß die Eigenschaften der Stoffe im Erdinnern in anderen Kombinationen als auf der Erdoberfläche auftreten, daß in gewissen Beziehungen die Stoffe sich wie feste Körper, in anderen wieder wie Flüssigkeiten verhalten. Nur soviel ist gewiß, daß alle Stoffe äußerst komprimiert, und daß infolge äußerster Verdichtung ihre Kompressionskoeffizienten äußerst gering sind.

§ 3. Temperatur der Erdkruste und des Erdinnern.

Die Temperatur des Wassers in großen ozeanischen Tiefen ist sehr niedrig, nur ungefähr $+ 2^0$ C. Der Schlick auf dem Grunde hat dieselbe Temperatur wie das Wasser über ihm, die Temperaturen in der Erdkruste unter dem Meeresboden wurden mit Ausnahme einiger Kohlengruben in England, die bis unter das Meer reichen, nicht gemessen, man darf aber annehmen, daß das Gesetz der Temperaturzunahme mit der Tiefe unter dem Meeresboden sich

nicht grundsätzlich von demjenigen unter dem Lande unterscheidet. Nur ein Merkmal fehlt gewiß, nämlich die jährlichen und täglichen Temperaturschwankungen. Auf dem Lande ist die Temperatur der oberflächlichen Bodenschicht variabel, sie wechselt mit der Zeit, und es sind tägliche und jährliche Schwankungen zu unterscheiden. Über die täglichen Schwankungen können wir uns an dieser Stelle hinwegsetzen, den jährlichen aber müssen wir einige Beachtung schenken. Die Amplitude der Temperaturvariation in der oberflächlichen Bodenschicht ist in der Regel größer als die Amplitude der Temperaturvariationen der Luft einige Meter über dem Boden: dieser erwärmt sich stärker als die Luft infolge der Bestrahlung, er kühlt sich stärker ab (in der Nacht und im Winter) infolge der Ausstrahlung. In heißen Klimaten erreicht oft die Temperatur der sonnenbestrahlten Felsen 70° C und darüber. Infolgedessen sind die Monatsmittel der Bodentemperatur im Sommer höher als die Monatsmittel der Lufttemperatur. Z. B. ist in Nukuss am Amu-Darja (Turkestan) die

	Lufttemperatur in einer Höhe von 3,2 m	Boden-temperatur
Januar	— 10, 2°	— 10, 3°
Juli	+ 15, 9°	+ 19, 4°

In erster Linie hängt die Amplitude der Bodentemperaturvariation von klimatischen Faktoren ab: ceteris paribus ist sie um so größer, je größer die Amplitude der Lufttemperatur am selben Orte, sie ist folglich in Ostsibirien größer als in Mitteleuropa und in Mitteleuropa größer als auf den Sunda-Inseln; außerdem hängt sie ab von der Natur des Bodens, von der Quantität des in den Poren des Bodens enthaltenen Wassers und der Luft und von der Pflanzendecke. Felsen erwärmen sich stärker als poröser Boden, nackte Ackerkrume stärker als mit Pflanzen bewachsene, trockener Boden stärker als feuchter, dunkler stärker als lichter usw.

In kleinen Tiefen, d. h. in Tiefen von einigen Metern, konstatiert man folgende charakteristische Merkmale: 1. Je tiefer, desto später wird das Jahresmaximum und das Jahresminimum der Temperatur erreicht; so ist z. B. in Tiflis*) bis zur Tiefe von 1,65 m August der wärmste Monat, in 3,99 m Tiefe Oktober, und in 6,47 m Dezember; am kältesten auf der Oberfläche und in 0,40 m Tiefe ist Januar, in 0,84 m und 1,65 m Tiefe Februar, in 3,26 und

*) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig 1901, S. 60.

3,99 m April, und in 6,47 m Juni und Juli. 2. Je tiefer, desto kleiner ist die Amplitude der Temperaturvariation; so beträgt z. B. in Tiflis die Amplitude der Lufttemperatur 45,9° C, während die Amplituden der Bodentemperatur in folgender Weise abnehmen:

Temperaturamplituden.

Tiefe in Metern	Grade Celsius
0,01	72,7
0,20	37,3
0,40	31,5
0,84	27,2
1,65	22,8
3,26	17,9
3,99	16,6
6,47	15,3

Beide Merkmale sind nach der Theorie der Wärmeleitung vorauszusehen. Zwar soll nach der Theorie Poissons die Bodentemperaturamplitude in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Tiefe in arithmetischer Progression wächst, während in der Tat die Amplitude nicht so regelmäßig abnimmt; aber der Unterschied zwischen der Theorie und der Wirklichkeit erklärt sich dadurch, daß gewisse Voraussetzungen der Theorie in der Wirklichkeit nicht erfüllt sind. Erstens ist der Boden nicht vollkommen homogen, wie in der Theorie vorausgesetzt wird, zweitens kombiniert sich der Effekt der Wärmeleitung mit demjenigen der Konvektion, während die Theorie von der Konvektion ganz absieht: in den Poren des Bodens zirkulieren Luft und Wasser, die beide Wärme mitbringen und fortführen. Auf den Einfluß von Wasser und Luft im Boden kommen wir weiter unten zurück; vorderhand verweilen wir bei der Abnahme der Amplitude mit der Tiefe. Es ist klar, daß man mit wachsender Tiefe auf einen Horizont kommen muß, in welchem die Amplitude unter 0,1°, dann auf einen, wo sie unter 0,01° sinkt usw. Aus den oben angeführten Zahlen darf man schließen, daß zu Tiflis der erste Horizont etwa in 10,8 m Tiefe, der zweite etwa in 16,2 m Tiefe liegt. Wahrscheinlich gibt es auf der Erde keinen Ort, wo der zweite Horizont sich tiefer als 50 m befände. In äquatorialen Ländern, wo die Temperaturamplitude überhaupt klein ist, befindet sich der Horizont mit der Amplitude 0,01° in der Regel in einer geringen Tiefe, wahrscheinlich bloß einige Meter tief. Man kann sagen, daß

der Horizont mit der Amplitude 0,01° um so tiefer liegt: 1. je größer die Amplitude der Lufttemperatur, 2. je größer die Wärmeleitfähigkeit des Bodens, 3. je tiefer die Wasser- und Luftzirkulation reicht.

Im arktischen Europa, in Asien und Amerika befinden sich ausgedehnte Gebiete mit Eisboden. Eigentlich taut der Boden im Sommer bis zu einer Tiefe von einigen Dezimetern bezw. einem Meter oder mehr auf, so daß die Existenz der Gräser, Stauden und Sträucher, selbst zwerghafter Birken möglich wird. Diese Pflanzen bilden eine besondere Pflanzenformation, die arktische Steppe oder Tundra (richtiger „Trundra"). Unter der im Sommer auftauenden dünnen Oberflächenschicht befindet sich der Eisboden, dessen Temperatur immer unter Null bleibt.

Zu Jakutsk, im sogenannten Scherginschen Brunnen, hat man in 116,5 m Tiefe die untere Grenze des Eisbodens noch nicht erreicht, doch scheint er hier eine ausnahmsweise Dicke zu besitzen. Die Grenze des ewigen Eisbodens verläuft im allgemeinen nördlich der Isotherme 0°.

Betrachten wir jetzt die Jahresmittel der Bodentemperatur. Stationen, an denen die Bodentemperatur regelmäßig gemessen wird oder wurde, sind nicht besonders zahlreich, aber wo immer sie gemessen wurde, hat man in der Regel gefunden, daß die Kurve der Jahresmittel nicht stetig mit der Tiefe zunimmt. Wojejkow*) meint, daß Stationen mit einer stetig ansteigenden Temperaturkurve sich dort finden dürften, wo der Schnee das ganze Jahr über oder wenigstens neun Monate liegen bleibt. Gewöhnlich zeigt die Jahresmittelkurve in einer gewissen Tiefe ein Minimum, zuweilen zuerst ein Maximum, dann ein Minimum, z. B.:

Harestock**) bei Winchester (England).
Fünfjährige Mittel.

Tiefe	Jahrestemperatur
3,05 m	10,27° C
6,10 „	10,35 „
9,14 „	10,37 „
21,34 „	10,00 „

*) Wojejkow, Meteorologische Zeitschrift, Bd. 21 (1904), S. 57.
**) Ibidem, Bd. 22 (1905), S. 41.

Nagoya*) (Japan). Zehnjährige Mittel.

Tiefe	Jahrestemperatur
0,0 m	16,5° C
0,3 „	16,5 „
1,5 „	16,5 „
3,0 „	16,4 „
6,0 „	15,8 „

Tiflis**) (Transkaukasien). Fünfjährige Mittel.

Tiefe	Jahrestemperatur
0,00 m	15,9° C
0,01 „	16,3 „
0,20 „	15,7 „
0,40 „	15,4 „
0,84 „	15,3 „
1,65 „	15,1 „
3,26 „	14,7 „
3,99 „	14,5 „
6,47 „	14,5 „

Weiter wachsen die Jahresmittel mit der Tiefe. Unterhalb des Horizontes, wo die Jahresamplitude unter 0,1° C fällt, lohnt es sich nicht, die augenblickliche Temperatur vom Jahresmittel zu unterscheiden, folglich kann man einfach sagen, daß die Temperatur der Gesteine mit der Tiefe zunimmt. Diese Zunahme ist eine allgemeine Erscheinung, man beobachtet sie in Bohrlöchern, Schächten, Tunnels. Etliche hie und da zitierte Ausnahmen scheinen meist auf schlechten Beobachtungen zu beruhen. Sonst sind sie dem Raume und dem Betrage nach immer gering: es handelt sich immer um kleine Bruchteile eines Grades Celsius. Falls solche Ausnahmen wirklich hie und da existieren, dürften sie auf ähnlichen Ursachen wie das Minimum im Boden (vergl. den nächsten Paragraphen) beruhen. Selbst im Eisboden des Scherginschen Brunnens zu Jakutsk wächst die Temperatur mit der Tiefe. Gewöhnlich wird nicht der Zuwachs der Temperatur mit der Tiefe, sondern dessen reziproker Wert, der sogenannte „geothermische Gradient“ angegeben. Er wird in Metern pro Grad Cels. ausgedrückt, d. h. er gibt an, wieviel Meter man heruntersteigen muß, damit die

---

*) Meteorologische Zeitschrift, Bd. 22 (1905), S. 88.
**) „ „ „ 17 (1900), S. 281.

Temperatur um 1° C zunehme. Der geothermische Gradient ist sehr variabel, und zwar verschieden in verschiedenen Schächten und in verschiedenen Tiefen desselben Schachtes. Die Größe des Gradienten hängt in erster Linie von der Wärmeleitfähigkeit der Gesteine ab. Nach der Theorie der Wärmeleitung hat der Wärmestrom S, welcher in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit vertikal von unten nach oben geht, den Wert

$$S = -k \frac{dT}{dr}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8$$

wobei k den Wärmeleitungskoeffizienten, T die Temperatur und r den Radius bedeutet. Das negative Vorzeichen ist zu setzen, weil der Wärmestrom in der Richtung fließt, in welcher T abnimmt, und trotzdem als eine positive Größe aufgefaßt wird. Laut Definition ist

$$-\frac{dT}{dr} = \frac{1}{G}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9$$

wenn der Gradient mit G bezeichnet wird, folglich kann man den Wärmestrom auch durch die Formel

$$S = \frac{k}{G} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10$$

ausdrücken. Aus dieser Formel können wir einige Schlüsse ziehen. Nehmen wir z. B. zwei Orte mit gleichem Wärmestrom S, aber verschiedenen Leitungskoeffizienten k. Dem größeren Leitungskoeffizienten muß ein proportional größerer Gradient G entsprechen. Nehmen wir ferner einen Ort, wo ein lokaler Wärmeherd, wie ein Vulkan, eine heiße Quelle, ein Gestein, in welchem chemische Prozesse stattfinden oder etwa eine Radiumanhäufung existiert; an einem solchen Orte muß der Wärmestrom S größer und, bei gleichem Leitungskoeffizienten, der Gradient kleiner als das Mittel sein. Folglich kann man im allgemeinen sagen, daß gute Wärmeleitfähigkeit den Gradienten vergrößert und schlechte ihn verkleinert, während die Nähe lokaler Wärmequellen den Gradienten nur verkleinert. Bei der Berechnung des mittleren Gradienten muß man stark von lokalen Wärmequellen beeinflußten Gradienten ein geringeres Gewicht zuteilen.

Es gibt sehr viele Temperaturbeobachtungen in Bergwerken, Bohrlöchern und Tunnels, aber nicht alle sind verläßlich. Bei derartigen Beobachtungen begegnet man zahlreichen technischen

Schwierigkeiten. Ohne verschiedene Vorsichtsmaßregeln ausgeführte Messungen können bis um ganze Grade falsche Temperaturen ergeben. Wir führen hier beispielsweise einige von der „British Association“ veranlaßte und, wie es scheint, mit genügender Vorsicht ausgeführte Messungen an*):

Schacht:	Tiefe, bis zu welcher die Messungen reichen:	Gradient:
Liverpool, Bottlewaterworks . . .	456 m	80,7 m pro 1° C
Carrickferguß (Irland) erster Schacht	252 „	23,5 „ „ „
„ „ zweiter „	187 „	21,9 „ „ „
Hittmine (Northumberland)	216 „	18,6 „ „ „
Außerdem zitieren wir:		
Přibram (Böhmen)	622 „	61,1 „ „ „
Paruschowitz (Schlesien)	1959 „	34,1 „ „ „

Im Bohrloch zu Paruschowitz**) schwankte der Gradient zwischen 31 und 39,6 m, in der Tiefe von 1959 m erreichte die Temperatur 69,3° C. Beachtet man aber, daß die höheren Teile des Bohrlochs sich durch Ausziehen des warmen Schlicks erwärmt haben und nimmt behufs Bildung des mittleren Gradienten nicht die Temperatur 12,1° C in 6 m Tiefe, sondern etwa die mittlere Jahrestemperatur der Luft im benachbarten Rybnik, das ist etwa 7,8° C, dann bekommt man statt 34,1 m einen kleineren Gradienten, nämlich 31,8 m pro Grad Cels. Im Bohrloch von Schladebach bei Dürrenberg (Tiefe 1748 m) beträgt der Gradient zwischen 36 und 1716 m Tiefe 35,7 m und zwischen 1266 und 1716 m, d. i. auf der Strecke, in welche während der Messungen noch kein Rohr eingeführt worden war, beinahe 39,6 m pro Grad Cels. In den Kupferbergwerken auf der Halbinsel Keweenaw am Oberen See (Nordamerika) sind die Gradienten sehr groß: 41,9, 52,0, 54,5, 55,2, 60,6, 66,7 m in verschiedenen Schächten, in dem tiefsten (1396 m), dem Heklaschacht sogar 122,8 m. Dem könnte man zahlreiche Kohlengruben und andere Bergwerke, in denen der Gradient nur etliche 15—20 m beträgt, gegenüberstellen.

---

*) Man darf nicht etwa meinen, daß die hier zitierten Daten die einzigen zuverlässigen sind, es sind nur Beispiele. — Daten bis 1884 wurden von Prestwich (On Underground Temperatures. Proc. R. Soc., Bd. XLI, Nr. 246), von 1884 bis 1904 von L. Jaczewski (О термическомъ режимѣ поверхности земли Petersburg 1905) zusammengestellt.

**) Tiefe des Bohrlochs 2003 m.

Als mittleren Gradienten für die ganze Erde werden wir **35 m** pro Grad Cels. annehmen. Wir dürfen aber nicht vergessen, daß diese Zahl sich auf Beobachtungen stützt, die nur in einem Falle (Paruschowitz) bis zu 2 km Tiefe reichen; sie kann somit höchstens für diese 2 km gelten. Wie der Gradient weiter nach dem Erdzentrum hin variiert, wissen wir nicht. Bliebe er konstant, so müßte die Temperatur im Zentrum ungefähr 182 000° C betragen.

Noch vor etwa dreißig, vierzig Jahren hat man solche Temperaturen für wahrscheinlich gehalten, — aber dies war eine Zeit, wo man überhaupt mit den Zahlenverteilungen nicht kargte, wo man die Temperatur der Sonne auf einige Millionen Grad Cels. schätzte — warum sollte man der Erde nicht ein paar hunderttausende schenken? Aber gegenwärtig müssen wir mit solch hohen Temperaturen sparsam sein. Sie wurden auf Grund des sogenannten „Newtonschen Ausstrahlungsgesetzes“, nach welchem die ausgestrahlte Wärme der Temperatur einfach proportional sein sollte, berechnet. Zwar wußte Newton von einem solchen Gesetze nichts; seine Versuche bezüglich der Abkühlung heißer Körper durch den Wind bezogen sich auf eine andere Frage, aber das obenerwähnte Gesetz ging unter der Flagge Newtons und wurde vielfach angewendet. Jetzt wissen wir, daß jenes Gesetz falsch ist und benutzen ein anderes Gesetz, dasjenige von Stefan*), nach welchem die ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz der Temperatur proportional ist. Berechnet man die Temperatur der strahlenden Sonnenschicht auf Grund des Stefanschen Gesetzes, so bekommt man keinesfalls mehr als 6000 bis 6500° C. Zwar muß man sagen, daß im Innern der Sonne höhere Temperaturen vorhanden sein können, doch die Tatsache, daß dort, wo man Millionen vermutete, jetzt Tausende ausreichen, mahnt uns zur Bescheidenheit in der Schätzung der Erdtemperatur.

Man kann sich vorstellen, daß der Gradient in der Richtung nach dem Erdzentrum zunimmt, aber das Gesetz dieser Zunahme und überhaupt der Temperaturzustand des Erdinnern sind uns unbekannt; das einzige, was wir sicher wissen, ist, daß in einer Tiefe von dreißig, vierzig Kilometern Temperaturen von ungefähr 1000

*) Das Stefansche Gesetz gilt eigentlich für einen absolut schwarzen, d. h. alle Strahlen absorbierenden Körper. Bei reellen Körpern wächst die Ausstrahlung noch etwas rascher als die vierte Potenz der Temperatur.

bis 1200° C. vorhanden sein müssen, da die Lava, die aus diesen Tiefen kommt, solche Temperaturen besitzt.

Kehren wir also zu den oberen Schichten der Erdkruste zurück, von denen doch etwas Positives bekannt ist, und fragen, wie die Geoisothermen, d. i. die Flächen konstanter Temperatur, aussehen. Schon daraus, daß der Gradient an den einzelnen Orten so verschieden ist, ersieht man, daß diese Flächen unregelmäßig sein müssen. Sie weichen von den Niveauflächen nicht unwesentlich ab und nur die obersten derselben passen sich bis zu einem gewissen Grade der physischen Oberfläche an, ohne jedoch parallel zu werden. Im Simplontunnel, der in der Höhe von 638 bis 705 m verläuft, erreicht die Temperatur der Gesteine 53,6° C; unter dem Boden der Tongarinne in 9636 m Tiefe ist sie gewiß nicht höher als 1,5 bis 2,0° C und 53,6° C dürften wir erst 1820 m unter dem Meeresboden, d. h. ungefähr 12 100 bis 12 200 m unter dem Niveau des Simplontunnels finden. Im allgemeinen müssen die Geoisothermen verhältnismäßig tiefer liegen: 1. unter dem Meeresboden, denn die Temperatur des Tiefenwassers ist sehr niedrig; 2. im arktischen und antarktischen Polargebiete. Die Geoisothermen folgen dichter aufeinander dort, wo die Wärmeleitfähigkeit der Gesteine relativ klein ist, oder wo sich lokale Wärmeherde, wie Vulkane, heiße Quellen usw. befinden, sie entfernen sich voneinander, wo die Leitfähigkeit der Gesteine relativ groß ist. Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Geoisothermen in der Tiefe einen glatteren Verlauf haben als dicht unter der Oberfläche.

§ 4. Das Minimum der Temperatur in der Nähe der Erdoberfläche.

Schon im vorigen Paragraphen haben wir gesagt, daß beinahe überall in geringer Tiefe unter der Oberfläche sich eine Schicht befindet, deren Jahrestemperatur niedriger ist als die Temperatur der darunter und der darüber liegenden Schichten. In einem Diagramm, in welchem die Abstände vom Zentrum als Abszissen und die zugehörigen Temperaturen als Ordinaten aufgetragen sind, stellt sich das uns bekannte Stück der Temperaturkurve als eine in der Richtung vom Erdinnern gegen die Oberfläche stetig abfallende Kurve dar; doch dicht unter der Oberfläche hört das Abfallen auf und die Kurve steigt wieder ein klein wenig an. Auf Grund der Theorie der Wärmeleitung kann diese Erscheinung nur

so gedeutet werden, daß auf diesem Stück der resultierende Wärmestrom nicht von innen nach außen, sondern von außen nach innen, d. h. von der Oberfläche zum Minimum fließt. In der Tat ist, wie aus den Beobachtungen folgt,

$$\frac{dT_m}{dr} > 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11$$

wobei T_m die mittlere Temperatur bedeutet. Es ist aber

$$T_m = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12$$

wobei τ ein Jahr oder mehrere ganze Jahre bedeutet und die Variabeln r und t voneinander unabhängig sind, so daß die Ungleichheit 11 folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dT}{dr} dt > 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13$$

Bekanntlich verändert sich eine Ungleichheit nicht, wenn beiderseits mit einer positiven Größe multipliziert wird; wir multiplizieren mit $k\tau$ und bekommen:

$$\int_0^\tau k \frac{dT}{dr} dt > 0$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 8:

$$\int_0^\tau S dt < 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14$$

Also würde im Jahresdurchschnitt der von oben nach unten gerichtete sommerliche Wärmestrom über den von unten nach oben gerichteten winterlichen Strom die Oberhand behalten und im Endergebnis würde Wärme dem Minimum zufließen. Jenseits des Minimums aber steigt die Temperaturkurve mit der Tiefe und der resultierende Wärmestrom ist von unten nach oben gerichtet. Auf diese Weise bekäme die Schicht mit der minimalen Jahrestemperatur Wärme von beiden Seiten, von oben und von unten. Wo geht diese Wärme verloren? Warum bleibt trotz dieses Wärmezuflusses das Minimum bestehen?

Es ist klar, das unsere Fundamentalannahme falsch ist: der Wärmeumsatz in den oberen Schichten der Erdkruste läßt sich

auf Grund der Theorie der Wärmeleitung nicht erklären, man muß die Konvektion berücksichtigen. Nun aber ist aus anderen Gründen evident, daß die Konvektion im Boden eine wichtige, in den obersten Schichten wahrscheinlich die Hauptrolle spielt. Der Erdboden ist porös und enthält viel Luft und Wasser, die in den Poren zirkulieren und Wärme mit sich führen*).

Wenn die Leitung und die Konvektion gleichzeitig wirken, so ist der Ausdruck für den Wärmestrom S, welcher in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit geht, im einfachsten eindimensionalen Falle nicht mehr $S = -k\frac{dT}{dr}$, sondern

$$S = -k(1-\lambda)\frac{dT}{dr} + \lambda c \varrho u T, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

wobei die bereits erwähnten Symbole dieselbe Bedeutung haben wie früher, während u die Geschwindigkeit des Wassers, c dessen Wärmekapazität und ϱ die Dichte bedeutet. Außerdem ist λ ein positiver, echter Bruch, welcher von der Porosität abhängt. Der Einfachheit halber wurde vorausgesetzt, daß die Poren nur Wasser enthalten und vollständig gefüllt sind. Nebenbei sei bemerkt, daß für Wasser $c\varrho = 1$ gesetzt werden kann.

Mit dem neuen Ausdruck für den Wärmestrom kann der Jahresdurchschnitt des Wärmeumsatzes überall negativ sein, d. h. der integrale jährliche Wärmestrom kann überall von unten nach oben gerichtet sein, ungeachtet dessen, daß die Kurve der jährlichen Temperaturmittel in einem gewissen Intervalle abfällt und in einem anderen aufsteigt. In der Tat läßt sich die Behauptung, daß der integrale Wärmestrom überall von unten nach oben gerichtet ist, durch die Ungleichheit

$$\int_0^\tau S\,dt = \int_0^\tau \left[-k(1-\lambda)\frac{dT}{dr} + \lambda u T\right] dt > 0 \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

ausdrücken. Es ist klar, daß diese Ungleichheit sich ebensogut mit der Ungleichheit

$$\int_0^\tau \frac{dT}{dr}\,dt > 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

*) In der Landwirtschaft nimmt man an, daß durchschnittlich 40 Proz. des Volumens des Erdbodens auf die Poren entfallen. Die Porosität nimmt im allgemeinen mit der Tiefe ab.

wie mit der Ungleichheit

$$\int_0^\tau \frac{dT}{dr}\,dt < 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18$$

vertragen kann. Es kommt nämlich alles auf den entsprechenden Wert des Integrals

$$\int_0^\tau u\,T\,dt$$

in der Ungleichheit 16 an. Dieses Integral kann aber verschiedene positive und negative Werte annehmen, denn u wechselt das Vorzeichen mehrmals während eines Jahres. Mit der Ungleichheit 17 muß sich die Ungleichheit 16 im ganzen aufsteigenden und mit der Ungleichheit 18 im ganzen absteigenden Aste der Kurve der Jahrestemperaturmittel vertragen.

Von einem anderen Standpunkte aus könnte man das Gesagte auch folgendermaßen ausdrücken. Dem Wasser ist ein anothermes (Temperaturzunahme nach oben) Temperaturgesetz eigen*); in einem absolut porenlosen und trockenen Gestein wäre nur die Wärmeleitung wirksam und das Temperaturgesetz wäre ein katothermes (Temperaturzunahme nach unten); im porösen wasserhaltigen Boden kommt ein Kompromiß zwischen beiden Temperaturgesetzen zustande und die resultierende Temperaturkurve weist ein Minimum auf, indem in den obersten Schichten des Bodens die anotherme Temperaturverteilung des Wassers und in den tieferen die katotherme des Gesteins die Oberhand gewinnt.

Infolge geringer Wärmekapazität ist die Rolle der Luft nur eine sekundäre, ausschlaggebend ist das Wasser.

Anders gestalten sich die Verhältnisse unter dem Ozean: Wasser ist reichlich vorhanden, aber es gibt keine periodischen Temperaturwechsel. Abgesehen von säkulären Variationen, die übrigens äußerst langsam sein müssen, dürften die Temperaturen von Tag zu Tag und von Jahr zu Jahr konstant sein. Es ist zu erwarten, daß unter dem Meeresboden die Temperaturkurve bis zur Oberfläche stetig abfällt (katothermes Temperaturgesetz). Auf eine experimentelle Bestätigung dieses Postulates der Theorie werden wir wahrscheinlich noch lange warten müssen.

---

*) Der Einfachheit halber sprechen wir nur von mittleren Temperaturen.

§ 5. Der Wärmeverlust der Erde.

Schon im vorigen Paragraphen haben wir die Behauptung ausgesprochen, daß der integrale jährliche Wärmestrom überall von unten nach oben gerichtet ist; wo das Temperaturgefälle ihm zuwiderläuft, hilft die Konvektion zum Wärmetransport nach oben. — Einen zwingenden Grund zu dieser Behauptung sehen wir darin, daß in tieferen, aber der Forschung noch zugänglichen Schichten der Erdkruste der Wärmestrom überall von unten nach oben gerichtet ist. Diese Wärme muß nach außen strömen, sie muß auf diese oder jene Weise durch die obersten Bodenschichten in die Atmosphäre befördert werden. Nun wollen wir diese Wärme berechnen. — Wir wissen bereits, daß die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer horizontalen Fläche hindurchgeht, durch die Formel

$$\frac{k}{G}$$

(vergl. Formel 10, § 3) ausgedrückt wird. Für k werden wir den mittleren Wert Lord Kelvins (W. Thomsons) für Gesteine annehmen, d. h. in C. G. S.-Einheiten $k = 0{,}00\,582$ setzen (das ist beinahe genau der Wärmeleitungskoeffizient des Feldspates). Wir haben in § 3 $G = 35$ m gesetzt, folglich müssen wir jetzt $G = 3500$ cm schreiben. Auf diese Weise finden wir, daß die Wärmemenge, welche in einer Sekunde durch einen Quadratzentimeter einer Horizontalfläche vertikal von unten nach oben geht, $\frac{0{,}00\,582}{3500}$ Grammkalorien beträgt. Da das Jahr ungefähr 31,5 Millionen Sekunden zählt, so ist der integrale Wärmestrom während eines Jahres auf ungefähr

$$\frac{0{,}00\,582 \times 315 \times 10^5}{3500} = 52 \text{ Grammkalorien}^{*)}$$

zu berechnen. Um dem Leser eine Vorstellung darüber zu geben, wie klein diese Größe eigentlich ist, bemerken wir, daß ein Quadratzentimeter der Erdoberfläche in Warschau (52° 13′ nördl. Br.) in einem Jahre von der Sonne ungefähr tausendmal**) soviel Wärme erhält.

---

*) Eine Grammkalorie ist diejenige Wärmemenge, welche ein Gramm Wasser von 15° C auf 16° C erwärmt.

**) Nämlich 1903 — 36 890, 1904 — 54 230 und 1905 — 50 920 Grammkalorien nach W. Gorczyński, Sur la marche annuelle de l'intensité du

So klein dieser Verlust ist, so beständig ist er. Jahraus jahrein verliert die Erde Wärme, wie ein jeder Körper, der von einem kälteren Medium umgeben ist. Es ist aber eine andere Frage, ob die Temperatur der Erde abnimmt.

Die tägliche Erfahrung lehrt uns, daß bei kleinen Körpern „Wärmeverlust" mit „Temperaturabnahme" Hand in Hand geht. Im täglichen Gespräch gelten diese Worte als Synonyme und doch sind sie nicht gleichbedeutend. — Wenn wir im Alltagsleben keine Gelegenheit haben, eine Temperaturzunahme bei einem wärmeverlierenden Körper zu konstatieren, so liegt dies einzig daran, daß die Arbeit der Attraktion bei kleinen Körpern verschwindend klein ist; bei großen Körpern ist sie im Gegenteil groß und kann nicht außer acht gelassen werden. Um das zu zeigen, denken wir uns folgendes Beispiel*). Denken wir uns eine kleine eiserne Kugel, deren Temperatur überall die gleiche ist, und nehmen wir an, daß jedes Gramm Eisen 0,114 Grammkalorien verliert. Da die Wärmekapazität des Eisens nämlich 0,114 Grammkalorien per Gramm beträgt, wird die Temperatur der Kugel überall um 1° C abnehmen. Gleichzeitig wird der Radius der Kugel um 0,000 012 seiner anfänglichen Länge abnehmen, da der lineare Ausdehnungskoeffizient des Eisens 0,000 012 beträgt. Nehmen wir jetzt eine Eisenkugel von der Größe der Erde an und setzen wir ebenfalls voraus, daß ihre Temperatur überall dieselbe ist, weiter, daß jedes Gramm Eisen 0,114 Grammkalorien verliert. Nach den gewöhnlichen Regeln der Kalorimetrie würden wir schließen, daß die Temperatur der Kugel überall um 1° C abgenommen und ihr Radius sich um 0,000 012 seiner Länge, d. i. um 76,44 m verkürzt hat. Aber bei einer so großen Kugel, wie die Erde, kann die Kontraktionsarbeit der Attraktion nicht vernachlässigt werden: wir werden sofort sehen, daß diese Arbeit mehr Wärme liefert, als der gesamte Verlust infolge der Temperaturabnahme um 1° C beträgt.

---

rayonnement . . . S. 180 (Warschau 1906). Das ist diejenige Wärmemenge, welche der Boden tatsächlich erhielt, also nach Abzug all der Wärme, welche durch Reflexion von den Wolken, durch Absorption in der Atmosphäre usw. für den Erdboden verloren ging. Behufs weiteren Vergleichs ist zu sagen, daß unter Annahme der Sonnenkonstante von Scheiner (2,25 Grammkalorien pro Minute) die Wärme, welche die Sonne während eines Jahres aussendet, ungefähr 114×10^{11} mal so groß sein dürfte als diejenige Wärme, welche die ganze Erde während eines Jahres aussendet.

*) R. Emden, Gaskugeln, S. 380, Leipzig 1907.

Zuerst müssen wir diesen Verlust berechnen. Mit einer Dichte von 7,7 berechnet sich die Masse einer Eisenkugel von der Größe der Erde zu 834×10^{25} g; wenn jedes Gramm 0,114 Grammkalorien Wärme verliert, so stellt sich der Verlust der ganzen Kugel auf 951×10^{24} Grammkalorien.

Sodann haben wir die Wärme, welche durch Umwandlung der Kontraktionsarbeit*) gewonnen wird, zu berechnen. Das Potential einer Kugel von der Masse μ und dem Radius r auf eine Masseneinheit, die sich ebenfalls im Abstand r vom Zentrum der Kugel befindet, ist:

$$k \frac{\mu}{r},$$

wobei k die Attraktionskonstante bezeichnet. Folglich ist das Potential der Attraktion der Kugel auf eine Schicht von der Masse $d\mu$:

$$k \cdot \frac{\mu}{r} d\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19$$

Nun ist aber:

$$\mu = \frac{4}{3} \pi \varrho r^3 \text{ und } d\mu = 4 \pi \varrho r^2 dr.$$

Demnach kann der Ausdruck 19 folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{k}{3} (4 \pi \varrho)^2 r^4 dr$$

und das Potential der ganzen Kugel auf sich selbst ist:

$$\frac{k}{3} \int_0^R (4 \pi \varrho)^2 r^4 dr$$

oder, da ϱ konstant angenommen wurde:

$$\frac{k}{3} (4 \pi \varrho)^2 \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} k \frac{M^2}{R}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 20$$

wo M die Masse der ganzen Kugel und R den Radius ihrer Oberfläche bezeichnet. Wenn der Radius der Kugel um ΔR wächst, so erhält das Potential den Zuwachs:

$$-\frac{3}{5} \cdot k M^2 \cdot \frac{\Delta R}{R^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 21$$

*) Wenn die Kugel sich zusammenzieht, so fallen die einzelnen Teilchen um gewisse Strecken nach dem Zentrum zu und leisten auf diese Weise eine gewisse Arbeit.

d. h. bei Ausdehnung wird Energie gebunden, bei Kontraktion frei. In unserem Falle ist $\varDelta R = -0{,}000\,012\,R$, die Attraktionskonstante k hat (in C. G. S.-Einheiten) nahezu den Wert $\frac{2}{3} \cdot 10^{-7}$, die Masse der Kugel wurde oben berechnet, endlich ist $R = 637 \times 10^6$ cm. Auf Grund dieser Zahlen berechnet sich die freigewordene Energie zu 524×10^{32} Erg, oder, da ein Erg $= 2{,}4061 \times 10^{-8}$ Grammkalorien, zu 126×10^{25} Grammkalorien. Wir haben die ganze durch die Kontraktion freigewordene Energie in Wärme verwandelt, da erfahrungsgemäß die mechanische Energie in Wärme verwandelt wird. Es wäre aber möglich, daß ein Teil der Energie eine andere Form annimmt (z. B. der elektrischen oder magnetischen Energie).

Fassen wir jetzt unsere Resultate zusammen: einerseits haben wir gefunden, daß infolge der Abkühlung um 1° C die Kugel $95{,}1 \times 10^{25}$ Grammkalorien verloren hat, andererseits haben wir gefunden, daß durch Kontraktion infolge der Abkühlung die Kugel 126×10^{25} Grammkalorien, d. i. 1,3 mal so viel, gewonnen hat. Nach den Regeln der Kalorimetrie würde man daraus schließen, daß die Temperatur der Kugel überall um 1,3° C zugenommen hat. Es ist klar, daß wir in eine Reihe von Gegensätzen verfallen sind und daß die Regeln der Kalorimetrie für Körper von der Größe der Erde*) nicht gelten. Mehr als dies können wir ohne Kenntnis der Zustandsgleichungen fester und flüssiger Körper nicht sagen. Wir können selbst nicht entscheiden, ob eine genügend große Eisenkugel durch Wärmeabgabe heißer oder kälter wird, d. h. ob ihre Temperatur steigt oder fällt. Nur ein Grund scheint dafür zu sprechen, daß die Erde durch Wärmeabgabe doch kälter wird. Es

---

*) Auf Grund der Formel 21 kann man leicht einen Ausdruck für das Verhältnis zwischen der Kontraktions- und der Abkühlungswärme finden. Bezeichnet man mit α den linearen Ausdehnungskoeffizienten, mit β das Verhältnis des Ergs zur Grammkalorie und mit c die Wärmekapazität, so ist die erste Wärme:

$$\frac{3}{5} k \alpha \beta \frac{M^2}{R},$$

die zweite:

$$Mc$$

und das Verhältnis der ersten zur zweiten:

$$\frac{3}{5} k \frac{\alpha \beta}{c} \cdot \frac{M}{R} = 1{,}28 \times 10^{-15} \cdot \pi \varrho \frac{\alpha}{c} R^2.$$

Man sieht, daß das betreffende Verhältnis mit dem Quadrate der linearen Dimensionen wächst, und begreift, warum die Kontraktionswärme bei kleinen Körpern einen verschwindenden, bei großen einen so wichtigen Einfluß ausübt.

ist wohl möglich, daß unter dem enormen Druck, der im Erdinnern herrscht, die Wärmeausdehnungskoeffizienten relativ sehr klein sind, dann könnte (vergl. die Formel in der Fußnote auf S. 121) das Verhältnis zwischen Kontraktions- und Abkühlungswärme doch für erstere ungünstig sein, und die Wärmeabgabe wäre von Temperaturabnahme begleitet. Wir halten diese Vermutung für wahrscheinlich, doch ist es bloß eine Vermutung, und man kann darauf nichts Sicheres bauen.

Die berühmte Abhandlung Lord Kelvins von der Abkühlung der Erde stützt sich auf die Fouriersche Theorie der Wärmeleitung, in welcher die Kontraktionswärme total vernachlässigt wird. Kelvin selbst hat in seiner Abhandlung das Alter der Erde geschätzt, andere haben auf Grund seiner Formeln die Kontraktion der Erde berechnet. Leider müssen wir alle diese Schlüsse und Rechnungen als ganz unsicher bezeichnen.

Aber den Todesstoß hat die Entdeckung des Radiums der Theorie Kelvins gegeben. Die Gesteine enthalten Radium. Es ist möglich, daß die Dissoziation des Radiums jährlich mehr Wärme liefert, als die Erde durch Ausstrahlung verliert; und man weiß selbst nicht einmal, ob der Wärmevorrat der Erde ab- oder zunimmt.

§ 6. **Das Radium.**

Die Rolle des Radiums im Wärmehaushalt der Erde ist noch nicht aufgeklärt. Man weiß, daß kolossale Energiemengen im Radium aufgespeichert sind; in einem Gramm so viel wie nötig ist, um 567 700 t ein Meter hoch zu heben. Diese Wärmemenge ist äquivalent 133×10^7 Grammkalorien, d. i. derjenigen Wärmemenge, welche in einem Jahre durch 2550 qm der Erdoberfläche entweicht. Auf die Dissoziation des Radiums und alle die Vorgänge, die damit verbunden sind, brauchen wir hier nicht einzugehen, wir brauchen nur zu sagen, daß diese Dissoziation von Wärmeentwicklung begleitet ist: Rutherford hat gefunden, daß ein Gramm Radium 202 Grammkalorien in einer Stunde liefert.

Nach J. Joly*) enthalten die Eruptivgesteine durchschnittlich 5 bis 6×10^{-12} g Radium pro Gramm Substanz und die sedimentären Gesteine 4 bis 5×10^{-12}. Er gibt folgende Daten an:

*) J. Joly, Uranium and Geology. Nature Bd. 78, Nr. 2028, S. 456—466.

Gestein	Anzahl der Proben	Gramm Radium in einem Gramm Gestein
Basalte	14	$5{,}0 \times 10^{-12}$
Granite	6	$4{,}1 \times 10^{-12}$
Syenite	1	$6{,}8 \times 10^{-12}$
Gneise von der Insel Lewis	3	$5{,}7 \times 10^{-12}$
Gesteine aus dem Simplontunnel	32	$7{,}6 \times 10^{-12}$
„ „ „ St. Gotthard	32	$5{,}1 \times 10^{-12}$
Schiefer, Sandstein und Konglomerate	10	$4{,}7 \times 10^{-12}$
Kambrische und devonische Schiefer	—	$4{,}7 \times 10^{-12}$
Schlamm aus dem Amazonenstrom	—	$3{,}2 \times 10^{-12}$
Kreide	—	$4{,}2 \times 10^{-12}$
Grüner Sandstein	—	$4{,}9 \times 10^{-12}$
Grüner Sand	—	$4{,}5 \times 10^{-12}$
Kalksteine und Dolomite	7	$4{,}1 \times 10^{-12}$
Gips (der Triasformation)	—	$6{,}9 \times 10^{-12}$
Korallenfels aus Funafuti (rezentes Atoll)	4	$1{,}7 \times 10^{-12}$
Trias- und Juragesteine aus dem Simplon	17	$6{,}9 \times 10^{-12}$
Trias- und Juragesteine aus dem St. Gotthard	19	$4{,}2 \times 10^{-12}$
Globigerinenschlamm	—	$7{,}2 \times 10^{-12}$
Radiolarienschlamm	—	$36{,}7 \times 10^{-12}$
Roter Tiefseeton (Red Clay)	—	$33{,}3 \times 10^{-12}$

Unter den Gesteinen, welche J. R. Strutt*) untersucht hat, war der Basalt aus Ovifak (Insel Disco) am radiumärmsten und ein Granit aus Rhodesien (Südafrika) am reichsten. Der erste enthielt $1{,}84 \times 10^{-12}$ g Radium pro ccm, der zweite $25{,}2 \times 10^{-12}$ g pro ccm, resp. $0{,}6 \times 10^{-12}$ g und $9{,}3 \times 10^{-12}$ g Radium pro Gramm Gestein, wobei die Dichte des Basaltes zu 3 und diejenige des Granits zu 2,7 angenommen worden ist.

Strutt nimmt einen kleineren geothermischen Gradienten an als wir, nämlich 23,28 m pro 1° C. Infolgedessen ist sein jährlicher Wärmeverlust im Verhältnis $\frac{35}{23{,}28} = 1{,}5$ mal so groß wie derjenige,

*) J. R. Strutt, On Radium in the Earths Crust and the Earths internal Heat. Proc. R. S. Ser. A, Bd. 77 (1906), S. 472—485.

den wir in § 3 berechnet haben. Trotzdem hat er gefunden, daß schon ein Gehalt von $0{,}175 \times 10^{-12}$ g Radium pro Kubikzentimeter der Erde hinreicht, um die jährliche Wärmeentwicklung aus dem Radium den jährlichen Wärmeverlust durch Ausstrahlung zu decken. Indes enthalten die Gesteine im Mittel bedeutend mehr Radium als $0{,}175 \times 10^{-12}$ g pro ccm. Aus den Daten Jolys folgt, daß 5×10^{-12} g Radium pro Gramm Gestein, bezw. — unter Voraussetzung einer mittleren Dichte von 2,6 — 13×10^{-12} g Radium pro Kubikzentimeter Gestein kein zu hoch gegriffenes Mittel ist. Das ist aber ein 74 mal so großer Gehalt Radium wie nach Strutt zur Deckung des Wärmeverlustes der Erde nötig ist. Strutt stellt eine ähnliche Rechnung an und kommt zum Schluß, daß nur die Erdkruste bis zu etwa 72 km Tiefe Radium enthält. Er nimmt weiter an, daß die Temperatur nur in der radiumhaltigen Schicht, und zwar nach einem parabolischen Gesetze, zunimmt. In 72 km Tiefe erreicht sie 1530° C; darüber hinaus bis zum Erdzentrum herrscht dieselbe Temperatur 1530° C.

In der Hypothese Strutts fällt sofort auf, daß die Annahme bezüglich der Abwesenheit des Radiums im Erdinnern eigentlich willkürlich ist; als einziges sachliches Argument kann Strutt anführen, daß von ihm untersuchte Meteoriten keine oder nur Spuren von Radium enthielten. Das ist gewiß zu wenig.. Strutt scheint zur Richtschnur seiner Hypothese die Idee genommen zu haben, daß die aus der Dissoziation des Radiums entstammende Wärme den jährlichen Wärmeverlust der Erde durch Ausstrahlung in den Weltraum aufwiegt. Gewiß beobachten wir in der Natur sehr viele nahezu stationäre Prozesse, in denen die Einnahme und die Ausgabe einander die Wage halten; aber keine überzeugenden Gründe widersetzen sich der Annahme, daß die Wärmeerzeugung durch Radium vom Wärmeverlust durch Ausstrahlung überflügelt wird. Noch wahrscheinlicher ist die entgegengesetzte Hypothese, daß das Erdinnere auch Radium enthält, daß die jährliche Wärmeproduktion aus dem Radium den jährlichen Wärmeverlust der Erde durch Ausstrahlung mit Überschuß deckt und daß der Wärmevorrat der Erde gegenwärtig wächst.

Wahrscheinlich hat Strutt vor einer so kühnen, alle bisherigen Anschauungen über den Wärmehaushalt der Erde auf den Kopf stellenden Hypothese zurückgeschreckt; anders können wir uns nicht erklären, warum er sich auf die Hypothese eines genauen Gleichgewichtes zwischen Gewinn und Verlust der Wärme beschränkt hat.

Wir glauben aber, daß die Zeit, Hypothesen hierüber aufzustellen, noch nicht gekommen ist; soviel ist gewiß, daß allen älteren Theorien der Boden entzogen wurde, aber eine Grundlage für eine plausible neue Theorie gibt es noch nicht: man muß warten, bis die Zukunft neue Tatsachen bringt und neue Gesichtspunkte eröffnet.

Woher kommt das Radium? Seine Dissoziation dauert ungefähr ein paar tausend Jahre, und da man doch nicht annehmen kann, daß das Radium erst vor einigen hundert Jahren begonnen hat, zu zerfallen, so muß man eine Quelle suchen, aus welcher sich die Radiumvorräte erneuern. Diese Quelle scheint das Uran zu sein, aus welchem durch Vermittlung einiger Zwischenprodukte Radium entsteht. Die Herkunft des Radiums ist aber noch nicht ganz klargestellt. — Welche Vorräte von Uran die Erde besitzt, ob das Uran im Erdinnern enthalten ist, wissen wir nicht. Nur so viel wissen wir, daß die Dissoziation des Urans äußerst langsam fortschreitet. Nach Joly wird in einem Jahre nur ungefähr $\frac{1}{10^{10}}$ des Urans in Dissoziationsprodukte verwandelt; bis das Uran gänzlich schwindet, können also viele geologische Epochen vergehen.

Bei dieser Gelegenheit mag erwähnt werden, daß die Entwicklung des Heliums aus radioaktiven Mineralien Anhaltspunkte zur Schätzung des Alters der Gesteine liefern kann. Versuche in dieser Richtung hat Strutt angestellt. Er hat große Zahlen gefunden, so z. B. für ein Eisenerz aus dem Eozän der Grafschaft Antrim (Irland) dreißig Millionen Jahre*). Doch sind seine Zahlen von derselben Größenordnung wie diejenigen, die mit anderen Methoden gefunden wurden.

§ 7. Hypothesen über den Zustand des Erdinnern.

Daß die Drucke im Erdinnern sehr groß sind, darüber besteht kein Zweifel. Auch die Temperaturen sind hoch, doch wahrscheinlich nicht so hoch, wie man etwa vor fünfzig Jahren meinte. Im Hinblick auf die großen Drucke kann man behaupten, daß der Stoff im Erdinnern sehr stark verdichtet und kaum noch einer weiteren Verdichtung fähig ist, mit anderen Worten also, daß die Kompressibilitätskoeffizienten sehr klein sind. Gewiß ist der Zustand

---

*) J. R. Strutt, The Accumulation of Radium in geological Time. Nature Bd. 82 (1909) S. 58.

der Stoffe im Erdinnern in vieler Hinsicht vom Zustande auf der Erdoberfläche verschieden*). Es können Kombinationen von Eigenschaften auftreten, die auf der Oberfläche ganz unbekannt sind. Die üblichen, auf der Erdoberfläche so bezeichnenden Ausdrücke „gasförmig, flüssig, fest“ dürfen eigentlich auf das Erdinnere nicht angewandt werden, denn wahrscheinlich haben sie dort keinen Sinn. — Eine nicht aus der Luft gegriffene Vorstellung von den physikalischen Eigenschaften des Erdinnern kann man nur auf Grund einiger der Beobachtung zugänglichen, von den Eigenschaften des Erdinnern abhängigen Erscheinungen gewinnen. Diese Erscheinungen liefern naturgemäß ein beschränktes Bild, trotzdem weist es auf eine ungeahnte Kombination von Eigenschaften hin, denn einige von ihnen können so gedeutet werden, als ob das Erdinnere ein fester und starrer, andere, als ob das Erdinnere ein plastischer Körper wäre.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die Hypothese, daß die Erde aus einer dünnen, festen Kruste und einem großen — wie man damals sagte — „feurigflüssigen“ Kern besteht, allgemein verbreitet. Man sagte sich, daß, wenn die Temperatur mit je 35 m Tiefe um 1° C zunimmt, sie in der Tiefe von 40—50 km die Schmelztemperatur der Gesteine erreichen müsse. Unterhalb dieses Horizontes müsse der Stoff sich im flüssigen Zustand befinden. Es wurde selbst die Hypothese aufgestellt, daß näher zum Zentrum ein gasförmiger Kern existiere. Diese Ansicht wurde vor nicht langer Zeit von S. Günther vertreten. Natürlich dachte sich Günther das Gas als äußerst verdichtet. — Das Ausfließen der Lava aus den Vulkanen bot der Hypothese vom flüssigen Erdinnern eine zweite Stütze und die sphäroidale Figur der Erde eine dritte, da bekannterweise ein schwach abgeplattetes Sphäroid die Gleichgewichtsfigur eines flüssigen Weltkörpers ist.

Zu diesen drei Argumenten könnte man ein viertes, neues hinzufügen, nämlich daß manche geologische Prozesse so verlaufen, als ob die Erde plastisch wäre. Doch sind alle diese Argumente

*) Beispielsweise haben die Untersuchungen Tammanns (Kristallisieren und Schmelzen, Leipzig 1903) gezeigt, daß, während bei mäßigem Druck die meisten Körper (als Ausnahmen sind nur Wasser und Wismut bekannt) im kristallinen Zustand ein kleineres spezifisches Volumen haben als im amorphen, bei hohem Druck das umgekehrte Verhältnis sich einstellt. Durch Extrapolation hat man den Druck, unter welchem diese Änderung bei Silikaten zustande kommen muß, auf 40000 bis 100000 Atmosphären berechnet.

nicht zwingend. Der geothermische Gradient kann mit der Tiefe wachsen und gleichzeitig kann die Temperatur unterhalb der Schmelztemperatur bleiben, um so mehr, als die Schmelztemperatur auch gewiß mit der Tiefe wächst. Nach Barus wächst die Schmelztemperatur des Diabas um 0,025° C pro Atmosphärendruck, nach J. H. L. Vogt*) aber nur um 0,005° C. Gegen den Barusschen Wert erhebt Vogt den Einwand, daß die Ermittlung der Schmelzwärme des Diabases mit Hilfe des Kalorimeters nicht die wirkliche latente Schmelzwärme ergeben könne, da infolge der plötzlichen Abkühlung im Kalorimeter die Schmelze, ohne zu kristallisieren, zu Glas erstarre; Gläser aber besitzen keine Schmelzwärme. Selbst mit dem kleineren Vogtschen Werte würde die Schmelzwärme mit jedem Kilometer Tiefe wenigstens um 1° C zunehmen**). Auf diese Weise betrüge die Schmelztemperatur des Diabases auf der Oberfläche 1170° C und in 100 km Tiefe mindestens 1270° C. Damit die Temperatur der Gesteine unterhalb der Schmelztemperatur bleibe, braucht man sich nur vorzustellen, daß der geothermische Gradient entsprechend rasch mit der Tiefe zunimmt.

Gegen das auf die Existenz der Vulkane sich stützende Argument kann man anführen, daß die hohe Temperatur und der flüssige Zustand der Lava die Existenz eines „feurigflüssigen" Erdinnern keineswegs beweisen. Es genügt, sich vorzustellen, daß unter den Vulkanen größere oder kleinere Lavaseen, sogenannte „maculae", existieren.

Der dritte Beweis ist gleichfalls nicht zwingend. Man kann sich ebensogut vorstellen, daß die Erde ehemals flüssig war und dann erstarrte, wobei die im flüssigen Zustand erworbene sphäroidale Gestalt beibehalten wurde. Es ist überdies zweifelhaft, ob ein Weltkörper von der Größe der Erde von der hydrostatischen Gleichgewichtsgestalt wesentlich abweichen kann. Zwar sind nicht alle Stabilitätsbedingungen, welche für eine Flüssigkeit gelten, auch für einen festen Körper bindend: dichtere Schichten können über weniger dichten lagern; zwar sind ferner verschiedene Abweichungen von einem den hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen genügenden inneren Bau und einer äußeren Gestalt möglich: unter anderem kann eine unsymmetrische Dichteverteilung bestehen und, wie wir im

*) Zitiert bei F. v. Wolff, Die vulkanische Kraft usw. Zeitschrift der Deutschen Phys. Gesellsch., Bd. 60 (1908), S. 437.

**) Da der Druck in der Erdkruste mit je 4—5 m ungefähr um eine Atmosphäre zunimmt.

sechsten Kapitel, § 5, sehen werden, zu einer dauernden Abweichung von der Gleichgewichtsfigur Anlaß geben — aber diese Abweichungen geben Anlaß zu inneren Spannungen und Drucken, die im allgemeinen um so größer sind, je größer die Abweichungen. Gehen die Abweichungen über ein gewisses Maß hinaus, so kann der Körper den Drucken und Spannungen nicht widerstehen und bricht. Was dann geschieht, läßt sich nicht übersehen; nur ganz allgemein kann man sagen, daß in gewissen Fällen Umlagerungen und Deformationen folgen werden, welche zu einer den Gleichgewichtsbedingungen besser entsprechenden Konfiguration führen können. Andererseits darf man sagen, daß bei großer Rotationsgeschwindigkeit selbst ein Zerfallen des Körpers in mehrere Stücke nicht von vornherein auszuschließen ist, aber insofern es sich um die gegenwärtigen irdischen Verhältnisse handelt, bleibt dieser Fall außer Betracht. — Es ist leider nicht möglich, ohne eine bestimmte Hypothese über die Konstitution der Erde die Grenzen, welche von den Abweichungen nicht überschritten werden können, festzustellen. G. H. Darwin hat einmal gezeigt, daß eine Erde aus Messing eine von der Gleichgewichtsabplattung um $\frac{1}{1000}$ abweichende Abplattung eben noch ertragen könnte, aber dieses Resultat bezieht sich zunächst auf die Abplattung und auf einen homogenen Körper. Die Existenz der Kontinente ist ebensogut mit einem flüssigen wie festen Erdinnern verträglich. — Ohne Kenntnis des inneren Baues der Erde kann man über allgemeine Sätze nicht hinausgehen.

Wenn wir einmal vom flüssigen Erdinnern sprechen, wird es vielleicht angemessen sein, eine Prinzipienfrage kurz zu erörtern. Nehmen wir für einen Moment an, daß die Erde ehemals flüssig war und daß sie noch heute mit Ausnahme einer dünnen Kruste flüssig ist, so ist es immer noch fraglich, ob es überhaupt erlaubt ist, die Theorie des Gleichgewichts flüssiger Körper auf die Erde anzuwenden. Es wird in dieser Theorie angenommen, daß Druck, Temperatur und Dichte mit der Zeit nicht variieren, ferner daß der Körper isotherm ist, d. h. überall dieselbe Temperatur besitzt und daß keine Bewegung im Innern stattfindet. Diese Annahmen sind bei einem reellen Weltkörper nie realisiert; ein solcher Körper erhält und verliert Wärme, dehnt sich aus oder zieht sich zusammen, seine Temperaturen variieren mit der Zeit und sind in verschiedenen Teilen des Körpers verschieden; endlich können im Innern konvektive Strömungen vorhanden sein.

Es existiert somit ein prinzipieller Gegensatz zwischen dem idealen Gleichgewichtszustand eines flüssigen Körpers und dem reellen variablen Zustand eines Weltkörpers. Erwägen wir aber, auf welche Weise die Evolution der Erde fortschreiten kann. Etwaige Katastrophen ausgenommen, geschehen alle Änderungen äußerst langsam, so daß variable Zustände sich nur wenig von stationären unterscheiden und das Streben nach dem Gleichgewicht Zeit hat, zur Geltung zu kommen. Jede momentane Konfiguration strebt einer den momentanen Bedingungen entsprechenden Gleichgewichtskonfiguration zu. Auf diese Weise kann die Evolution einer flüssigen Erde als eine kontinuierliche Reihe von Konfigurationen aufgefaßt werden, die nach gewissen, ebenfalls eine kontinuierliche Reihe bildenden Gleichgewichtskonfigurationen streben und immer nahe an denselben bleiben. Das ist der Grund, warum die klassische Theorie des Gleichgewichts auf die Evolution einer flüssigen Erde angewandt werden kann.

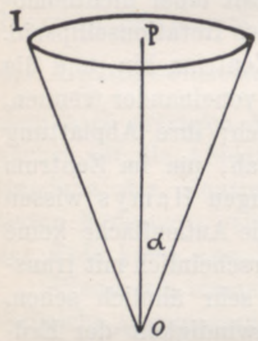
Nach Clairaut ist die Gleichgewichtsgestalt einer nichthomogenen isothermen Flüssigkeit ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Dichte der Flüssigkeit wächst nach dem Zentrum hin, und die Flächen, welche Schichten verschiedener Dichte voneinander trennen, sind konzentrisch und der Außenfläche ähnlich; ihre Abplattung nimmt mit der Annäherung an das Zentrum ab, um im Zentrum selbst Null zu werden. Dank den Untersuchungen Hamys wissen wir, daß alle diese Trennungsflächen, sowie die Außenfläche keine Ellipsoide sind, es sind Rotationssphäroide (wahrscheinlich mit transzendenten Gleichungen), die den Ellipsoiden sehr ähnlich sehen. Weiter wissen wir, daß bei der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation die Abplattung zwischen den Grenzen $\frac{1}{232}$ und $\frac{1}{580}$ enthalten sein muß. Die erste Grenze entspricht der Voraussetzung, daß die Dichte der Flüssigkeit im ganzen Körper konstant und der mittleren Dichte der Erde (5,5) gleich ist, die zweite der Voraussetzung, daß die ganze Masse der Erde im Mittelpunkt vereinigt ist. Endlich wissen wir dank den Untersuchungen Poincarés, daß die größte Abplattung, welche sich mit dem Werte $\frac{1}{305{,}31}$ des Verhältnisses $\frac{C-A}{C}$ (wobei C und A die Hauptträgheitsmomente der Erde sind) verträgt, den Wert $\frac{1}{296}$ besitzt.

Es bleibt noch ein dunkler Punkt übrig: wir wissen, daß ohne Isothermie absolute Ruhe nicht möglich ist. Ist der flüssige Weltkörper kugelförmig und alles: Temperatur, Dichte usw. Funktion des Radius, so wissen wir, daß eine rein radiale Kontraktion bezw. Dilatation möglich ist. Bezüglich eines abgeplatteten Körpers sind wir aber in Unwissenheit; wir können die Möglichkeit gewisser Strömungen nicht a priori ausschließen. Jedenfalls müssen diese Strömungen, als von der Abplattung abhängig, sehr langsam erfolgen.

§ 8. Die Hypothese des festen Erdinnern.

Die Theorie des starren Erdinnern ist englischen Ursprungs. Um 1840 trat Hopkins*) mit der Behauptung auf, daß die Präzession und Nutation so verlaufen, als wenn mindestens eine Kruste von $^1/_4$ Radius Dicke fest wäre. Bekannterweise bewirkt die lunisolare Attraktion auf die äquatoriale Ausbauchung der Erde, daß die Rotationsachse ihre Lage im Raume ändert. Man kann die Bewegung der Rotationsachse in zwei Bewegungen zerlegen. Die erste Bewegung ist ein Rollen**) der Rotationsachse auf einem geraden Kreiskegel (Fig. 12). Die Spitze des Kegels befindet sich im Mittelpunkt der Erde, die Achse des Kegels steht normal auf der Ekliptik (d. h. auf der Bahnebene), und der Winkel an der Spitze beträgt 23,5°. Das Rollen geht so langsam vor sich, daß ungefähr 258 Jahrhunderte nötig sind, damit die Rotationsachse einen Rundgang um den Kegel vollende. Die Bewegung der Achse ist rückläufig, d. h. der Richtung des Umlaufs der Erde auf ihrer Bahn entgegengesetzt. Die Ebene des Äquators, die senkrecht auf der Rotationsachse steht, verändert infolgedessen ihre Lage, und ihr Schnitt mit der Ekliptik, die sogenannte Nachtgleichengerade, verschiebt sich ebenfalls auf der Ekliptik. Infolge dieser Bewegung ist das tropische Jahr oder die Zeit, welche zwischen einer gegebenen Frühlings-

Fig. 12.



---

*) Seine „Researches in Physical Geology" erschienen in den Phil. Trans. R. Soc. London in den Jahren 1839, 1840 und 1842.

**) Diese Beschreibung der Bewegung ist nicht ganz genau, aber zum Verständnis der Perturbation genügend.

nachtgleiche und der nächstfolgenden verfließt, etwas kürzer als das siderische Jahr, d. h. die Zeit, in welcher die Erde einen Umlauf um die Sonne vollendet. Dank diesem Umstand geht das Ende des tropischen Jahres dem Ende des siderischen Jahres voran (praecedit). Daher rührt der Name „Präzession“. Die zweite Bewegung, die sogenannte Nutation, ist ebenfalls ein Rollen der Rotationsachse auf einem Kegel, aber die Öffnung des Kegels ist viel kleiner und die Periode viel kürzer als bei der Präzession. Der Schnitt des Kegels mit der Himmelskugel ist eine Ellipse, deren größere Halbachse nur 9,24″ und deren kleinere nur 6,87″ mißt, wobei die kleinere Halbachse parallel zur Ekliptik liegt. Die Periode dieser Bewegung beträgt ungefähr 18,6 Jahre. Infolge der Kombination beider Bewegungen beschreibt der Pol der Rotationsachse eine Schlangenlinie auf der Himmelskugel. Nun behauptete Hopkins, daß die Präzession und Nutation einer flüssigen Erde gewisse Merkmale aufweisen müssen, die tatsächlich nicht beobachtet werden.

Aber die Beweisführung Hopkins war nicht streng genug; er erlaubte sich gewisse Vereinfachungen, die eigentlich nicht gestattet waren; er ließ manches außer acht, was berücksichtigt werden mußte. Kurz und gut, seine Analyse konnte einer strengen Kritik nicht standhalten. Als etwa 40 Jahre später dieselbe Aufgabe von G. H. Darwin*) und S. Oppenheim**) wiederaufgenommen wurde, zeigte es sich, daß die Präzession eines flüssigen und die Präzession eines absolut starren Sphäroides zu wenig voneinander abweichen, als daß die Unterschiede der Beobachtung zugänglich wären.

Schon früher hat Lord Kelvin (damals noch W. Thomson) bemerkt, daß der Beweis Hopkins nicht stichhaltig sei, aber er gab einen andern Beweis der „Starrheit“ der Erde an. Das Erdinnere sei „flüssig“ und bloß von einer dünnen festen Kruste umhüllt. Die Anziehung des Mondes und der Sonne müßte doch in diesem kolossalen Lavaozean, ebenso wie im Wasserozean Gezeiten, d. i. periodische Deformationen hervorrufen. Die dünne Kruste könnte die innere Flut nicht hemmen, sie würde sich mit der Flut heben, mit der Ebbe senken; also alles: der Lavaozean, die Kruste, der Meeres-

*) G. H. Darwin, On the Precession of a viscous spheroid. Phil. Trans. R. Soc. London, Bd. 170 (1879), II. Teil, S. 447–538.

**) S. Oppenheim, Über die Rotation und Präzession eines flüssigen Sphäroids. Sitzb. K. Akad. Wiss. Wien, math. naturw. Kl. Bd. XCII (1885), II. Teil, S. 528—574.

boden sowie die Wasserozeane würden sich gleichzeitig heben und senken. In diesem Falle könnte man an den Küsten kein Steigen des Wassers während der Flut und kein Fallen während der Ebbe wahrnehmen. Ist das Erdinnere fest, aber nicht absolut fest, dann muß die Erde den fluterzeugenden Kräften auch nachgeben, aber nicht in einem solchen Grade, wie eine flüssige Erde. Die innere Flut kann der Meeresflut nicht gleichkommen. Der Meeresboden und die Meeresküste können wohl steigen und fallen aber um einen geringeren Betrag als das Meer, und die Meeresgezeiten werden sichtbar. Je starrer das Erdinnere, desto kleiner die irdischen und desto größer die sichtbaren Meeresgezeiten; die größten Meeresgezeiten entsprechen dem Fall einer unendlich starren Erde. Nun enthält die übliche Gezeitentheorie die stillschweigende Annahme, daß die Erde sich gar nicht deformiert, was der Annahme einer unendlichen Starrheit gleichkommt. Vergleicht man also die Höhe der wirklichen Meeresgezeiten mit der theoretischen Höhe, so kann man aus dem Verhältnis beider Höhen die Starrheit der Erde bestimmen. Diese Idee Kelvins hat G. H. Darwin*) realisiert und aus der Analyse halbmonatlicher Gezeiten in den indischen Häfen gefunden, daß die Erde ebenso starr ist wie eine Stahlkugel.

So schön dies klingt, bietet doch der Beweis Kelvins und G. H. Darwins der Kritik manche schwache Seite. Die theoretische Grundlage des Beweises ist, was die Gezeitentheorie anlangt, nicht ganz sicher. G. H. Darwin ist von der statischen Gezeitentheorie ausgegangen, in welcher die Trägheit des Wassers ganz vernachlässigt wird. Um ein diese Annahme befriedigendes Material zu haben, beschränkt sich G. H. Darwin auf halbmonatliche Gezeiten, welche von der Trägheit viel weniger als die halbtäglichen oder täglichen beeinflußt werden. Indes hat Poincaré gezeigt, daß die Art und Weise, in welcher der Einfluß der unsymmetrischen Konfiguration der Ozeane in der statischen Theorie zum Ausdruck kommt, nicht ganz einwurfsfrei ist. Im allgemeinen bietet die Theorie der Gezeiten zahlreiche Schwierigkeiten, die einen gewissen Schatten auf die Untersuchungen G. H. Darwins werfen.

Bereits im Jahre 1879 haben G. H. Darwin nnd sein Bruder Horaz versucht, mit Hilfe eines bifilaren, in Wasser eingetauchten

---

*) Vergl. Thomson und Tait, Treatise on Natural Philosophy, Bd. II (zweite Ausgabe Cambridge 1883), S. 422 ff.

Pendels die irdischen Gezeiten direkt zu verfolgen, aber trotz der großen Empfindlichkeit des Instrumentes mißlangen diese Versuche. Ebenso führten Versuche mit dem Horizontalpendel von Rebeur-Paschwitz und anderen zu keinem befriedigenden Resultat. Es zeigte sich, daß die Bewegung des Erdbodens infolge der Temperaturänderungen die irdischen Gezeiten beinahe ganz verdeckt. Der von der Sonne erwärmte Boden dehnt sich aus, deformiert sich, die Neigungen der Abhänge verändern sich usw. Erst Hecker*), der 1902 zwei Horizontalpendel 25 m tief unter der Oberfläche zu Potsdam aufstellte und auf diese Weise den Einfluß der Insolation auf $^1/_7$ reduzierte, gelangte zu besseren Resultaten. Seine Beobachtungen, die übrigens noch nicht abgeschlossen sind, zeigten, daß die Erde den fluterzeugenden Kräften nachgibt.

Die irdischen Gezeiten äußern sich am Horizontalpendel auf folgende Weise. Die Attraktion des Mondes und der Sonne bewirkt periodische Deformationen (vergl. zehntes Kapitel) der Niveauflächen (vergl. erstes Kapitel), mit anderen Worten: sie bewirkt periodische Schwankungen der Lotlinie. Bei einer absolut starren Erde würden diese Bewegungen der Lotlinie ihr Maximum erreichen. Wenn dagegen die Erde der Attraktionswirkung mit der Bewegungsfreiheit einer vollkommen trägheitslosen Flüssigkeit nachzugeben vermöchte, so würden diese Bewegungen verschwinden, da sich dann die Oberfläche so anordnet, daß die wahre Richtung der Schwerkraft stets senkrecht auf ihr steht. Nun ist das Horizontalpendel sehr empfindlich gegen kleine Richtungsänderungen der Lotlinie, es zeigt sie sofort an und verrät auf diese Weise die irdischen Gezeiten. Die Beobachtungen Heckers haben gezeigt, daß die Ablenkung des Lotes unter dem Einfluß des Mondes geringer ist, als sie bei einem vollkommen starren Körper sein würde; folglich gibt die Erde der fluterzeugenden Kraft nach. In der Richtung des Parallels beträgt die wahre Lotablenkung ungefähr zwei Drittel der maximalen Ablenkung, in der Richtung des Meridians aber kaum über ein Drittel. Dieser Gegensatz wird von der üblichen Theorie nicht vorgesehen, außerdem weiß man nicht, ob eine lokale oder eine allgemeine Ursache vorliegt. Es wurde selbst die Vermutung aus-

*) Die Diskussion der Beobachtungen zu Straßburg (1892—96), Nikolajew (1894—95) und Heidelberg (1901—02), durch W. Schweydar ergab jedoch Resultate, die von denjenigen Heckers nicht wesentlich abweichen. Beobachtungen aus anderen Orten hat Schweydar ausgeschlossen.

gesprochen, daß die Erde als Ganzes tatsächlich in der Richtung des Meridians und des Parallels eine verschiedene Nachgiebigkeit aufweise und daß dies (G. H. Darwin) mit der Rotation im Zusammenhange stehe. Aber seismologische Beobachtungen, denen das größte Gewicht in der Frage nach der Beschaffenheit der Erde beigemessen werden muß, widersprechen einer solchen Hypothese.

Einen nicht besonders gelungenen, weil von einer speziellen Hypothese über die Konstitution der Erde abhängigen Beweis hat seinerzeit G. H. Darwin*) zu erbringen gesucht.

Ein fester Weltkörper kann eine von der Gleichgewichtsgestalt verschiedene Gestalt, sagen wir allgemeiner: einen vom Gleichgewichtsbau verschiedenen Bau, nur dann haben, wenn die Festigkeit des Stoffes dies erlaubt. Nun stellt sich G. H. Darwin den Bau der Erde so vor, als wenn die Erde ohne die Kontinente den Bedingungen des Gleichgewichts genügte. Auf diese Weise erscheinen die Kontinente als das Gleichgewicht störende Belastungen, welche im Erdinnern große, nicht kompensierte Spannungen und Drucke hervorrufen. Um diesen Spannungen und Drucken standzuhalten, müßten die Gesteine in einer Tiefe von ungefähr 1700 km**) wenigstens die Festigkeit des Granits haben.

Es ist klar, daß dies Resultat mit der angenommenen Hypothese über den Bau der Erde steht und fällt. Nimmt man mit Airy an, daß die Kontinente auf dem inneren Lavameer einfach schwimmen, so wird der Theorie G. H. Darwins der Boden entzogen. Übrigens genügt uns die Annahme, daß unterhalb der Kontinente entsprechend verteilte Dichtedefekte existieren, damit die Druckdifferenzen, die G. H. Darwin ausgerechnet hat, verschwinden. Wir wissen nun aber aus dem zweiten Kapitel, daß gewichtige Argumente für die Existenz von Dichtedefekten unter den Kontinenten sprechen.

§ 9. Die Eulersche Perturbation.

Ein anderer Beweis stützt sich auf die Analyse einer gewissen Perturbation in der Rotation der Erde, die unter dem Namen Breitenvariation bekannt ist. Um das Wesen dieses Beweises

---

*) G. H. Darwin, On the Stresses caused in the Interior of the Earth by the Weight of Continents. Phil. Trans. Bd. 173 (1882), I. Teil, S. 187 ff.

**) Dies ist nämlich die Tiefe, in welcher die Druckdifferenzen ihr Maximum erreichen.

zu erläutern, müssen wir uns für einen Augenblick der Theorie der Rotation eines absolut starren Körpers zuwenden.

Wir können alle äußeren Kräfte außer acht lassen und den Körper als isoliert betrachten.

Die Eulerschen Differentialgleichungen für die Rotationsbewegung eines starren Körpers lauten:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(B-C)\,qr&=0\\ B\frac{dq}{dt}+(C-A)\,rp&=0\\ C\frac{dr}{dt}+(A-B)\,pq&=0 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 22$$

wo A, B, C die Trägheitsmomente in bezug auf die Hauptachsen und p, q, r die Komponenten der Rotation bedeuten. Da es sich um die Erde handelt, können die Trägheitsmomente in bezug auf die Äquatorialachsen einander gleichgesetzt werden, d. h. man kann $B = A$ setzen und die Gleichung 22 in folgender vereinfachter Gestalt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}-(C-A)\,qr&=0\\ A\frac{dq}{dt}+(C-A)\,rp&=0\\ C\frac{dr}{dt}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 23$$

Die dritte Gleichung liefert immer

$$r = \text{konst.} = (\text{sagen wir})\ n \quad \ldots\ldots \quad 24$$

Den übrigen Gleichungen kann man durch die Annahme:

$$p = q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25$$

genügen. Man bekommt dann eine gleichmäßige Rotation um die Polarachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n und das ist die gewöhnlich für die Erde angegebene Lösung. Aber außer dieser Lösung lassen die Gleichungen 23 noch eine andere zu. Setzt man nämlich der Kürze halber

$$\frac{C-A}{A}\,n = \mu,$$

so werden die Gleichungen 23 mit Rücksicht auf 24 durch die Lösung:

$$\left.\begin{aligned} p&=h\sin\mu t+k\cos\mu t\\ q&=h\cos\mu t-k\sin\mu t\\ r&=n \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 26$$

wo h und k gewisse Konstanten sind, befriedigt. Wir sehen sofort, daß diese Lösung eine gewisse Perturbation in der Rotation bedeutet. Ihre Periode kann leicht bestimmt werden, da für die Erde h und k sehr klein sind und die beobachtete wirkliche Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{n^2 + h^2 + k^2}$$

sich von der Komponente n beinahe gar nicht unterscheidet. Da andererseits*)

$$\frac{C - A}{A} = \frac{1}{303,8},$$

so ist μ 303,8 mal so klein als n bezw. als ω, und die Periode der Perturbation umfaßt 303,8 Sterntage oder ungefähr 303 mittlere Sonnentage.

Schon Euler hat bemerkt, daß diese Perturbation einen Einfluß auf die Breiten haben muß. In der Tat behält die Achse des Rotationsmomentes ihre Richtung im Raume bei, nicht aber relativ zur Erde: mit den Hauptträgheitsachsen der Erde bildet sie Winkel, deren Kosinus

$$\frac{A}{K}p, \quad \frac{A}{K}q, \quad \frac{C}{K}r, \qquad \qquad 27$$

sind, wobei

$$K^2 = A^2(h^2 + k^2) + C^2 n^2.$$

Setzt man p, q, r aus den Formeln 26 in 27 ein, so erkennt man sofort, daß die zwei ersten Kosinus mit der Zeit variieren und daß die Achse des Rotationsmomentes OM mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit μ auf einem geraden Kreiskegel um die Achse des größten Trägheitsmomentes OC rollt**). Diese letzte Achse ist nämlich die Achse des Kegels; die Spitze des Kegels befindet sich im Erdmittelpunkte und der Winkel $COM = \beta$

---

*) Mit Newcomb (Spher. Astr. New-York 1906, S. 251) setzen wir:

$$\frac{C - A}{C} = 0,00328057 = \frac{1}{304,825}.$$

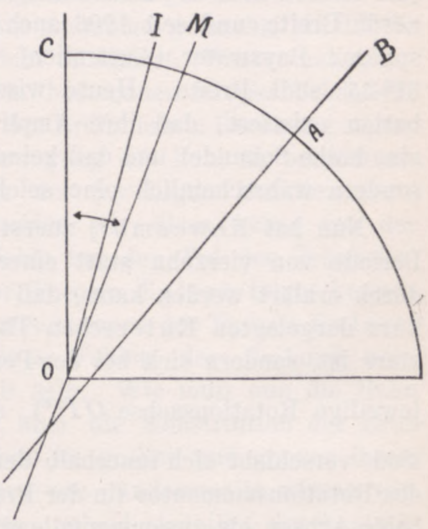
**) Außer diesen beiden Achsen ist noch die momentane Rotationsachse OI mit den Richtungskosinus $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ zu unterscheiden. Sie fällt nahezu mit der Achse des Rotationsmomentes zusammen; der Winkel zwischen diesen beiden Achsen ist ungefähr 300 mal so klein als β. Wenn die Eulersche Perturbation (Variation der Breiten) nicht existiert, fallen alle drei Achsen zusammen.

zwischen der Erzeugenden und der Achse des Kegels*) bestimmt sich aus der Formel:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{A}{C} \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{n}.$$

Da, wie gesagt, die Achse des Rotationsmomentes im Raume eine konstante Richtung hat, so rollt im Raume der Kegel um die Achse des Momentes und die Erde schwingt um die genannte Achse. Mit der Erde schwingen die Lotlinien, und die Winkel zwischen den Lotlinien und der Achse des Rotationsmomentes ändern sich periodisch, wobei die Periode natürlich ebenfalls 303 Tage beträgt. Das sind aber dieselben Winkel, die man mißt, um die geographischen Breiten zu bestimmen (Fig. 13). Die geographische Breite eines Punktes A auf der Erdoberfläche ist nämlich die Ergänzung des Winkels zwischen der Hauptachse OC und der Lotlinie AB zu 90^0. Aus astronomischen Beobachtungen bestimmt man aber nicht diesen Winkel, sondern den Winkel zwischen der Lotlinie AB und der Achse des Rotationsmomentes OM. Infolgedessen sind die geographischen Breiten variabel.

Fig. 13.



Schon Euler hat auf die theoretische Möglichkeit dieser Perturbation hingewiesen. Verschiedene Gelehrte (zwischen 1850 und 1860 Peters und Maxwell, später Nyřen und Newcomb) haben Beobachtungen des Polarsterns und andere Beobachtungsreihen analysiert, um die Breitenvariationen zu entdecken, aber diese Untersuchungen führten zu keinem bestimmten Resultat. Es scheint, daß die vorgefaßte Meinung, die Periode müsse ungefähr 305 Tage**) betragen, sich dabei hindernd erwies. Erst 1884—85 bemerkte Küstner

*) Die Beobachtungen zeigen, daß β nicht einmal eine halbe Sekunde erreicht.

**) Entsprechend dem früher akzeptierten etwas anderen Werte des Verhältnisses zwischen den Hauptträgheitsmomenten der Erde.

in Berlin Differenzen, die gewiß außerhalb der Grenzen möglicher Fehler lagen. Weitere Beobachtungen bestätigten die Entdeckung Küstners. Insbesondere überzeugend waren die simultanen Beobachtungen zu Berlin und Honolulu 1891—92: die Breite in Honolulu wuchs, während sie in Berlin abnahm und umgekehrt, wodurch der Beweis geliefert wurde, daß die beobachteten Breitenvariationen nicht durch periodische Änderungen der Refraktion (etwa infolge meteorologischer Einflüsse) bedingt sind. Seit 1900 überwachen die Bewegung des Pols sechs Stationen auf der Nordhemisphäre: Mizusawa (Japan), Tschardjui (Turkestan), Carloforte (Isola di S. Pietro, Sardinien), Gaithersburg, Cincinnati und Ukiah (die letzten drei in den Vereinigten Staaten), sämtlich unter 39° 8′ nördl. Breite, und seit 1906 auch zwei Stationen auf der Südhemisphäre: Bayswater (Australien) und Oncativo (Argentina) unter 31° 55′ südl. Breite. Heute wissen wir gewiß, daß die Perturbation existiert, daß ihre Amplitude sehr gering ist (nicht über eine halbe Sekunde) und daß keine Periode von ungefähr 303 Tagen, sondern wahrscheinlich eine solche von 420—430 Tagen existiert.

Nun hat Newcomb*) zuerst gezeigt, daß das Auftreten einer Periode von vierzehn statt einer Periode von zehn Monaten dadurch erklärt werden kann, daß die Erde nicht, wie in der oben kurz dargelegten Eulerschen Theorie vorausgesetzt wird, absolut starr ist, sondern sich bei der Perturbation etwas deformiert. Die jeweilige Rotationsachse OI**), deren Richtungskosinus $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$ sind, verschiebt sich innerhalb der Erde gleichzeitig mit der Achse des Rotationsmomentes (in der Praxis kann man, wie oben bemerkt, beide Achsen als zusammenfallend ansehen); mit der jeweiligen Rotationsachse verschiebt sich das ganze System der Zentrifugalkräfte. Die Änderungen der Richtung und der Intensität der Zentrifugalkräfte sind sehr klein, doch rufen sie eine kleine Deformation hervor, die hinreicht, um die Periode der Perturbation zu ändern. Es ist klar, daß die Größe der Deformation und die Änderung der Periode von der Nachgiebigkeit der Erde abhängen. Auf Grund

---

*) Newcomb, On the Dynamics of Earths Rotation . . . Monthly Notices R. A. S. Bd. 52 (1891—92), S. 336—341.

**) Das ist die Achse der Rotation, welche aus den drei Komponenten p, q, r resultiert, ihre Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ist die wahre Rotationsgeschwindigkeit der Erde.

einer etwas rohen Schätzung fand Newcomb, daß die Erde eine etwas größere Starrheit besitzt als die Starrheit des Stahles. Nach Newcomb haben verschiedene andere Forscher dieselbe Aufgabe aufgenommen und etwas strengere Lösungen gegeben, aber die Resultate wichen nicht wesentlich von denjenigen Newcombs ab. In der Mehrzahl der Fälle haben sie ebenfalls eine größere Starrheit als diejenige des Stahles gefunden. Daß die einzelnen Resultate nicht genau übereinstimmen, ist nicht zu verwundern. Die Aufgabe kompliziert sich durch die Anwesenheit des Ozeans, welcher zwei Drittel der Erde bedeckt. Der Ozean deformiert sich auch und sein Einfluß darf ausgeschlossen werden. Das kann aber nicht ohne gewisse, zum Teil willkürliche Annahmen geschehen. Nun hat ein Forscher diese, ein anderer jene Annahme gemacht, ein dritter hat den Einfluß des Ozeans gar nicht eliminiert. Weiter haben gewisse Forscher die Erde als einen homogenen Körper behandelt, während andere die größere Dichte des Erdinnern in Rechnung zogen.

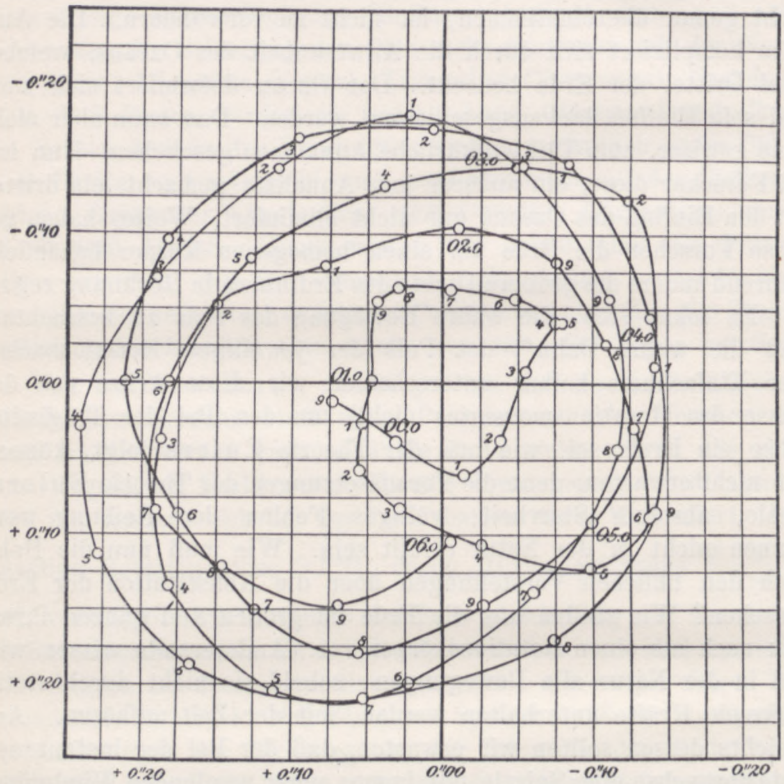
Es lohnt sich, die wahre Bewegung des Pols zu betrachten. Daß die wahre Bahn*) des Pols der jeweiligen Rotationsachse (der Einfachheit halber unterscheiden wir diese Achse von der Achse des Rotationsmomentes nicht) um den Pol der Trägheitsachse ein Kreis sei, wie aus der Theorie Eulers folgt, können wir nicht erwarten, denn die Voraussetzungen der Theorie Eulers: ideale, absolute Starrheit, völliges Fehlen der Reibung usw. können nicht in der Natur erfüllt sein. Wie muß nun die Bahn nach den üblichen Vorstellungen über die Konstitution der Erde aussehen? Wir stellen uns die Erde im großen und ganzen ihrem Bau nach als einen Rotationskörper vor. Andererseits wissen wir, daß in der Natur alle Bewegungen, sobald sie nicht durch stetig wirkende Kräfte unterhalten werden, mit der Zeit aufhören. Angesichts dessen sollten wir erwarten, daß der Pol der instantanen Rotationsachse eine Spirale mit immer enger werdenden Windungen beschreibt und auf diese Weise sich dem Trägheitspol asymptotisch nähert. Nun können Störungen eintreten, die Trägheitsachse kann plötzlich infolge plötzlicher (Erdbeben, Vulkanausbrüche usw.) oder stetig infolge stetiger Massenverschiebungen (Schlammtransport durch Flüsse usw.) verschoben werden. Infolgedessen kann die Amplitude der Windungen plötzlich oder stetig anwachsen bezw. abnehmen, gleichzeitig aber wird sich ein solches Ereignis durch

*) Wir meinen die Bahn des Pols auf der Erdoberfläche.

eine Verschiebung der Kurve, d. h. durch eine plötzliche oder stetige, aber nichtperiodische Änderung der Breiten offenbaren. Was sieht man dagegen? In gewissen Zeitspannen läßt sich freilich ein Ab-

Fig. 14.

Bahn des Nordpols der Erdachse seit 1899,9 bis 1906,0
nach Albrecht. Resultate des intern. Breitendienstes, Bd. III. Berlin 1909.



nehmen, in anderen ein Zunehmen der Amplitude wahrnehmen, aber stetige oder plötzliche Verschiebungen der Kurve wurden bisher nicht sicher konstatiert; es mag sein, daß sie dafür zu klein sind*).

*) Der Einfluß der Massenverschiebungen auf die Trägheitsmomente und die Lage der Hauptachsen der Erde wurde manchmal, so von G. H. Darwin, Spitaler, N. Herz und anderen diskutiert. Immer zeigte es sich, daß, insofern die Massenverschiebungen in den Grenzen der Möglichkeit bleiben, die Verschiebung der Hauptachse nur kleine Bruchteile einer Sekunde betragen kann.

Ferner sieht die Kurve gar nicht wie eine Spirale aus; oft schneidet sie sich selbst, zuweilen bildet sie Schlingen, im allgemeinen hat sie ein eckiges Aussehen. Woher stammen diese Ecken? Was bedeuten sie? — Wir haben schon oben gesehen, daß die Breitenvariation auf zwei um 180 Längengrade voneinander entfernten Orten einen entgegengesetzten Verlauf haben muß. Kimura hat aber gezeigt, daß es nicht ganz so ist; es läßt sich eine kleine, allen Sternwarten gemeinsame Komponente ausscheiden. Was bedeutet nun das sogenannte Kimuraglied? Kurz und gut, das Phänomen der Breitenvariation bietet manches Rätsel und, obgleich die Schlüsse bezüglich der Starrheit der Erde sich bloß auf die Verlängerung der Periode von zehn auf vierzehn Monate stützen, kann man sich doch des Gefühls einer gewissen Unsicherheit nicht erwehren.

Das Verhalten anisotroper fester Körper wird durch mehrere Konstanten charakterisiert, bei isotropen Körpern genügen zwei Konstanten: der Kompressionsmodul*) und der Starrheitsmodul (oder einfach die „Starrheit"). Der erste gibt das Maß des Widerstandes gegen Kompression bezw. Dilatation, der zweite den Widerstand gegen gewaltsame Änderung der Gestalt (Deformation) des Körpers. Bei der Berechnung der Starrheit aus der Theorie der Breitenvariation oder der Theorie der Gezeiten pflegt man den ersten Modul als unendlich anzunehmen. Man darf darin nicht bloß eine bequeme Vereinfachung der Formeln, sondern auch eine Annahme, die halb berechtigt und halb notwendig erscheint, erblicken. Berechtigt ist sie aus Gründen, die in § 2 dieses Kapitels dargelegt wurden. Übrigens werden wir im nächsten Kapitel eine Schätzung des Kompressionsmoduls des Erdinnern vornehmen, wobei wir uns überzeugen werden, daß sein Wert tatsächlich sehr groß ist. Notwendig ist die Annahme der Inkompressibilität deswegen, weil bei dem kolossalen Druck, der im Erdinnern herrscht, der Stoff sich im Zustand einer außerordentlichen Spannung befindet**) und der innere Druck im nichtdeformierten Zustand zu groß ist, als daß die mathematische Theorie, welche auf der Superposition kleiner Deformationen beruht, anwendbar sei. Man kann aber die Schwierigkeit umgehen, indem man den Stoff als homogen und inkompressibel betrachtet. Dann aber zeigen

---

*) Ich gebrauche die Terminologie Loves, Treatise on the mathematical Theory of Elasticity, 2. Ausgabe, Cambridge 1906.

**) Vergl. Love, S. 248.

sich Diskrepanzen*) zwischen den Resultaten, die aus der Theorie der Breitenvariation und jenen, die aus der Theorie der Gezeiten, sowohl irdischen als ozeanischen hervorgehen, obwohl in beiden Fällen für die Starrheit sehr große Werte erhalten werden. Die Starrheit des Stahles drückt sich durch die Zahl $7{,}6 \times 10^{11}$ Dynen per qcm aus, während man, je nachdem diese oder jene Daten bevorzugt werden, 12×10^{11} Dynen bezw. 15×10^{11} Dynen per qcm bekommt. Um die Diskrepanz zu heben, hat W. Schweydar die Hypothese der Homogenität fallen lassen. Er nimmt die Hypothese Wiecherts als Grundlage, setzt einen homogenen Kern von der Dichte 8,206 und eine homogene Kruste von der Dichte 3,2 voraus und nimmt den Radius des Kernes zu 0,78 des Erdradius an. Unter diesen Annahmen findet er, daß die Diskrepanz aufgehoben wird, wenn für die Starrheit der Erdkruste nur $0{,}9 \times 10^{11}$ Dynen, für die Starrheit des Kernes aber $20{,}2 \times 10^{11}$ Dynen per qcm gesetzt werden. Übrigens hat Verfasser dieses Buches bereits im Jahre 1899**) darauf hingewiesen, daß man bei Berücksichtigung der Inhomogenität der Erde auf einen etwa doppelt so großen Wert der Starrheit als denjenigen des Stahles geführt wird.

Übrigens soll noch hervorgehoben werden, daß beide Methoden nicht ganz äquivalent sind. In der Theorie der Breitenvariation hat man es zu tun mit deformierenden Kräften, die nahezu parallel zur Polarachse wirken, in der Theorie der Gezeiten mit einem System deformierender Kräfte (vergl. zehntes Kapitel, § 4), welches eine bewegliche, zum Äquator schwach geneigte Gerade als Symmetrieachse besitzt.

Nun ist die Erde ein heterogener Körper und die Starrheit, die man aus dieser oder jener Deformation berechnet, hat nur die Bedeutung eines gewissen Mittelwertes. Es ist klar, daß dieser Mittelwert verschieden ausfallen kann, je nachdem man Deformationen verschiedener Art in Betracht zieht, denn bei einer Deformation werden diese, bei einer anderen Deformation jene Teile mehr in Anspruch genommen.

Weitere und, man kann sagen, genauere Aufschlüsse über die Beschaffenheit des Erdinnern gibt uns die Seismologie.

---

*) Love, The yielding of the Earth to disturbing forces. Monthly Notices R. A. S., Bd. 69 (1909), S. 476—479; ferner J. Larmor, The Relation of the Earths Precessional Motion usw. . . . Dieselbe Zeitschrift S. 480—486.

**) M. P. Rudzki, Theorie des physischen Zustandes der Erdkugel. Bull. intern. Acad. Sc. Cracovie 1899, S. 283—311.

Fünftes Kapitel.

Seismologie.

§ 1. Erdbebenwellen. Herd. Epizentrum. Isoseiste. Isochrone.

Es gibt Länder wie Japan, Chile, wo die Erdbeben eine Alltagserscheinung sind, andere, wie Polen, Litauen, der größte Teil Rußlands, wo sie so selten vorkommen, daß viele Leute nur aus der Lektüre oder vom Hörensagen die Erdbeben kennen. Richtiger sollte man sagen, daß ohne Instrumente wahrnehmbare Erdbeben in gewissen Ländern sehr selten sind, denn eigens dazu gebaute Seismographen registrieren je nach der Empfindlichkeit jährlich bis zu einigen Hunderten und mehr Erdbeben selbst in erdbebensicheren Gebieten.

Vergleicht man Seismogramme eines und desselben Erdbebens von mehreren Stationen, so merkt man sofort, daß der Anfang des Erdbebens und andere Phasen um so später aufgezeichnet werden, je weiter die betreffende Station vom Herde des Erdbebens entfernt liegt. Daraus schließt man, daß das Erdbeben sich in der Art einer Welle ausbreitet und kommt zu der Frage, zu welcher Wellenart seismische Wellen gehören. In Gesteinen sind nicht gravitationale, sondern elastische Wellen zu erwarten. Natürlich werden die Schwingungen auch von der Schwerkraft beeinflußt, aber die inneren elastischen Kräfte sind in der Regel relativ zur Schwerkraft so groß, daß in erster Annäherung die Schwerkraft gewöhnlich unbeachtet bleiben kann. — Wir sagen „gewöhnlich“, denn es gibt Ausnahmefälle, in denen der Einfluß der Schwerkraft vielleicht in den Vordergrund tritt. Selten und nur in der Nähe des Epizentrums beobachtet man Wellen, die für das Auge sichtbar und den Wasserwellen ähnlich sind. Montessus de Ballore*) führt nur 22 Fälle an (er beginnt mit dem kalabrischen Erdbeben von 1783), in denen diese Wellen beobachtet wurden. Nach Aussage der Augenzeugen beobachtete man während des Erdbebens von Assam (12. Juni 1897) Wellen von nahezu einem Meter Höhe (vom Tal zum Kamm) und gewiß nicht unter zehn, wahrscheinlich von zwanzig

---

*) Montessus de Ballore, La science seismologique. Paris 1907. S. 436.

bis dreißig Meter Länge. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit schien sehr groß, doch kann sie nicht mehr als etliche dreißig oder vierzig Meter pro Sekunde betragen haben, da man das Fortschreiten der Welle mit dem Auge verfolgen und ihre Umrisse erkennen konnte. Die geringe Geschwindigkeit sowie die äußere Erscheinung legen die Vermutung nahe, daß diese besonderen Wellen ebenso wie Wasserwellen die Gravitation als Triebkraft haben.

Die Erfahrung zeigt, daß ein weicher, sumpfiger Boden elastische Schwingungen entweder fortpflanzt oder in eine wirre, unregelmäßige Bewegung verwandelt. Es kann jedoch sein, daß unter gewissen speziellen, nicht näher bekannten Bedingungen Gravitationswellen sich ausbilden können. — Andererseits scheint eine Erklärung auf Grund der Elastizitätstheorie nicht unmöglich, aber mit Hinsicht auf die große Amplitude der besprochenen Wellen wenig wahrscheinlich zu sein. Auf dieselbe näher eingehen, können wir nicht, da es uns zu weit führen würde. — Endlich könnte vielleicht eine gleichzeitig die Molekularkräfte und die Schwerkraft berücksichtigende Theorie eine passende Erklärung liefern. Vorderhand bleiben sie rätselhaft.

Wir haben schon die Namen „Erdbebenherd“ und „Epizentrum“ gebraucht; es ist nun an der Zeit, eine Definition derselben zu geben. „Erdbebenherd“ oder „Hypozentrum“ heißt der Ort, von welchem die Erdbebenwellen ausgegangen sind. Dieser Ort hat gewiß immer endliche Dimensionen. Doch indem einerseits dieselben relativ zu den Dimensionen der Erde in der Regel sehr klein sind und andererseits die genaue Umgrenzung des Herdes unbekannt ist, erlaubt man sich eine bequeme Vereinfachung und betrachtet den Herd als einen unter der Erdoberfläche gelegenen Punkt. Es ist also ein repräsentativer Punkt, der eine ähnliche*) Rolle spielt, wie der Schwerpunkt eines endlichen Körpers. Ich möchte vorschlagen, den Namen „Erdbebenherd“ für den zwei- oder dreidimensionalen endlichen Ort, von welchem die Erdbebenwellen ausgehen, zu reservieren und den repräsentativen Punkt stets „Hypozentrum“ zu nennen. Diese Unterscheidung werde ich auch im nachfolgenden stets beibehalten. Nehmen wir für einen Augenblick an, daß die Erdbebenwellen tatsächlich von einem Punkte ausgehen, daß folglich Erdbebenherd und Hypozentrum eins sind, nehmen wir ferner an, daß die Erde aus sphärischen, konzentrischen,

---

*) Nur ähnliche, nicht dieselbe.

homogenen und isotropen Schichten besteht, dann befindet sich auf der Oberfläche der Kugel gerade über dem Hypozentrum (d. i. auf der Geraden, welche durch das Zentrum der Kugel und das Hypozentrum geht) ein Punkt, welcher dem Hypozentrum am nächsten liegt. Da laut Annahme die Erdbebenwellen tatsächlich vom Hypozentrum ausgehen, wird dieser Punkt zuerst und stärker als alle anderen Punkte der Oberfläche erschüttert. Dieser Punkt heißt Epizentrum, da er gerade über dem Erdbebenherde liegt. In der Wirklichkeit sind unsere Annahmen nicht realisiert und obgleich bei jedem Erdbeben irgendein Punkt der Erdoberfläche zuerst und ein anderer am stärksten erschüttert wird, brauchen sie doch nicht zusammenzufallen. Infolgedessen entsteht eine gewisse Zweideutigkeit, je nachdem man die Lage des Epizentrums aus den Zerstörungen bezw. aus den Wahrnehmungen der Einwohner oder aus den Zeiten der Ankunft der Wellen, bezw. aus den Isochronen*) bestimmt. Im ersten Falle geht man von der Annahme aus, daß das Epizentrum der am stärksten erschütterte, im zweiten, daß dies der zuerst erschütterte Punkt ist. Da die erste Methode sehr oft gänzlich versagt, wenn z. B. das Epizentrum unter dem Meere oder in menschenleeren Wüsten liegt, so ist die zweite Methode mehr gebräuchlich und infolgedessen ist es ratsam, sich für die zweite Definition zu entscheiden, d. h. das Epizentrum als den zuerst erschütterten Punkt der Erdoberfläche zu bezeichnen. Tatsächlich machen die meisten Seismologen keinen Unterschied zwischen beiden Definitionen, indem eine zwingende Notwendigkeit dazu sich bisher nicht eingestellt hat. Zwei Gründe sind daran schuld: erstens befindet sich wegen geringer Dimensionen und der geringen Tiefe des Erdbebenherdes der am stärksten erschütterte Punkt gewiß immer in der Nähe des zuerst erschütterten; zweitens bleibt das Epizentrum nur in der Definition ein geometrischer Punkt, in der Praxis ist es immer ein endliches Stück der Erdoberfläche. Beobachtungs- und Theoriefehler**) machen die Bestimmung des Epizentrums unsicher, so daß seine Lage immer nur innerhalb gewisser Grenzen angegeben werden kann. Diese Grenzen sind zuweilen sehr weit, sie betragen oft ganze Hunderte von Kilometern.

*) Weiter unten werden wir diese Methoden besprechen.

**) Unter diesem Namen verstehe ich alle diejenigen Fehler, welche infolge der Nichtübereinstimmung der einer Berechnungsmethode zugrunde gelegten Annahmen mit der Wirklichkeit entstehen.

Nehmen wir als Beispiel an das Erdbeben in Persien am 23. Januar 1909. Fürst Galitzin*) hat die Lage des Epizentrums nach den Differenzen der Ankunftszeiten verschiedener Phasen aus den Seismogrammen von Pulkowo, Tiflis und Irkutsk berechnet. Er kombinierte die Stationen paarweise und erhielt folgende Koordinaten:

Pulkowo-Tiflis	Pulkowo-Irkutsk	Tiflis-Irkutsk
$\beta = 36^0{,}1\ N$	$35^0{,}5$	$35^0{,}0$
$\lambda = 55{,}9$ östl. von Gr.	54,3	54,8

Daraus ergeben sich folgende mittlere Werte:

$$\beta = 36^0\ N,\quad \lambda = 56^0 \text{ östl. von Gr.}$$

Die Differenz zwischen den extremen β-Werten beträgt $1^0{,}1$, zwischen den extremen λ-Werten $1^0{,}6$. Unter 36^0 Br. entspricht die erste Differenz ungefähr 123, die zweite ungefähr 144 km. Erst später**) kamen Nachrichten über das Erdbeben und es zeigte sich, daß die Stadt Burudjird in Luristan (Persien) samt 60 Dörfern zerstört wurde und einige Tausend Menschen umkamen. Die Koordinaten der Stadt Burudjird sind: $\beta = 34^0{,}0\,N$, $\lambda = 48^0{,}8$ östl. von Gr. Freilich wissen wir nicht, wie weit von dieser Stadt sich das wahre Epizentrum und der am stärksten erschütterte Punkt befanden; doch liegt das berechnete Epizentrum gewiß zu weit von Burudjird.

Zuweilen ist man gezwungen, mehr als ein Epizentrum zu unterscheiden; auf diesen Punkt werden wir später zurückkommen.

Man nimmt an, daß das Hypozentrum sich gerade unter dem Epizentrum befindet. — Isoseisten nennt man Kurven, welche durch gleich stark erschütterte Punkte geführt werden. Isochronen nennt man Kurven, welche durch solche Punkte geführt werden, die vom Anfang des Erdbebens bezw. von einer anderen Phase desselben gleichzeitig erreicht wurden. In der vereinfachten Theorie sind die Isoseisten und Isochronen Kreise auf der Kugeloberfläche um das Epizentrum als gemeinschaftlichen Mittelpunkt. In der Wirklichkeit sind sie es nicht. Ihre Gestaltung läßt zuweilen die Gestalt des Erdbebenherdes annähernd erkennen.

*) Galitzin, Kurzer Bericht über das Erdbeben vom 23. Januar 1909 (russisch). Bull. Acad. Imp. Sc. Petersbourg (1909), S. 159—160.

**) Galitzin, Ergänzender Bericht über das Erdbeben vom 23. Januar 1909 (russisch). Bull. Acad. Sc. Petersbourg (1909), S. 243—244.

§ 2. Elastische Wellen in einem isotropen*) Körper.

Da die Erdbebenwellen elastische Wellen sind, müssen wir einige Sätze der Elastizitätstheorie anführen. Die Differentialgleichungen für elastische Schwingungen brauchen wir hier nicht abzuleiten; die Ableitung kann in jedem ausführlichen Lehrbuch der mathematischen Physik oder der analytischen Mechanik gefunden werden. Wir müssen aber erwähnen, daß die Gleichungen der klassischen Theorie von der Annahme ausgehen, daß die Verschiebungen der Punkte des Körpers, sowie die Differentialquotienten der Funktionen, welche diese Verschiebungen ausdrücken, nicht nur stetig, sondern auch immer so klein bleiben, daß alle ihre Produkte und Potenzen vernachlässigt werden können. Außerdem werden innere Reibung, elastische Nachwirkung usw. außer acht gelassen. Es sind also lineare und konservative Gleichungen. Das Adjektiv „konservativ" bezeichnet, daß laut diesen Gleichungen keine Zerstreuung der mechanischen Energie, keine Umwandlung derselben in andere Energieformen, z. B. Wärme, stattfindet.

Wir bezeichnen mit x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines materiellen Punktes des Körpers im nichtdeformierten Zustande, mit $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Koordinaten desselben Punktes im deformierten Zustande, u, v, w sind somit Verschiebungen des betreffenden Punktes, sie sind Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit t. Mit ϱ bezeichnen wir die Dichte im betreffenden Punkte, mit X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kräfte. Denkt man sich den betreffenden Punkt als Mittelpunkt eines unendlich kleinen kubischen Elements, dessen Seiten zu den Koordinatenebenen parallel sind, so wirken normal zu diesen Seiten drei normale Spannungen**): N_1, N_2, N_3, und tangential zu denselben drei tangentiale (scherende) Spannungen: T_1, T_2, T_3. Die Differentialgleichungen für kleine Schwingungen sind dann:

---

*) Isotrop heißt ein Körper, dessen Elastizitätskonstanten in einem gegebenen Punkte nach allen Richtungen gleich, anisotrop ein Körper, dessen Elastizitätskonstanten nach den einzelnen Richtungen verschieden sind. Isotrope Körper werden durch zwei, anisotrope durch mehrere (bis 21) Elastizitätskonstanten charakterisiert. Sind die Elastizitätskonstanten und die Dichte in allen Punkten des Körpers dieselben, so heißt der Körper homogen, variieren sie von Punkt zu Punkt, so heißt der Körper heterogen.

**) Im vierten Kapitel, § 2, haben wir bereits von Druckkräften gesprochen. Ein Druck ist eine negative Spannung, eine Spannung ein negativer Druck.

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{d^2u}{dt^2}&=\varrho X+\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\\ \varrho\frac{d^2v}{dt^2}&=\varrho Y+\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}\\ \varrho\frac{d^2w}{dt^2}&=\varrho Z+\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\;1$$

In einem isotropen Körper besitzen die Spannungen folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned}&N_1=\lambda\,\Theta+2\mu\frac{du}{dx},\quad N_2=\lambda\,\Theta+2\mu\frac{dv}{dy},\quad N_3=\lambda\,\Theta+2\mu\frac{dw}{dz}\\ &T_1=\mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),\quad T_2=\mu\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right),\quad T_3=\mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\end{aligned}\right\},\quad 2$$

wobei

$$\Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\quad\ldots\ldots\;3$$

die Dilatation des kubischen Elements bedeutet und λ, μ Lamés elastische Konstanten sind. Zu den Moduln der Kompression und der Starrheit, die im vorigen Kapitel (§ 9) erwähnt wurden, haben sie folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Kompressionsmodul}=k=\lambda+\frac{2}{3}\mu\\ &\text{Starrheitsmodul*)}\;\;.\;\;.\;=\mu\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\;4$$

Setzt man die Ausdrücke 2 in die Gleichungen 1 ein, so bekommt man unter Vernachlässigung der äußeren Kräfte X, Y, Z, die in den uns interessierenden Aufgaben belanglos sind, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\frac{d^2u}{dt^2}&=\mu\,\nabla^2u+(\lambda+\mu)\frac{d\,\Theta}{dx}\\ \varrho\frac{d^2v}{dt^2}&=\mu\,\nabla^2v+(\lambda+\mu)\frac{d\,\Theta}{dy}\\ \varrho\frac{d^2w}{dt^2}&=\mu\,\nabla^2w+(\lambda+\mu)\frac{d\,\Theta}{dz}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\;5$$

mit

$$\nabla^2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2},$$

die sich speziell auf ein isotropes Medium beziehen. Differenziert man die erste Gleichung 5 nach x, die zweite nach y, die dritte

*) Oder kurz „Starrheit“.

nach z und addiert alle drei, so bekommt man mit Rücksicht auf die Gleichung 3:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \nabla^2 \Theta. \quad \ldots \ldots \quad 6$$

Differenziert man aber die dritte Gleichung 5 nach y und die zweite nach z, zieht die zweite von der dritten ab usw., so bekommt man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 \xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 \eta \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{\mu}{\varrho} \nabla^2 \zeta \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad 7$$

worin

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right). \quad 8$$

Die drei Größen ξ, η, ζ sind Komponenten einer infinitesimalen Drehung des Elements um drei zu den Koordinatenachsen x, y, z parallele Achsen.

Die Gleichung 6 enthält nur die unendlich kleine Dilatation, die Gleichungen 7 enthalten nur die Komponenten der unendlich kleinen Drehung oder, wie man auch sagen kann, der unendlich kleinen Torsion des Elements. Daraus folgt, daß die beiden Deformationen sich unabhängig voneinander fortpflanzen können*). Wenn nämlich Schwingungen sich von einem Punkte ausbreiten, so muß die Welle infolge der Isotropie des Mediums kugelförmig sein und die Gleichungen 6 und 7 besitzen Integrale von der Form:

$$\frac{F_1(r - Vt)}{r} + \frac{F_2(r + Vt)}{r}, \quad \ldots \ldots \quad 9$$

wo r die Entfernung vom Ausgangspunkte der Schwingungen bezeichnet. Die Funktionen F_1 und F_2 sind vorderhand noch willkürlich und werden erst aus den speziellen Anfangsbedingungen der betreffenden Aufgabe bestimmt; V bezeichnet die Fortpflanzungs-

*) Dieser Satz gilt streng nur für unendlich kleine Schwingungen. Ist die Amplitude der Schwingungen endlich, dann kann eine vollständige Trennung beider Deformationen nicht zustande kommen, da die Differentialgleichungen nicht mehr linear sind.

geschwindigkeit der Welle. Falls die Lösung 9 Gleichung 6 befriedigen soll, muß

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10$$

falls sie aber die Gleichungen 7 befriedigen soll, muß

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11$$

gesetzt werden. Daraus folgt, daß 10 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der dilatationalen und 11 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der torsionalen Welle ausdrückt. Die erstere Geschwindigkeit ist immer größer als die zweite, mindestens im Verhältnis $\sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}155$, da μ und $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ positiv sein müssen. Tatsächlich ist das Verhältnis der ersteren Geschwindigkeit zur zweiten immer größer.

Im Ausdruck 9 stellt F_1 eine Welle, welche vom Hypozentrum ausgeht, F_2 eine Welle, welche dem Hypozentrum zueilt, dar. Für praktische Anwendungen kommt die zweite Welle gar nicht in Betracht.

Es ist klar, daß mit Hilfe von Ausdrücken von der Form 9 beliebige, aus einem begrenzten dreidimensionalen Raum ausgehende Wellen dargestellt werden können. Es genügt, den betreffenden Raum in unendlich kleine Raumelemente zu teilen und ein jedes Element als Quelle von Schwingungen zu betrachten*).

Die Fortpflanzung elastischer Wellen ist der Fortpflanzung des Lichtes ähnlich. Es ist bekannt, daß, bevor die elektromagnetische Theorie zur Herrschaft gelangte, die Theorie des Lichtes nichts anderes darstellte, als einen Spezialfall der Theorie elastischer Wellen. Infolgedessen ist es erlaubt, die Sätze der geometrischen Optik auf die Fortpflanzung elastischer Wellen anzuwenden. Doch sind die Verhältnisse in der Seismologie komplizierter als in der Theorie des Lichtes, denn selbst an der Grenze zweier isotroper Medien entstehen nicht eine gebrochene und eine reflektierte, sondern im allgemeinen zwei gebrochene (eine dilatationale und eine torsionale) und zwei reflektierte (dilatationale und torsionale) Wellen. An den Grenzen anisotroper Medien sind die Verhältnisse noch komplizierter.

---

*) In einem anisotropen Medium würden die Ausdrücke 9 etwas anders aussehen.

Der Einfluß der Grenzfläche beschränkt sich nicht auf die Reflexion und Refraktion elastischer Wellen. Vor etwa 24 Jahren hat Lord Rayleigh*) gezeigt, daß längs der Grenzfläche sich ganz eigentümliche Wellen fortpflanzen können. Eine ausführliche mathematische Theorie dieser Wellen, freilich nur für den einfachsten Fall einer ebenen Grenzfläche, hat H. Lamb**) gegeben.

§ 3. Oberflächenwellen von Rayleigh und Lamb.

Die Differentialgleichungen 5 lassen folgende Integrale zu:

$$u = Ae^{\sigma}, \quad v = Be^{\sigma}, \quad w = Ce^{\sigma}, \quad \ldots\ldots 12$$

wo, der Kürze halber,

$$\sigma = -rz + i(fx + gy + pt). \quad \ldots\ldots 13$$

gesetzt wurde. A, B, C, r, f, g, p sind gewisse Konstanten und $i = \sqrt{-1}$. Damit jedoch die Gleichungen 5 erfüllt werden, müssen zwischen diesen Konstanten gewisse Beziehungen bestehen: es muß entweder

$$\left.\begin{array}{l} A = ifc, \quad B = igc, \quad C = -rc, \\ \text{wo } c \text{ eine neue Konstante bedeutet,} \\ \text{und gleichzeitig:} \\ f^2 + g^2 - r^2 = \dfrac{\varrho}{\lambda + 2\mu} p^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots 14$$

sein, oder aber:

$$\left.\begin{array}{l} i(Af + Bg) - rC = 0 \\ \text{und gleichzeitig:} \\ f^2 + g^2 - r^2 = \dfrac{\mu}{\varrho} p^2 \end{array}\right\} \text{sein.} \ldots\ldots 15$$

Bezeichnen wir die Integrale erster Art mit dem Index 1 und diejenigen zweiter Art mit dem Index 2, dann werden die allgemeineren Integrale die Summen der Integrale beider Arten sein, und man wird schreiben können:

$$u = A_1 e^{\sigma_1} + A_2 e^{\sigma_2}, \quad v = \ldots \text{usw.} \ldots\ldots 16$$

Wir setzen voraus, daß das Medium einseitig von der Ebene $z = 0$ begrenzt ist: unterhalb dieser Ebene, wo $z > 0$, dehnt sich das Medium ins Unendliche aus, oberhalb, wo $z < 0$, ist leerer Raum.

---

*) Rayleigh, London Math. Soc. Proceedings, Bd. XVII (1885), S. 4 ff.

**) Lamb, On the Propagation of Tremors. Phil. Trans. R. S. London, Ser. A, Bd. 203 (1904), S. 1—42.

In der Grenzebene sind überall sowohl die normale als die beiden tangentialen Spannungen Null, d. i.

$$N_3 = T_2 = T_1 = 0 \text{ für } z = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 2 (§ 2):

$$\lambda\,\Theta + 2\mu\frac{dw}{dz} = \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) = 0, \quad \text{für } z = 0 \quad 17$$

Nach Substitution der Werte für u, v, w aus den Formeln 16 überzeugt man sich sofort, daß f, g und p den beiden Integralen gemeinsam sein müssen, nur r_1 und r_2 können verschieden sein. Ferner findet man, daß

$$\frac{A_2}{f} = \frac{B_2}{g} = H, \quad \ldots\ldots \quad 18$$

wo H eine neue Konstante bedeutet, und daß die Gleichungen 17 sich auf zwei Gleichungen reduzieren. Mit Rücksicht auf die zweite Gleichung 14 kann man sie folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda\varrho}{\lambda + 2\mu}\,c p^2 + 2\mu\,(r_2 C_2 - r_1{}^2 c) &= 0 \\ i\,C_2 = H r_2 + 2\,i\,c\,r_1 & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 19$$

Auf Grund der ersten Gleichung 15 und der Gleichungen 18 ist

$$H = -\frac{i\,r_2\,C_2}{f^2 + g^2}.$$

Nun kann man aus dieser letzten Gleichung und den Gleichungen 19 die Konstanten H und C_2 eliminieren. Auf diese Weise bekommt man eine einzige Gleichung, die nach Division durch c, nach Einführung der Symbole

$$m^2 = f^2 + g^2, \quad k^2 = \frac{\varrho}{\mu}, \quad h^2 = \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} \quad \ldots \quad 20$$

und nach leicht ersichtlichen Umformungen die Gestalt

$$(k^2 - 2h^2)p^2 + 2\left[\frac{2\,r_1\,r_2\,m^2}{m^2 + r_2{}^2} - r_1{}^2\right] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 21$$

annimmt. Jetzt kann man die zweite Gleichung 14 und die zweite Gleichung 15 mit Rücksicht auf die Formeln 20 auf die Gestalt

$$r_1{}^2 = m^2 - h^2 p^2, \quad r_2{}^2 = m^2 - k^2 p^2 \quad \ldots\ldots \quad 22$$

bringen und diese neuen Ausdrücke für r_1 und r_2 in Gleichung 21 einführen. Nach leichten Umformungen bringt man diese auf die Gestalt:

$$k^8\left(\frac{p}{m}\right)^8 - 8\,k^6\left(\frac{p}{m}\right)^6 + (24\,k^4 - 16\,h^2 k^2)\left(\frac{p}{m}\right)^4 + 16\,(h^2 - k^2)\left(\frac{p}{m}\right)^2 = 0. \quad 23$$

Nach Fortschaffung der parasitischen Wurzel $\left(\frac{p}{m}\right)^2 = 0$ bleibt eine kubische Gleichung für $\left(\frac{p}{m}\right)^2$ übrig, die wir für zwei Spezialfälle auflösen werden.

In einem inkompressiblen Medium ist $\lambda = \infty$, $h = 0$ und die kubische Gleichung hat zwei komplexe Wurzeln und eine reelle, nämlich:

$$p^2 = 0{,}91\,275 \ldots \frac{m^2}{k^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{p}{m} = 0{,}9554 \ldots \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24$$

Aus der Formel 13 aber ersieht man, daß

$$\frac{p}{m} = \frac{p}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

nichts anderes, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in horizontaler Richtung bedeutet, und die Gleichung 24 zeigt uns, daß diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwas kleiner ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$ der torsionalen Welle.

Ist wiederum die Beziehung Poissons $\lambda = \mu$ erfüllt, dann ergibt sich

$$h^2 = \tfrac{1}{3} k^2$$

und die kubische Gleichung hat drei reelle Wurzeln. Aber nur eine Wurzel gibt $r_1{}^2 > 0$, die beiden andern liefern negative Werte für $r_1{}^2$, die wir nicht brauchen können, da es sich um eine mit der Tiefe abnehmende Bewegung handelt. Die einzige brauchbare Wurzel ist:

$$p^2 = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \frac{m^2}{k^2}$$

woraus folgt:

$$\frac{p}{m} = 0{,}9194 \ldots \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25$$

Wieder ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$ der torsionalen Welle. Dies ist auch sonst eine allgemeine Regel, denn sobald

$$\frac{p}{m} > \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$

wird $r_1{}^2$ negativ und somit unbrauchbar.

Da die Konstanten c und m willkürlich geblieben sind, kann man aus den Ausdrücken 16 mit Hilfe bekannter Methoden Integrale ableiten, welche die Fortpflanzung einer beliebigen Störung darstellen können. Diese Integrale haben jedoch denselben Nachteil wie die soeben entwickelten partikulären Integrale: sie sind zweidimensional. Aber man kann, wie Lamb gezeigt hat, durch Superposition von unendlich vielen Lösungen in unendlich vielen Azimuten auch dreidimensionale Integrale erhalten. Es ist weiter möglich, diese Theorie auf ein anisotropes Medium auszudehnen, aber wir können uns mit allen diesen Entwicklungen nicht befassen. Das Angeführte genügt, um die wesentlichen Merkmale der Theorie wiederzugeben.

In der Oberfläche (d. h. für $z = 0$) ist die horizontale Amplitude der Schwingungen stets kleiner als die vertikale Amplitude. In der Tat findet man auf Grund obiger Formeln, daß das Verhältnis der horizontalen Amplitude zur vertikalen sich durch die einfache Formel:

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{k^2 p^2}{m^2}}}{1 - \frac{1}{2}\frac{k^2 p^2}{m^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26$$

ausdrückt, und es ist leicht einzusehen, daß dieses Verhältnis immer kleiner als die positive Einheit bleibt und nur dann der Einheit gleich wird, wenn $\frac{k^2 p^2}{m^2}$ verschwindet. Speziell im Falle der Inkompressibilität hat dieses Verhältnis den Wert 0,5437 . . . und in dem Falle, wo die Gleichung Poissons erfüllt ist, den Wert $\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = 0{,}6812 \ldots$ Erst in einem anisotropen Medium könnte das Verhältnis der horizontalen Amplitude zur vertikalen (das aber dann eine andere Form als 26 hat) größer als die Einheit sein. — Viele Seismologen erblicken darin einen wesentlichen Mangel der Rayleigh-Lambschen Theorie. Da die Aufzeichnungen der Instrumente größere horizontale als vertikale Amplituden ergeben, halten sie die Theorie Rayleighs und Lambs für eine interessante mathematische Aufgabe, die indes einer Anwendung in der Wirklichkeit entbehrt. Wir können jedoch diesem Urteil nicht beistimmen und meinen, daß ein „experimentum crucis“ hierfür noch nicht geliefert worden ist. Wir können uns nicht von der Erde loslösen und von außen her zusehen, welche Bahn denn nun eigentlich ein schwingendes

Teilchen der Erdoberfläche beschreibt. Mit dem Boden schwingen unsere Instrumente und wir selbst, nur relative Bewegungen können wir konstatieren, nicht absolute*). Die sogenannte „träge Masse", ein sehr schweres Gewicht, das in den meisten Seismographen vorhanden ist, soll uns zwar den fehlenden Fixpunkt außerhalb der Erde ersetzen, aber es ist ja bekannt, daß dieselbe nur zu Beginn der Bewegung ihre Aufgabe leidlich erfüllt. Aus dem entstellten und verzerrten Bilde, welches die Aufzeichnungen der Instrumente geben, muß man unter zahlreichen technischen und theoretischen Schwierigkeiten die Bodenbewegung erkennen. Dazu gesellt sich noch der Umstand, daß die vertikale Bewegung in die Richtung der Schwerkraft fällt, weshalb zur Aufzeichnung vertikaler Schwingungen andere Seismographen als zur Aufzeichnung horizontaler gebraucht werden müssen. Eine weitere Diskussion dieser Frage würde uns in das Gebiet der Seismometrie führen, das wir an diesem Orte nicht betreten wollen. Diejenigen, die sich mit der Seismometrie vertraut machen wollen, verweisen wir auf die zahlreichen Abhandlungen Galitzins in den „Nachrichten der Seismischen Kommission" (zu Petersburg) und auf Wiecherts „Theorie der automatischen Seismographen" im zweiten Bande der „Göttinger Abhandlungen" (neue Folge).

So gibt uns die Theorie Wellen, die längs der Oberfläche fortschreiten. Das bedeutet nicht, daß sie auf die Oberfläche selbst beschränkt sind, sondern, daß ihre Amplituden mit der Tiefe abnehmen. Die Welle setzt sich aus zwei Gliedern zusammen, deren erstes den Faktor $e^{-r_1 z}$ und deren zweites den Faktor $e^{-r_2 z}$ enthält (vergl. Formel 16). Aus den Formeln 22 und 20 ersieht man, daß $r_1 > r_2$ und daß folglich das erste Glied rascher als das zweite abnimmt. Jedes Glied für sich nimmt in geometrischer Progression ab, wenn die Tiefe in arithmetischer Progression wächst**). Da die Zerstreuung der Energie nach unten gering ist, nimmt die Energie der Bewegung (Quadrat der Amplitude) in der Oberfläche mit der Entfernung vom Epizentrum weit langsamer als bei kugelförmigen Wellen ab.

---

*) Unter einer absoluten Bewegung verstehen wir die Bewegung in bezug auf ein System von Koordinaten, welches fest mit der Erde verbunden ist, aber an ihren Schwingungen nicht teilnimmt. Ein solches System liegt unseren Differentialgleichungen zugrunde.

**) Man darf nicht vergessen, daß die Theorie keine Reibung kennt.

Während der Erdbeben beobachtet man Wellen, die mit den Wellen Rayleighs und Lambs identifiziert werden können. Die sogenannte Hauptphase eines Erdbebens an entfernten Stationen besteht aus Wellen, die seit etlichen 1000 bis 2000 km Entfernug vom Epizentrum bis zum Antiepizentrum*) und von diesem zurück nach dem Epizentrum eine praktisch konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit von etwa 3,4 km pro Sekunde besitzen. — Diese Konstanz der Oberflächengeschwindigkeit bildet einen schwerwiegenden Beweis zugunsten der Ansicht, daß die Hauptphase sich tatsächlich längs der Oberfläche fortpflanzt; nur durch gekünstelte Theorien könnte man diese Erscheinung anders erklären. Einen zweiten Beweis gibt die Tatsache, daß die Hauptphase nicht nur auf ihrem Hinweg vom Epi- zum Antiepizentrum, sondern bei starken Erdbeben, auch auf dem Rückweg vom Antiepizentrum zum Epizentrum**) verfolgt werden kann. Das steht nämlich im Zusammenhang mit der relativ langsamen Energiezerstreuung. In einer Kugel pflanzt sich die Oberflächenwelle wie ein immer größer werdender Ring fort, bis sie 90^0 Abstand vom Epizentrum erreicht; nachher zieht sich der Ring immer mehr zusammen, bis im Antiepizentrum eine abermalige Konzentration der Energie eintritt. Natürlich sammelt sich nicht die ganze aus dem Epizentrum ausgegangene Energie wieder, der größte Teil wird unterwegs zerstreut. Welchen Bruchteil der vom Epizentrum ausgegangenen Energie die im Antiepizentrum wieder angesammelte Energie ausmachen wird, läßt sich theoretisch ohne eine Reihe ganz bestimmter Annahmen über die Konstitution der Erde nicht berechnen; aber aus den Beobachtungen zu Göttingen und zu Apia (Samoa) berechnet Angenheister***), daß im Antiepizentrum sich etwa $\frac{1}{490}$ der vom Epizentrum ausgegangenen Energie sammelt†). Von hier aus strömt

*) Im selben Sinne wie Antipoden.

**) Zuweilen noch auf der zweiten Wanderung vom Epi- zum Antiepizentrum.

***) Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905 (Göttinger Nachrichten 1906), S. 11.

†) Man darf das in § 1 Gesagte nicht vergessen. Epizentrum, Antiepizentrum usw. sind bloß Hilfsbegriffe. Die Energie geht aus dem Herde, d. h. aus einem Gebilde von endlichen Dimensionen in einer sehr kurzen aber endlichen Zeit aus. Infolgedessen kann auch im Antiepizentrum keine unendliche Verdichtung der Energie in einem Augenblicke stattfinden. Aber es gibt um das Antiepizentrum herum ein Gebiet, in welchem während einer endlichen

die Energie von neuem zum Epizentrum zurück, wo sich noch $\frac{1}{242\,500}$ der alten Energie wieder sammelt. Die Amplitude ist der Quadratwurzel aus der Energie proportional, sie sinkt also bis zum Gegenpunkt auf $\frac{1}{22}$ und beträgt bei der Rückkehr des Bebens zum Epizentrum nur $\frac{1}{490}$ der ursprünglichen Größe. Wieviel Energie aber unterwegs infolge der Reibung in Wärme umgewandelt und wieviel in das Erdinnere und, in geringerem Maße, in das Meer und die Luft zerstreut wird, das wissen wir nicht.

Japanische Seismologen vertreten die Ansicht, daß die Hauptphase der Erdbeben mit den Oberflächenwellen Rayleighs nichts zu tun hat. Sie meinen*), daß alle Phasen der Erdbeben sich parallel zur Erdoberfläche aber in verschiedenen Tiefen fortpflanzen. Die ersten Vorläufer wandern in den tiefsten Schichten, welche die größte Elastizität besitzen, und erlangen auf diese Weise die größte Geschwindigkeit; die zweiten Vorläufer werden in etwas höher gelegenen Schichten, die Hauptphase in der Erdkruste fortgepflanzt. Gewiß enthält diese Theorie einen Kern Wahrheit, sie erscheint uns aber als eine weniger gelungene Abart der in Europa üblichen Theorie, nach welcher die Hauptphase durch die Erdkruste, die Vorläufer durch das Erdinnere fortgepflanzt werden. Wir nennen sie weniger gelungen, denn es ist eine Inkonsequenz, anzunehmen, daß Schwingungen sich parallel zur Erdoberfläche in einer gewissen Tiefe fortpflanzen und doch zur Oberfläche gelangen.

In einem aber können wir den Japanern beistimmen: für Sande, Lehme, Löß und andere weiche Bodenarten, welche an der Erdoberfläche liegen, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Hauptphase: 3,4 km pro Sekunde entschieden zu groß. Wahrscheinlich pflanzt sich die Rayleighsche Welle längs der Oberfläche der harten und kompakten archäischen und paläozoischen Gesteine fort, welche überall den Unterbau der Erdkruste bilden. Was darüber liegt, spielt eine passive Rolle, es schwingt einfach mit.

Zeit Schwingungen von allen Himmelsgegenden eintreffen, wo also eine große Verdichtung von Energie stattfindet. Man darf nie vergessen, daß die Theorie immer nur ein verzerrtes Bild, ein mehr oder weniger gelungenes Modell der Wirklichkeit geben kann.

*) Cf. F. Omori, The Great Indian Earthquake of 1905. Publ. of the Earthquake Investigation Committee, Nr. 23 (1907), S. 273.

Die Oberflächenwellen erinnern ein wenig an die Übertragungswellen im Wasser, von denen später die Rede sein wird. Sowie jene Wellen breiten sie sich ringförmig längs der Erdoberfläche aus, sowie in jenen nehmen in diesen die Amplituden der Schwingungen mit der Tiefe ab. Es besteht somit eine kinematische Ähnlichkeit, dynamisch sind sie verschieden. Dies sind elastische, jenes Gravitationswellen.

§ 4. Fortpflanzung elastischer Wellen in anisotropen Medien.

Was die Mikrostruktur anbetrifft, so sind die Gesteine gewiß heterogen, denn sie bestehen aus Kristallen verschiedener Mineralien; sie sind ferner gewiß anisotrop, denn mit wenigen Ausnahmen sind Kristalle anisotrope Körper. Aber die Mikrostruktur spielt keine Rolle in der Seismologie, denn die Dimensionen der Gesteinskörner sind verschwindend klein im Vergleich zur Länge seismischer Wellen, die nach Kilometern und Myriametern gemessen wird. — Für die Seismologie ist die Makrostruktur wichtig; es fragt sich, welche Eigenschaften ganze Gesteinslager besitzen, sind sie homogen oder heterogen, isotrop oder anisotrop? — Große homogene Gesteinslager sind selten, aber es gibt keine allgemein gültige Regel, es kann ein bestimmtes Gesteinslager meilenweit dieselbe Härte, dieselbe Festigkeit bewahren, während ein anderes innerhalb kleiner Entfernungen in seiner Beschaffenheit variiert. Insbesondere sind es verwitterte Gesteine, die auf der Oberfläche ganz andere physische Eigenschaften besitzen als in der Tiefe. — Bezüglich der Isotropie bezw. Anisotropie kann man sagen, daß die Isotropie als Ausnahme und die Anisotropie als Regel gelten muß: die Schichtung, die Orientierung der Mehrzahl der Kristalle und andere Ursachen bewirken, daß nicht bloß geschichtete und metamorphe, sondern auch die meisten Eruptivgesteine eine deutliche Anisotropie zeigen. Zahlreiche zu technischen Zwecken angestellte Versuche, ferner Versuche von H. Nagaoka*), S. Kusakabe**), Adams und Coker***) haben dies zur Genüge bewiesen.

---

*) H. Nagaoka, Elastic Constants of Rocks. Publ. of the Earthquake Investigation Comm., Nr. 4, Tokyo 1900.

**) S. Kusakabe, A kinetic Measurement of the Modulus . . . a. a. O., Nr. 22, S. 27—49.

***) Adams und Coker, An Investigation into the elastic Constants of Rocks. Carnegie-Inst. Public. 1906, Nr. 46.

Abgesehen von der oberflächlichen Welle, die in anisotropen Medien ebensogut wie in isotropen entstehen kann, sind einem anisotropen Medium in der Regel nicht zwei, sondern drei sich allseitig fortpflanzende Wellen eigen. Damit bloß zwei Wellen entstehen, müssen gewisse spezielle Relationen zwischen den elastischen Konstanten des Körpers bestehen, die wahrscheinlich nur selten realisiert werden. Es kann aber geschehen, daß zwei Wellen wenig abweichende Fortpflanzungsgeschwindigkeiten haben. — Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nicht bloß bei verschiedenen Wellen, sondern auch bei ein und derselben Welle in verschiedenen Richtungen verschieden. Dementsprechend sind die Wellen nur ausnahmsweise kugelförmig. In einem transversal isotropen Körper, d. h. in einem Körper, der in allen zu einer gewissen Ebene parallelen Richtungen dieselben elastischen Eigenschaften hat, sind die Wellenflächen Rotationsflächen, wobei eine Welle die Gestalt eines Rotationsellipsoids hat und die beiden anderen eine gemeinschaftliche algebraische Gleichung zwölften Grades, die sich aber auf eine Gleichung sechsten Grades reduziert, besitzen. Regelmäßig geschichtete Gesteinsarten müssen sich wie transversal-isotrope Körper verhalten.

In anisotropen Körpern besteht die Deformation eines Elements beim Durchgang der Welle gleichzeitig in einer Volumen- und in einer Gestaltsänderung, d. h. eine jede Welle ist gleichzeitig dilatational und torsional, obwohl natürlich in einer Welle diese, in einer anderen jene Deformation überwiegen kann. Die Trennung der Dilatation von der Torsion erfolgt dann und nur dann, wenn zwischen den Elastizitätskonstanten, deren Zahl im allgemeinsten Falle 21 erreichen kann, gewisse spezielle Beziehungen bestehen.

Nach S. Kusakabe*) beträgt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswelle

in archäischen Gesteinen . . .	3,91—6,12 km	pro	Sek.
„ paläozoischen „ . . .	2,10—5,68 „	„	„
„ mesozoischen „ . . .	2,09—5,30 „	„	„
„ känozoischen „ . . .	1,43—4,09 „	„	„

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsionswelle nach demselben Verfasser**):

*) S. Kusakabe, Kinetic Measurement of the Modulus etc. Journal of the College of Sc. Tokyo, Bd. 20, Nr. 10.

**) Derselbe, Rigidity of Rocks and Hysteresis Function. a. a. O. Nr. 6.

in archäischen Gesteinen . . .	2,70—4,40 km	per Sek.*)
„ paläozoischen „ . . .	1,03—4,33 „	„ „
„ tertiären „ . . .	0,43—1,80 „	„ „
„ quartären Eruptivgesteinen .	0,97—1,76 „	„ „

Nach dem, was soeben gesagt wurde, kann es uns sonderbar erscheinen, daß Kusakabe keinen Unterschied zwischen verschiedenen Richtungen macht und Geschwindigkeiten der dilatationalen und der torsionalen Wellen angibt, als wenn es sich um isotrope Körper handele. Doch sollten wir uns darüber nicht wundern. Kusakabe wußte sehr wohl, daß die Gesteine anisotrop sind (er sagt dies ausdrücklich). Seine Beobachtungen beweisen, daß beinahe bei allen Gesteinsarten (er untersuchte deren 158) der Elastizitätsmodul in einer bestimmten Richtung größer (bis anderthalbmal so groß) als in einer darauf senkrechten war; aber aus Gründen, die sofort weiter unten angegeben werden, hatte er mit großen Schwierigkeiten bei seinen Experimenten zu kämpfen, so daß scharfe Bestimmungen nicht zu erzielen waren. Infolgedessen entschied er sich dafür, aus Resultaten, welche für verschiedene Richtungen galten, die Mittel zu bilden. Wenn er folglich eine Geschwindigkeit von 5,3 km pro Sekunde angibt, so bedeutet dies, daß die Geschwindigkeit in einer Hauptrichtung über 5,3, in einer anderen unter 5,3 km pro Sekunde liegt; nur das Mittel aus seinen Beobachtungen ist 5,3 km pro Sekunde. — Weiter erlaubten seine Experimente, nicht mehr als zwei Elastizitätskonstanten für ein Gestein zu bestimmen; er hatte also kein Mittel, drei Wellen auf die Spur zu kommen.

Kusakabe warnt selbst vor einer Überschätzung seiner Resultate. Wie gesagt, hatte er mit zahlreichen Schwierigkeiten zu kämpfen. Bei seinen Versuchen, insbesondere bei Torsionsversuchen, zeigte sich — was übrigens schon nach älteren Versuchen und Erfahrungen zu erwarten war — daß die Elastizität der Gesteine sehr unvollkommen ist. Die elastische Nachwirkung**), die Hysteresis

*) Mit Ausnahme eines Glimmerschiefers aus Ibaraki (Japan), bei welchem sie nur 0,83 km pro Sekunde betrug.

**) Die Elastizität reeller Körper hängt nicht bloß ab von der Temperatur, vom Druck, überhaupt von Faktoren, die momentan auf den betreffenden Körper wirken, sondern auch von seiner Geschichte, d. h. von Temperaturen, Drucken, Deformationen usw., welchen der Körper in der Vergangenheit ausgesetzt war. Eine Reihe von Erscheinungen, die davon abhängen, bezeichnen wir kurz als elastische Nachwirkung. Infolge der elastischen Nachwirkung

und die innere Reibung waren sehr groß, die sogenannten Elastizitätskonstanten*) variierten mit der Temperatur, dem Druck und der Feuchtigkeit. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit war von der Amplitude der Schwingungen abhängig: wenigstens in gewissen Grenzen entsprach einer größeren Amplitude eine kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Infolgedessen darf man nicht erwarten, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, sagen wir in einem Granit, „in situ" mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche sich aus Laboratoriumversuchen an einem Stück desselben Granits ergibt, identisch sei; man kann nur erwarten, daß beide Geschwindigkeiten sich nicht besonders voneinander unterscheiden werden.

Angesichts dessen ist es keine schlechte Übereinstimmung, wenn einerseits die Geschwindigkeit der Hauptphase bei Erdbeben sich zu 3,5 km pro Sekunde und andererseits aus den Versuchen Kusakabes die Geschwindigkeit der Torsionalwelle in archäischen Gesteinen zu 2,7 bis 4,4 und in paläozoischen zu 1,3 bis 4,33 km per Sekunde ergibt. — Wir haben nämlich angenommen, daß die Hauptphase als oberflächliche Welle zu deuten ist, und nach den Formeln 24 und 25 (§ 3) entspricht einer Geschwindigkeit der oberflächlichen Welle von 3,5 km eine solche von 3,7 bis 3,8 km der Torsionalwelle. Diese letzte Fortpflanzungsgeschwindigkeit liegt jedenfalls innerhalb der durch die Versuche Kusakabes festgestellten Grenzen der Geschwindigkeit der Torsionalwelle in archäischen und paläozoischen Gesteinen.

Gleichzeitig sehen wir, daß die klassische Elastizitätstheorie auf jeden Fall nur ein unvollständiges Bild der Erdbebenfortpflanzung geben kann. Sie gibt uns Mittel in die Hand, die Anisotropie der Gesteine zu berücksichtigen, nicht aber die innere Reibung, die elastische Nachwirkung und die Hysteresis.

Bezüglich des Erdinnern können wir a priori nur Vermutungen aussprechen. Es ist zu erwarten, daß der Stoff in großen Tiefen sehr inkompressibel ist, folglich die dilatationale oder quasi-dila-

---

und der inneren Reibung sind die Umwandlungen, denen reelle Körper unterliegen, eigentlich irreversibel und die Fundamentalannahme der klassischen Elastizitätstheorie, daß die elastischen Kräfte ein Potential besitzen, ist nicht realisiert.

*) Die Elastizitätskonstanten sind eigentlich bei allen Körpern von der Temperatur und dem Druck abhängig, bei Gesteinen aber tritt diese Abhängigkeit besonders deutlich hervor.

tationale Welle sehr rasch fortleitet. Bei dem großen und nahezu hydrostatischen Druck ist eine ausgesprochene Anisotropie wenig, aber ein heterogener Bau, etwa eine konzentrische Schichtung, ziemlich wahrscheinlich.

§ 5. Erdbeben in großer Entfernung vom Epizentrum.

Auf Stationen, deren Entfernung vom Epizentrum nach Tausenden von Kilometern gezählt wird, dauert ein Erdbeben zuweilen eine Stunde oder länger. Während dieser ganzen Zeit hören die Schwingungen keinen Augenblick auf. Das ist ein Merkmal, das von der klassischen Theorie elastischer Wellen nicht vorgesehen wird. In einem isotropen Medium sollte man auf einer entfernten Station den Vorübergang der dilatationalen separat vom Vorübergang der torsionalen Welle und diesen separat vom Vorübergang der oberfächlichen Welle beobachten, wie man sich durch die folgende einfache Überlegung überzeugen kann. Auf einer entfernten Station kann man die seismischen Wellen so behandeln, als wenn sie von einem Punkte ausgingen. Das einfache Integral 9, in welchem übrigens $F_2 = 0$ gesetzt werden darf, zeigt, daß die Dauer der Erschütterung sich von Punkt zu Punkt nicht ändert. Bezeichnet man die Zeitdauer der ursprünglichen Erschütterung im Herde mit τ, so dauert das Erdbeben in allen Punkten des Mediums ebenfalls eine Zeit τ; nur kommen alle Phasen nach einem Punkte B, dessen Abstand vom Herde r' größer ist als der Abstand r eines anderen Punktes A, um eine Zeit

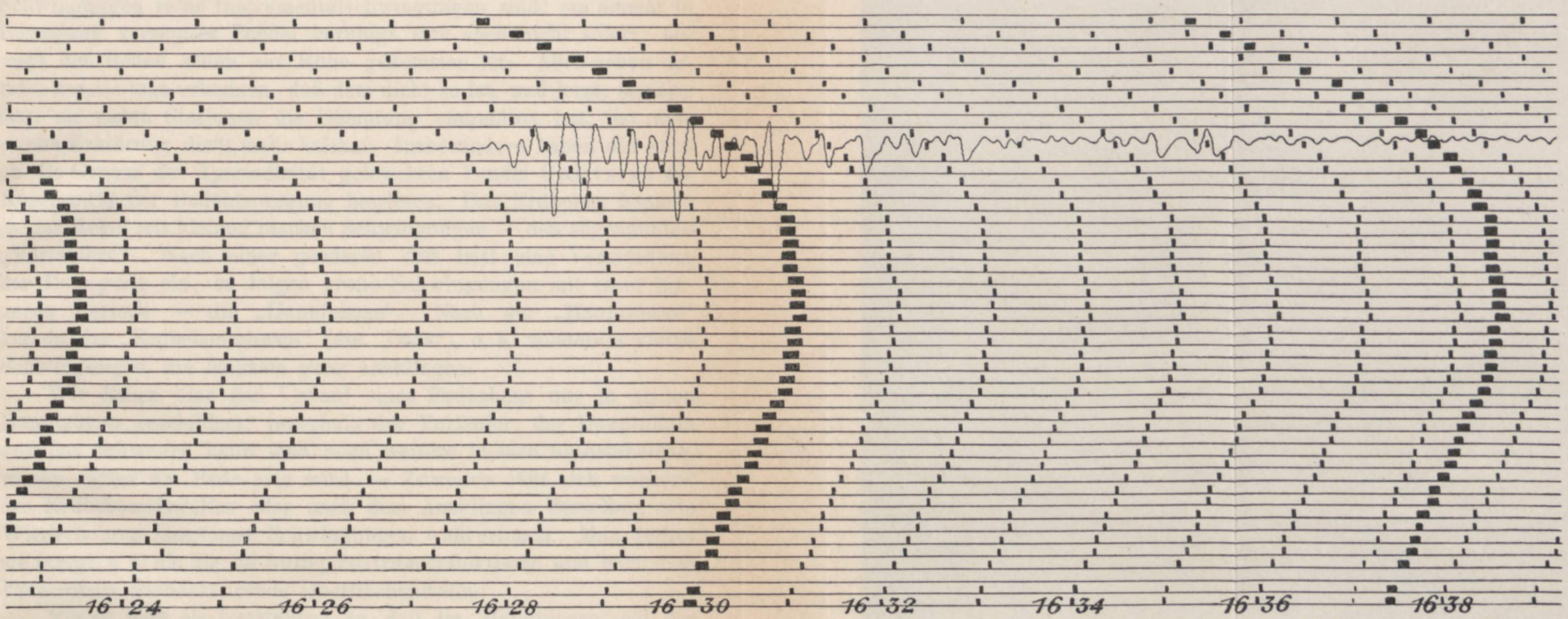
$$\frac{r' - r}{V}$$

später als nach A.

Andererseits gibt es zwei Wellen: eine dilatationale mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_1 und eine torsionale mit der Geschwindigkeit V_2 (vergl. die Gleichungen 10 und 11). Wenn

$$r\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) > \tau,$$

so ist die dilatationale Welle schon durch den betreffenden Punkt gegangen, bevor die torsionale angekommen ist. Ebenso kann, wenn die Entfernung vom Herde groß genug ist, die torsionale schon vorbei sein, bevor die oberflächliche Welle angekommen ist. In einem anisotropen Medium würden sich die Verhältnisse etwas komplizierter, aber ähnlich gestalten: statt zwei Raumwellen und



Rudzki, Physik der Erde.
Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.

Erdbeben von Messina am 28. Dezember 1908 [Krakauer Seismogramm].
Vorläufer, Hauptphase und ein Teil des Schweifes.
Anfang um $5^h\,23^m\,54^s$ Uhrzeit = $5^h\,23^m\,27^s$ M.E.Z. (Uhrkorrektion -27^s.)

einer oberflächlichen können hier drei Raumwellen und eine oberflächliche separat vorübergehen, wenn nur die Entfernung vom Herde ein gewisses Maß übertrifft.

Unterdes tritt ein Erdbeben an einer vom Herde entfernten Station als eine kontinuierliche Reihe von Schwingungen auf (siehe Tafel I). Früher, als man noch mit ungedämpften Seismographen arbeitete, konnte man meinen, daß ein guter Teil der Schwingungen reine Instrumentalschwingungen sind: ein einmal in Bewegung versetztes Pendel beruhigt sich eben nicht sofort, obwohl der Boden schon zur Ruhe gekommen ist. Aber schon damals konnte man erkennen, daß dem nicht so ist, und jetzt, seitdem man an vielen Stationen die Dämpfung eingeführt hat, ist eine solche Erklärung nicht mehr haltbar. Insbesondere haben die nahe an die Grenze der Aperiodizität gebrachten Pendel Galitzins die Kontinuität der Bodenbewegung bewiesen. Das Erdbeben beginnt in der Regel mit kleinen raschen Schwingungen — den sogenannten „Vorläufern“. Nach einer gewissen Zeit tritt eine Verstärkung der Bewegung ein, es folgen große Schwingungen mit einer längeren Periode — die „Hauptphase“. Nach der „Hauptphase“ kommt der „Erdbebenschweif“ (die „Coda“), d. h. wiederum kleine Schwingungen, die langsam ganz ausklingen.

Wir haben hier den Verlauf eines Erdbebens nur in seinen Hauptzügen geschildert; innerhalb der Vorläufer, der Hauptphase und des Schweifes kann man noch weitere Phasen unterscheiden, wovon später die Rede sein wird. — Zuweilen läßt sich während des Erdbebenschweifes oder nach dem Ausklingen desselben eine Wiederholung langsamer Schwingungen wahrnehmen. Man deutet sie (vergl. § 3) als die im Antiepizentrum reflektierte und nach dem Epizentrum zurückkehrende Oberflächenwelle.

Nimmt man als feststehend an, daß die „Hauptphase“ mit der Oberflächenwelle identisch ist, so muß man auch annehmen, daß die Vorläufer den Raumwellen entsprechen, da den Raumwellen eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als der Oberflächenwelle zukommt. Warum gibt es dann selbst auf den entferntesten Stationen keine vollkommenen Ruhepausen zwischen einzelnen Raumwellen?

Nicht eine, sondern vier Erklärungen gibt es hierfür. Erstens kann man sagen, daß die Ruhepausen von reflektierten und gebrochenen Wellen ausgefüllt werden. Dicht unterhalb der Erdoberfläche gibt es in der Erdkruste sicher und in größeren Tiefen möglicherweise so viele Trennungsflächen zwischen verschiedenen Gesteinen,

so viele Spalten, daß seismische Wellen beständig Gelegenheit zur Reflexion und Brechung haben. Bedenkt man noch, daß selbst an der Grenze zwischen zwei isotropen Medien eine Welle zwei reflektierte und zwei gebrochene, somit im ganzen vier Wellen erzeugen kann*), so wird man zu der Überzeugung gelangen, daß sich wohl genug reflektierte und gebrochene Wellen finden werden, um die Intervalle zwischen den direkt in kürzester Zeit angekommenen Wellen auszufüllen. Zweitens können seismische Wellen Eigenschwingungen in den Schichten der Erdkruste erregen; bis diese Eigenschwingungen ausklingen, kann eine geraume Zeit vergehen. — Drittens kann man sagen, daß seismische Wellen einer starken Dispersion unterliegen. —Viertens könnte man mit Omori annehmen, daß in verschiedenen Tiefen parallel zur Erdoberfläche fortgepflanzte Wellen nacheinander an die Erdoberfläche austreten. Diese letzte, einen innern Widerspruch enthaltende Hypothese haben wir bereits oben (§ 3) kritisiert und brauchen uns nicht mehr damit zu beschäftigen. — Die übrigen drei Ursachen sind plausibel und es scheint, daß jeder von ihnen ein Anteil an der Kontinuität der Erdbeben zuerkannt werden muß, aber über die Größe der einzelnen Anteile läßt sich, wenigstens jetzt, nichts entscheiden.

Der Anteil der Dispersion ist gewiß nicht unbedeutend, denn anfangs kommen kleine und rasche und erst später größere und langsamere Schwingungen an. Das sieht so aus, als wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Amplitude und der Periode der Schwingungen abhängig wäre. Die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Periode heißt aber (in der Optik) Dispersion. Die Notwendigkeit einer seismischen Dispersion erscheint beinahe selbstverständlich, da eine schwächere oder stärkere Dispersion als eine der Materie inhärente Eigenschaft bezeichnet werden kann. Die Abwesenheit der Dispersion in der klassischen Elastizitätstheorie erklärt sich durch die Idealisierung der reellen Verhältnisse. Es wird angenommen, daß die elastischen Kräfte ein Potential besitzen, daß die Verschiebungen und die Differentialquotienten der Verschiebungen nach den Koordinaten sehr klein sind und daß ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden können. Die Differentialgleichungen sind linear

---

*) Wir sagen „kann" und nicht „muß", denn es kann in gewissen Fällen totale Reflexion eintreten. Im allgemeinen werden diese reflektierten Wellen schwächer sein als die direkt ankommenden.

und infolgedessen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen von der Periode und von der Amplitude unabhängig. Bei nichtlinearen Differentialgleichungen hätte sich die Abhängigkeit von der Amplitude und Periode sofort gezeigt. Die Abhängigkeit von der Periode könnte sich selbst bei linearen, aber etwas anders gearteten Differentialgleichungen zeigen. Sobald man also versucht, sich der Wirklichkeit mehr zu nähern und die Gleichungen der klassischen Theorie vervollständigt, stößt man auf die Dispersion. Daraus schließen wir, daß die Dispersion in der Natur der Sache liegt und ihr Fehlen auf einer Abstraktion beruht. Bei hochelastischen Körpern wie Stahl, Elfenbein, die sich mehr dem Ideal der klassischen Theorie nähern, darf man eine geringe, bei Gesteinen, die von jenem Ideal sich weiter entfernen, eine größere Dispersion erwarten.

Das Gesetz der seismischen Dispersion sollte vom Gesetz der optischen verschieden sein. Bei normaler optischer Dispersion ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes um so größer, je länger die Periode; in der Seismologie scheint die entgegengesetzte Regel gültig zu sein. An eine Anwendung der Theorie der optischen Dispersion (wir meinen die Theorie Helmholtzs) auf die Seismologie kann man nicht denken: die jener Theorie zugrunde liegende Vorstellung paßt gar nicht zu den hier obwaltenden Bedingungen. Dort wird die Dispersion als Folge der Reaktion wägbarer Materie auf den Lichtäther aufgefaßt. Dabei denkt man sich die Moleküle der Materie als kleine in den Lichtäther eingebettete Körper. Es ist dies eine Vorstellung, die höchstens auf einige seltene Gesteine übertragen werden könnte, in welchen ein amorpher Zement weit über die eingelagerten Kristalle überwiegt; für die Mehrzahl der Gesteine, welche aus einem Gemenge von Kristallen mit an Bedeutung zurücktretendem Zement bestehen, fehlt jede Analogie.

Wir haben schon gesagt, daß die Kontinuität der Erdbebenbewegung auch auf Eigenschwingungen der Erdkrusteschichten zurückgeführt werden kann. Bekannterweise ist jeder Körper gewisser Schwingungen mit bestimmten Perioden (zum selben Gegenstand werden wir noch im neunten Kapitel zurückkehren) fähig. Solche Schwingungen heißen „freie“ im Gegensatz zu den durch äußere, periodisch wirkende Kräfte „erzwungenen“ Schwingungen, deren Periode mit der Periode der Kraft zusammenfällt. „Freie“ Schwingungen entstehen spontan durch irgendeine Erschütterung, Stoß usw. Einmal erzeugt, würden sie ewig dauern, aber die innere und äußere

Reibung bringt sie früher oder später zum Erlöschen. Bei jedem Erdbeben beobachtet man nun Schwingungen mit Perioden, die von der Periode des Seismographen verschieden sind. Es ist erlaubt, solche Schwingungen als Schwingungen gewisser Gesteinskomplexe zu betrachten, die durch den Vorübergang der seismischen Welle erweckt werden. Nach Wiechert*) kommen am häufigsten Perioden von 8 bis 20 Sekunden vor, speziell häufig (in Göttingen) ist eine Periode von 17 bis 18 Sekunden. Er knüpft daran die folgende Hypothese: Setzen wir voraus, daß unter der Erdkruste sich eine Schicht flüssigen oder wenigstens plastischen Magmas befindet. Dann kann die Erdkruste torsionale horizontale Schwingungen vollführen, wobei die obere sowie die untere Grenzfläche der Kruste als „freie" Oberflächen gelten können. Daraus folgt, daß bei der Fundamentalschwingung der „Knoten" mittwegs zwischen der oberen und unteren Oberfläche liegt, während die Bäuche sich in den freien Oberflächen befinden. Auf diese Weise ist die Dicke der Erdkruste gleich der halben Wellenlänge. Als Geschwindigkeit der Torsionswelle nimmt Wiechert die Geschwindigkeit der Hauptphase, d. i. 3,5 km per Sekunde, als Periode nimmt er 18 Sekunden an; dann ergibt sich die Länge der Welle zu $3{,}5 \times 18 = 63$ km und die Dicke der Erdkruste zu 31,5 km.

Kürzere Perioden können als Schwingungen höherer Ordnungen der Erdkruste aufgefaßt werden. Aber man kann auch sagen, daß diese Schwingungen nicht Schwingungen der ganzen Erdkruste, sondern gewisser dickerer oder dünnerer Gesteinskomplexe sind. Andererseits gibt es Schwingungen mit längeren Perioden als 18 Sekunden. Warum soll denn nicht eine von ihnen, etwa die längste, die Fundamentalschwingung der Erdkruste sein? Die Schwingung mit der 18 Sekundenperiode hat vor anderen nur den Vorzug größerer Häufigkeit.

Es ist klar, daß hier noch die Verbreitung gewisser Perioden in Frage kommt. Perioden, die nur an einigen Stationen häufig, an anderen selten vorkommen, können nicht als Perioden der Schwingungen der ganzen Erdkruste aufgefaßt werden. Omori**) behauptet, daß es eine ganze Reihe solcher Perioden gibt, die an verschiedenen Stationen in verschiedenen Weltteilen wiederkehren. Er bezeichnet sie als Konstanten für die ganze Erdkruste.

---

*) E. Wiechert, Erdbebenwellen S. 54.

**) F. Omori, Indian Earthquake etc. S. 211.

Folgendes ist seine Aufstellung (P_1, P_2 usw. bezeichnen Perioden in Zeitsekunden):

$P_1 = 4{,}3,\quad P_2 = 8{,}6,\quad P_{2,3} = 11{,}3,\quad P_3 = 14{,}9,\quad P_4 = 18{,}3,$
$P_5 = 20{,}4,\quad P_{5,6} = 22{,}6,\quad P_6 = 25{,}7,\quad P_7 = 28{,}5,\quad P_{7,8} = 30{,}1,$
$P_8 = 32{,}4,\quad P_9 = 35{,}9,\quad P_{10} = 42{,}0,\quad P_{11} = 45{,}4,\quad P_{12} = 49{,}4,$
$P_{13} = 54{,}4,\quad P_{14} = 59{,}0,\quad P_{15} = 65{,}5,\quad P_{16}\ \ldots\ldots\ P_{19} = 86{,}0.$

Die Perioden der Omorischen Reihe befriedigen näherungsweise die Relation:

$$P_1 = \frac{P_2}{2} = \frac{P_3}{3} = \ldots;$$

diejenigen Perioden, die der obigen Relation nicht genügen, hat Omori mit doppeltem Index versehen. Die längsten Perioden treten während der Hauptphase auf; P_{19} wurde nur einmal beobachtet, P_4 ist mit der häufigsten Periode Wiecherts identisch. Ob allen Perioden Omoris wirklich eine allgemeine Bedeutung zukommt, mag dahingestellt bleiben: hat er doch eine nur ein einziges Mal beobachtete Periode in seine Liste aufgenommen. Das hindert aber nicht, daß die Existenz der Eigenschwingungen nicht bezweifelt werden kann und daß die Kontinuität der Erdbebenbewegung zum großen Teil auf erregten Eigenschwingungen beruht.

Die Eigenschwingungen (oder „freien“ Schwingungen) eignen sich sehr gut zur Erklärung des Erdbebenschweifes: derselbe sieht aus wie ein Ausklingen der Bewegung, wie ein Zurückkehren eines schwingenden Systems in den Ruhezustand. Doch den ganzen „Erdbebenschweif“ dem Absterben der Eigenschwingungen zuzuschreiben, wäre ein Irrtum; man merkt ganz deutliche Verstärkungen der Bewegung auch im Erdbebenschweife. Man wird sie wohl am besten dem Eintreffen mehrmals an der Oberfläche und an den inneren Diskontinuitätsflächen reflektierter Wellen zuschreiben. Auch muß die Dispersion der vielfach reflektierten Wellen einen Anteil am Erdbebenschweife haben.

Die Dauer des Erdbebens sowie die Zeitintervalle zwischen dem Eintreffen einzelner Phasen wachsen mit der Entfernung vom Herde. Bei verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit einzelner Wellen kann es nicht anders sein. Man kann umgekehrt aus den Zeitintervallen zwischen dem Eintreffen einzelner Phasen die Entfernung der Station vom Epizentrum berechnen. Diese Methode wird sehr oft und nicht ohne Erfolg verwendet.

Wir haben gesagt, daß die Vorläufer als ein Äquivalent der Raumwellen aufgefaßt werden können. Gewöhnlich unterscheidet man in den Vorläufern zwei Phasen und bezeichnet den Anfang der ersten (gleichzeitig Anfang des Erdbebens) als den Moment der Ankunft der dilatationalen, den Anfang der zweiten als den Moment der Ankunft der torsionalen Welle. Es ist nicht zu leugnen, daß hier eine gewisse Suggestion seitens der Theorie der Fortpflanzung elastischer Wellen in isotropen Medien vorliegt; denn in einem gewöhnlichen Seismogramme ist der Anfang der zweiten Phase keineswegs immer so deutlich markiert, daß man ihn sofort erkennt. Andererseits gibt es sehr viele Seismogramme, in denen man in den Vorläufern nicht zwei, sondern drei, vier*) und sogar noch mehr Phasen unterscheiden kann. Die Anhänger der Theorie zweier Phasen sagen dann, daß überzählige Phasen von reflektierten Wellen herrühren. — Da die Erdkruste gewiß aus anisotropen Gesteinen besteht, dürfte man eigentlich drei Raumwellen und drei Phasen im Vorläufer erwarten, aber auch dafür gibt es keine experimentellen Belege. Wir sind der Meinung, daß diese Frage noch nicht spruchreif geworden ist; man darf nicht vergessen, daß die Phasen in dem Seismogramm bei weitem noch nicht identisch sind mit den Phasen der Bodenbewegung. Berechnet man diese letztere aus der Indikatorkurve, so bekommt man etwas ganz anderes, als in dem Seismogramme steht**). Aber das Berechnen der Bodenbewegung ist so mühsam und zeitraubend, daß es selten unternommen wird. Man stützt sich auf die Betrachtung der Seismogramme, was leichter ist, aber zu ganz irrigen Schlüssen führen kann.

Es ist sehr bedauernswert, daß die Frage, aus wieviel Phasen der Vorläufer besteht, noch der Lösung harrt, denn es ist eine der wichtigsten in der ganzen Seismologie. Es kann als sicher gelten, daß die Vorläufer durch sehr tiefe Erdregionen zu entfernten Stationen gelangen. Um so sorgfältiger ist alles aus denselben auszuscheiden, was auf etwaige reflektierte oder durch Brechung in der Erdkruste erzeugte, sekundäre Wellen zurückgeführt werden muß, denn der Rest würde uns einen wichtigen

---

*) Japanische Seismologen unterscheiden in der Regel mehr als zwei Phasen.

**) Vergl. H. Arnold, Die Erdbewegung während des ersten Vorläufers. Beiträge zur Geophysik, Bd. 9, S. 269—317.

Fingerzeig auf die Beschaffenheit des Erdinnern geben. Würde es sich zeigen, daß die Vorläufer tatsächlich nur zwei durch das Erdinnere fortgepflanzte Wellenzüge enthalten, so würde man dieselben mit dilatationalen und torsionalen Wellen parallelisieren*) müssen und auf ein festes aus isotropen Stoffen bestehendes Erdinnere schließen. Drei Wellenzüge würden den Beweis geben, daß das Erdinnere aus festen, aber anisotropen Stoffen besteht.

§ 6. **Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Vorläufer.**

Die Hauptphase fassen wir als Oberflächenwelle auf, das ist die natürlichste und einfachste Erklärung für eine Störung, welche längs der Oberfläche mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet. Ebenso ist es geboten, die Vorläufer, wenigstens die ersten, als direkt durch das Erdinnere fortgepflanzte Wellen aufzufassen. Daß sie nicht längs der Erdoberfläche fortschreiten, ist sicher: kein Gestein der Erdkruste ist fähig, elastische Schwingungen mit einer Geschwindigkelt von zehn und mehr Kilometern pro Sekunde fortzupflanzen. Ferner vermag die Hypothese der Fortpflanzung längs der Oberfläche nicht zu erklären, warum die Laufzeit (d. i. die Zeit zwischen dem Stoß im Epizentrum und der Ankunft an der betreffenden Station) zwar mit der geodätischen Entfernung vom Epizentrum wächst, aber nicht proportional dieser Distanz, sondern in einem abnehmenden Verhältnis. — Über die eigentliche Gestalt der Bahnen, auf denen die ersten Vorläufer wandern, ist die Diskussion noch nicht geschlossen. Auf Grund von 417 Beobachtungen bei zehn Erdbeben kommt K. Jordan**) zu dem Schluß, daß vorderhand die Annahme einer geradlinigen Fortpflanzung den Beobachtungen am besten entspricht. Er berechnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu nahezu 12 km pro Sekunde (eigentlich 11,968 $\pm$ 0,042 km pro Sekunde).

Wir müssen aber die Frage: auf welchen Bahnen seismische Schwingungen sich fortpflanzen, zuerst vom theoretischen Standpunkte aus etwas beleuchten. Es empfiehlt sich, den Begriff des Strahles aus der Optik in die Seismologie zu übertragen und von

---

*) Wir sagen „parallelisieren“ und nicht „identifizieren“, denn eine im Erdinnern, sagen wir, rein dilatationale Welle, muß ihren rein dilatationalen Charakter beim Durchgang durch die anisotrope Erdrinde verlieren.

**) K. Jordan, La propagation des ondes seismiques. Revue générale des Sciences, S. 14, Juli 1907.

seismischen Strahlen zu sprechen. Am besten definiert man einen „seismischen Strahl", der von einem Punkte A nach einem anderen Punkte B des Mediums geht, als eine Brachistochrone, d. i. eine Kurve, auf welcher die Laufzeit von A nach B ein Minimum ist. Aus dieser Definition folgt, daß in allen homogenen Medien der Strahl gerade ist; nur in isotropen ist der Strahl mit der Wellennormale identisch und in anisotropen in der Regel von der Normale verschieden*). In heterogenen Medien sind die Strahlen krumm. Wenn aber das heterogene Medium isotrop ist, so bleibt die Identität des Strahles mit der Wellennormale bestehen. Den allgemeinsten Fall eines heterogenen anisotropen Mediums werden wir nicht betrachten, wir werden uns auf den Fall eines heterogenen isotropen Körpers beschränken. Dabei werden wir annehmen, daß der Körper einen konzentrisch-schaligen Bau besitzt. Unter diesen Bedingungen sind die Dichte, die elastischen Konstanten usw. Funktionen des Abstandes vom Mittelpunkte. Die Strahlen sind ebene Kurven und liegen in Ebenen, welche durch den Mittelpunkt gehen. Nach allem, was wir wissen, ist es angezeigt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als stetig von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte zu wachsend anzunehmen. Nun ist es leicht, die Gestalt der Strahlen zu übersehen. Auf Grund der bekannten Regel, welche besagt, daß beim Übergang von einem weniger gut fortpflanzenden zum besser fortpflanzenden Mittel der gebrochene Strahl sich von der Normale entfernt, kommt man sofort zu dem Schluß, daß die Strahlen gegen den Mittelpunkt konvex, gegen die Oberfläche konkav sind. Endlich sieht man, daß jeder Strahl symmetrisch verläuft in bezug auf die Gerade, welche durch den Mittelpunkt und seinen dem Mittelpunkt nächsten Punkt geht. Dies ist aber auch eigentlich alles, was man vom vermutlichen Verlauf seismischer Strahlen sagen kann. Etwas mehr könnte man nur dann sagen, wenn für den Brechungsindex**) bezw. für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine bestimmte Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt eingesetzt werden könnte. Bei dem gegenwärtigen Zustand unserer Kenntnisse ist das aber noch nicht möglich. Trotzdem hat man versucht, einen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindig-

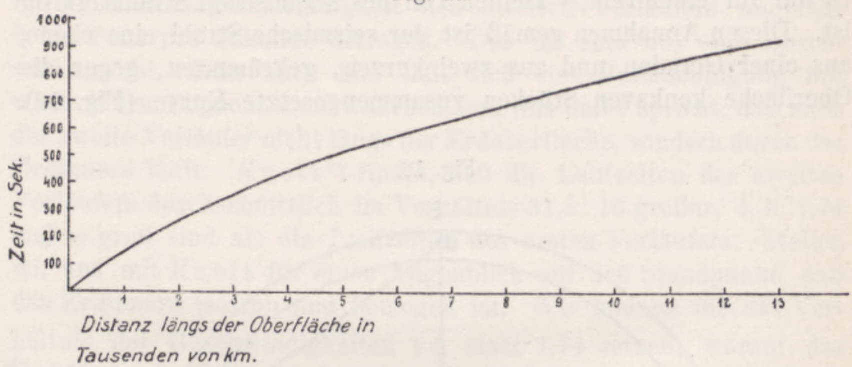
---

*) Infolgedessen bleibt in anisotropen Körpern der gebrochene und der reflektierte Strahl im allgemeinen nicht in der Einfallsebene.

**) Der Brechungsindex ist umgekehrt proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

keit aus den sogenannten Laufzeitkurven, welche direkt auf Grund der Beobachtungen gezeichnet werden, abzuleiten. Man nimmt die längs der Erdoberfläche gemessene Entfernung vom Epizentrum als Abszisse und die Laufzeit als Ordinate. Laufzeitkurven haben Benndorf, Milne, Kövesligethy und Zoeppritz gezeichnet. Die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Kurven ist nicht ganz befriedigend. Hier geben wir die Laufzeitkurve von Zoeppritz*) wieder, da er nur ein gut gesichtetes Material verwendet hat (Fig. 15).

Fig. 15.



Zoeppritz hat sich übrigens der Ableitung eines Fortpflanzungsgesetzes enthalten. Wir werden seinem Beispiele folgen, da uns der richtige Zeitpunkt dafür noch nicht gekommen zu sein scheint.

Es ist nicht unmöglich, daß in sehr großen Tiefen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder abzunehmen beginnt. Nach Oldham**) sprechen dafür gewisse Beobachtungen. Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse ist es vielleicht am besten, dem Beispiel K. Jordans zu folgen und vorläufig eine geradlinige Fortpflanzung der Schwingungen anzunehmen. Auf diese Weise bekommt man einen Mittelwert für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und zu gewissen Schlüssen reicht dies aus. Nur eine von C. G. Knott***) vorgeschlagene Modifikation ist zu empfehlen. Für die Erdkruste ist eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

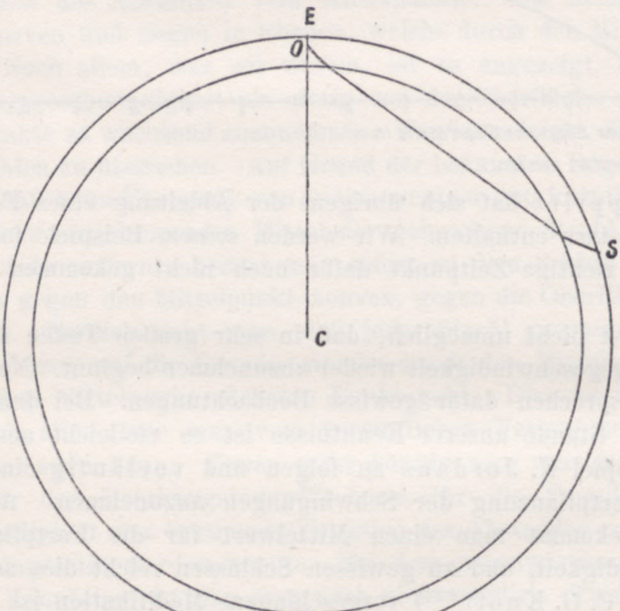
*) E. Wiechert u. K. Zoeppritz, Erdbebenwellen. Göttinger Nachr. 1907.

**) Constitution of the Interior of the Earth. Quart. Journ. Geol. Soc. Bd. LXII (1906), S. 456—473.

***) C. G. Knott, Seismic radiations. Proc. of the R. Soc. of Edinburgh, Bd. XXVIII, III. Tl., Nr. 12 (1908), S. 217—230.

von 12 km pro Sekunde bestimmt zu groß. Dementsprechend nimmt Knott an, daß die Geschwindigkeit von der Oberfläche bis zu $^1/_{10}$ des Radius zunimmt und von da ab bis zum Mittelpunkt konstant bleibt. Als Oberflächenwert nimmt Knott — vielleicht etwas zu hoch — eine Geschwindigkeit von 6 km pro Sekunde an, was ungefähr der oberen Grenze der Geschwindigkeit der dilatationalen Welle in archäischen Gesteinen nach Kusakabe entspricht (vergl. § 4). — Das Gesetz der Geschwindigkeitszunahme in der Erdkruste ist etwas willkürlich; aber das schadet nicht viel, da es nur für einen relativ kleinen Teil des seismischen Strahls gültig ist. Diesen Annahmen gemäß ist der seismische Strahl eine ebene, aus einer Geraden und aus zwei kurzen, gekrümmten, gegen die Oberfläche konkaven Stücken zusammengesetzte Kurve (Fig. 16).

Fig. 16.



Es ist klar, daß wegen der geringeren Geschwindigkeit in der Erdkruste die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinnern sich bei Knott — ceteris paribus — etwas größer als bei Jordan ergeben muß. Streng vergleichbar sind jedoch beide Berechnungen nicht,

da das Beobachtungsmaterial verschieden war. Knott findet für das Erdinnere eine Geschwindigkeit des ersten Vorläufers von 12,23 km pro Sekunde. Auf jeden Fall beweist diese Zahl, daß die Elastizitätskonstanten der Erde sehr groß sind.

Indem die Existenz des zweiten Vorläufers nicht über alle Zweifel erhaben ist, scheint es etwas verfrüht, von dessen Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu reden. Aber setzen wir uns für eine Weile über die Zweifel hinweg und nehmen wir den zweiten Vorläufer als feststehende Tatsache an. Nach den besten Quellen soll die Oberflächengeschwindigkeit des zweiten Vorläufers ungefähr 6 bis 7 km pro Sekunde betragen. Das ist aber nur eine Durchschnittszahl, denn auch hier läßt sich eine Beschleunigung mit wachsendem Bogenabstand wahrnehmen, was dafür spricht, daß auch der zweite Vorläufer nicht längs der Erdoberfläche, sondern durch das Erdinnere läuft. Knott*) findet, daß die Laufzeiten des zweiten Vorläufers durchschnittlich im Verhältnis 31,3 : 18 größer, d. h. 1,74 mal so groß sind als die Laufzeiten des ersten Vorläufers. Stellen wir uns mit Knott für einen Augenblick auf den Standpunkt, daß das Erdinnere isotrop und homogen ist. Wir können für das Verhältnis der Geschwindigkeiten $\sqrt{3}$ statt 1,74 setzen, worauf das Verhältnis der Quadrate der Geschwindigkeiten 3 : 1 und (nach den Formeln 10 und 11) $\lambda = \mu$ wird. Das ist die Beziehung, welche nach Navier und Poisson in einem idealen elastischen Körper erfüllt werden soll. Aus der Gleichheit $\lambda = \mu$ folgt weiter, daß der Kompressionsmodul $\lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{5}{3}\mu$ ist, wo μ die Starrheit bezeichnet. Nun hat Knott gefunden, daß die Geschwindigkeit der dilatationalen Welle 12,23 km beträgt, was in die Formel 10 eingesetzt

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} = 12{,}23 \text{ km pro Sekunde} = 1223 \times 10^3 \text{ cm pro Sek.}$$

ergibt. Setzt man für die Dichte der Erdrinde bis $^1/_{10}$ Radius den Wert 3 und für die mittlere Dichte der ganzen Erde 5,53 ein, so ist für die Dichte des homogenen Erdinnern die Zahl 6,47 anzunehmen, worauf man nacheinander findet:

$$\lambda = \mu = 3{,}23 \times 10^{12}, \quad k \text{ (Kompressionsmodul)} = \tfrac{5}{3}\mu = 5{,}37 \times 10^{12},$$

$$E \text{ (Youngs Modul)} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \tfrac{5}{2}\mu = 8{,}06 \times 10^{12}.$$

*) C. G. Knott, The Physics of Earthquake Phenomena, S. 251. Oxford 1908.

Zum Vergleich führen wir die entsprechenden Koeffizienten für Stahl an:

$\lambda = 1{,}29 \times 10^{12}$, $\mu = 0{,}82 \times 10^{12}$, $k = 1{,}84 \times 10^{12}$, $E = 2{,}14 \times 10^{12}$.

Insbesondere ist die Starrheit μ nicht etwas größer, auch nicht zweimal so groß als die Starrheit des Stahles, wie man im vorigen Kapitel gefunden hat, sondern viermal so groß. — Love*), der absichtlich sehr niedrige Werte genommen hat, setzt die Geschwindigkeit der dilatationalen Welle zu 10, die Geschwindigkeit der torsionalen zu 5 km pro Sekunde an, die Dichte in der ganzen Erde konstant und gleich 5,53. Mit diesen Zahlen findet er $\lambda = 2\mu$, $k = E$, ferner

$$\lambda = 2{,}77 \times 10^{12}, \quad \mu = 1{,}38 \times 10^{12}, \quad k = E = 3{,}69 \times 10^{12}.$$

Alle diese Zahlen sprechen ohne Zweifel für eine sehr große Inkompressibilität des Erdinnern, während eine große Starrheit, ferner die von Knott behauptete Erfüllung der Gleichheit Poissons nicht so sicher verbürgt erscheinen.

Eine nicht unwichtige Bemerkung wird hier am Platze sein. Nehmen wir an, daß das Erdinnere nur dilatationale und torsionale Wellen fortpflanzt und daß tatsächlich die Geschwindigkeit der ersten sowie der zweiten Welle konstant ist, so können wir nur auf die Isotropie, nicht aber auf die Homogenität des Erdinnern schließen. In der Tat enthalten die Formeln 10 und 11 unter den Wurzelzeichen nur Verhältnisse elastischer Konstanten zur Dichte, folglich beweist die Konstanz beider Geschwindigkeiten nur die Konstanz dieser Verhältnisse und die Elastizitätskonstanten können nach dem Erdmittelpunkt hin wachsen, wenn sie nur der Dichte proportional bleiben.

§ 7. **Ursachen der Erdbeben. Das Erdbeben von S. Francisco. Herd. Hypozentrum. Tiefe desselben.**

Jede plötzliche Bewegung, mag es eine vulkanische Eruption, eine unterirdische Gasexplosion, eine plötzliche Kristallisation großer Lavamassen oder ein Höhleneinsturz sein, kann Anlaß zu einem Erdbeben geben. Die wichtigste Ursache der Erdbeben jedoch scheint in plötzlichen Dislokationen zu liegen. Einmal bildet sich eine neue Spalte, ein anderes Mal versinkt, wenn auch nur um einige Zentimeter, ein großer Gesteinskomplex längs einer alten Spalte; wieder ein

---

*) Love, The gravitational Stability of the Earth. Phil. Trans., Bd. 207 A.

anderes Mal verschieben sich plötzlich große Massen horizontal usw. usw. Kürzlich hat M. Smoluchowski*) gezeigt, daß bei der Faltung (in den oberen Partien der Erdkruste) in großen dicken Platten Horizontalbrüche entstehen müssen, wodurch die Platte in mehrere dünne Platten zerfällt, wobei dieselben sich gleichzeitig biegen und übereinander hingleiten. Die Bildung der Horizontalbrüche wird natürlich von Erdbeben begleitet sein.

Alle Erdbeben, welche von plötzlichen Dislokationen herrühren, fassen wir unter dem Namen „tektonischer Beben“ zusammen. Als Beispiel eines tektonischen Erdbebens mag das Erdbeben von S. Francisco am 18. April 1906 gelten.

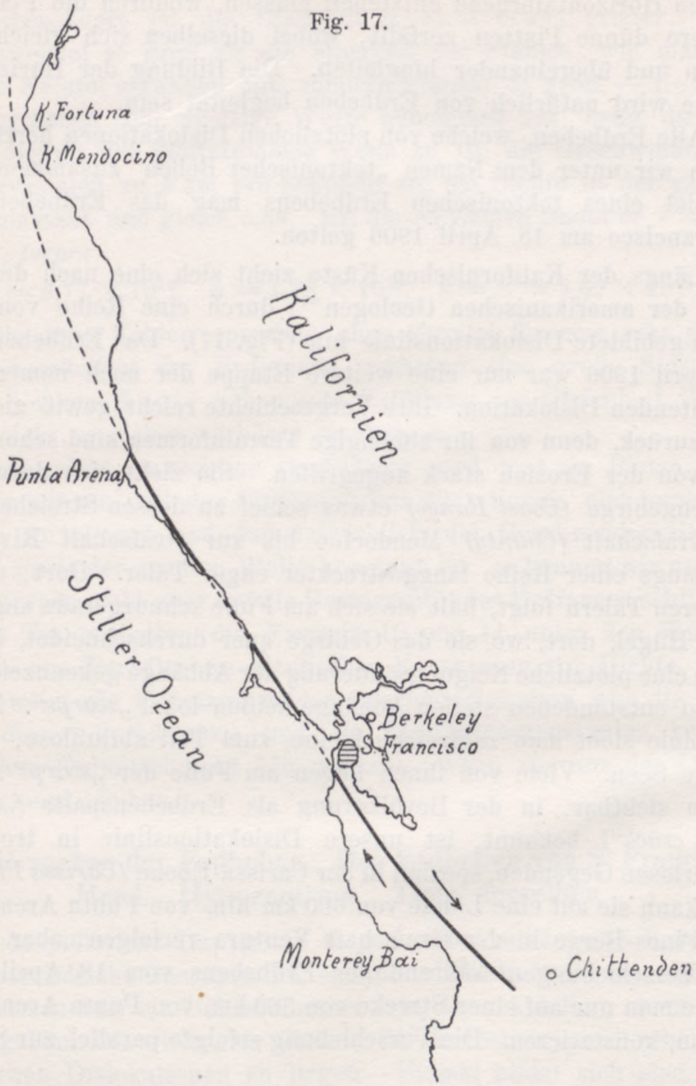
Längs der Kalifornischen Küste zieht sich eine nach der Meinung der amerikanischen Geologen**) durch eine Reihe von Erdbeben gebildete Dislokationslinie hin (Fig. 17). Das Erdbeben vom 18. April 1906 war nur eine weitere Etappe der noch immer fortschreitenden Dislokation. Ihre Vorgeschichte reicht gewiß ziemlich weit zurück, denn von ihr abhängige Terrainformen sind schon zum Teil von der Erosion stark angegriffen. Sie zieht sich durch das Küstengebirge *(Coast Range)* etwas schief zu dessen Streichen von der Grafschaft *(County)* Mendocino bis zur Grafschaft Riverside hin, längs einer Reihe langgestreckter enger Täler. Dort, wo sie breiteren Tälern folgt, hält sie sich am Fuße schnurgerade angeordneter Hügel, dort, wo sie das Gebirge quer durchschneidet, ist sie durch eine plötzliche Neigungsänderung der Abhänge gekennzeichnet. Die so entstandenen steilen Abhänge heißen lokal *„scarps“*. Längs der Linie sieht man zahlreiche kleine, zum Teil abflußlose, selbst salzige Seen. Viele von ihnen liegen am Fuße der *„scarps“*. Am besten sichtbar, in der Bevölkerung als Erdbebenspalte *(„earthquake crack“)* bekannt, ist unsere Dislokationslinie in trocknen wasserlosen Gegenden, speziell in der Carissa-Ebene *(Carissa Plains)*. Man kann sie auf eine Länge von 600 km hin, von Punta Arenas bis zum Pinos-Berge in der Grafschaft Ventura verfolgen; aber sichtbare Verschiebungen während des Erdbebens vom 18. April 1906 konnte man nur auf einer Strecke von 300 km, von Punta Arenas bis S. Juan, konstatieren. Die Verschiebung erfolgte parallel zur Spalte

*) M. Smoluchowski, Über ein gewisses Stabilitätsproblem .... Bull. Acad. Sc. Cracovie (Juni 1909).

**) Nach dem „Preliminary Report of the State (of California) Earthquake Investigation Committee“.

(es ist nicht zu bezweifeln, daß hier eine wahrscheinlich nahezu vertikale Spalte existiert) und wesentlich horizontal. Das Gebiet südwestlich der Spalte verschob sich relativ zum Gebiet nordöst-

Fig. 17.



lich der Spalte im Mittel um 3 m in nordwestlicher Richtung. Wegen der starken Erschütterung war die Verschiebung der oberen losen Bodenschichten unregelmäßig, bald größer, bald geringer als

3 m. Stellenweise erreicht sie ganze 6 m, an anderen Stellen wiederum bleibt sie beträchtlich unter 3 m. Im nördlichen Teil des besprochenen Gebiets hat man außerdem eine vertikale Verschiebung konstatiert; das Gebiet südwestlich von der Spalte hat sich relativ zum nordöstlichen Gebiet bis zu 1,2 m gehoben. Infolge dieser Verschiebungen wurden alle von der Spalte durchquerten Straßen, Mauern, Hecken, Dämme, Häuser, Wasserleitungsrohre usw. zerrissen und die zerrissenen Teile gegeneinander verschoben. Außerdem bildete sich stellenweise längs der Spalte eine bis 2 m breite Furche. Kleine, unter spitzem Winkel zur Hauptspalte verlaufende Spalten begleiten die Furche.

Die Triangulation Kaliforniens*) wurde 1851 begonnen, aber nach vielen Unterbrechungen erst 1899 vollendet. In der Zwischenzeit, nämlich 1868 wurde schon Kalifornien von einem starken Erdbeben heimgesucht. Seit langem behauptete Prof. Davidson, daß der Berg Tamalpais während des Erdbebens von 1868 verschoben wurde, was den „Coast and Geodetic Survey" 1905 zu einer neuen Diskussion der unlängst beendeten Triangulation veranlaßte. Die Diskussion bestätigte die Behauptung Davidsons in bezug auf Mount Tamalpais, aber bezüglich der anderen trigonometrischen Punkte blieb man im Zweifel, ob sie eine Verrückung erfahren haben oder nicht. Bald nach dem Erdbeben von 1906, nämlich schon im Juli desselben Jahres, unternahm man eine neue Triangulation des erschütterten Gebiets, die im Juli 1907 beendet wurde. Sie umfaßte eine Zone von 270 km Länge und 80 km Breite, innerhalb welcher sich 51 alte Triangulationspunkte befanden. Bei der Diskussion der neuen Triangulation wurden auch die alten Messungen noch einmal durchgemustert und es ergab sich, daß schon 1868 ein Block der Erdrinde zwischen dem Leuchtturm auf der Insel Farallon (54 km westlich von S. Francisco) und den Bergen Roß und Tamalpais (beide Berge liegen nur einige Kilometer weit von der Meeresküste, der erste fast genau nördlich von der Insel Farallon, der zweite nordöstlich) — insgesamt ungefähr 3500 qkm der Küste und des Meeresgrundes — horizontal um 1,6 m in der Richtung 11° westlich von N als Ganzes ohne Deformation verschoben wurde. Gleichzeitig verschoben sich die

*) Hayford und Baldwin, The Earth Movements in the California Earthquake of 1906. Coast and Geodetic Survey. Rep. for 1906. Appendix Nr. 3, S. 69—104. Washington 1907.

Triangulationspunkte Loma Prieta, Point Pinos und Gavilan (alle drei befinden sich auf dem Kontinente südöstlich von San Francisco) um 3 m nach *S O*.

Bezüglich des Erdbebens von 1906 bestätigte die Triangulation die Ergebnisse der Rohaufnahme: einige Kilometer weit von der Spalte zeigte sie Horizontalverschiebungen bis 4,6 m, in größerer Entfernung waren die Verschiebungen geringer; einige Triangulationspunkte waren gleichsam gegen die Spalte, andere von ihr weg verschoben worden. Hayford und Baldwin veranschaulichen die Verrückungen auf folgende Weise: Denken wir uns vor dem Erdbeben von 1906 ein Quadratennetz, dessen Seiten parallel bezw. senkrecht zur Spalte verlaufen. Jedes Quadrat östlich von der Spalte wurde während des Erdbebens parallel zur Spalte nach *S S O* verschoben. Die zur Spalte parallelen Quadratseiten sind unverändert geblieben, während die senkrechten so gekrümmt worden sind, daß sie jetzt eine Konkavität nach *S S O* besitzen und die anderen Seiten nicht mehr rechtwinklig schneiden. In der Nähe der Spalte wurden die Winkel um nahezu eine Bogenminute geändert, weiterhin nimmt die Änderung bis zu Null ab. Westlich der Spalte sind die Quadrate nördlich verschoben. Auch hier sind die zur Spalte parallelen Quadratseiten nicht geändert worden, während die rechtwinklig zu ihr verlaufenden Seiten gekrümmt und mit der Konkavität nach *N* gekehrt sind. In der Nähe der Spalte haben die Winkel eine Änderung um mehr als eine halbe Minute erlitten, weiter weg von der Spalte wird die Änderung immer geringer, bis sie endlich ganz verschwindet. In der Nähe der Spalte war die Verschiebung der westlichen Quadrate ungefähr doppelt so groß als die der östlichen, aber die Torsion war auf der östlichen Seite größer als auf der westlichen. Sichtbare Verrückungen reichen westlich weiter als östlich.

Bezüglich der vertikalen Verrückungen können Hayford und Baldwin mangels eines Präzisionsnivellements nichts Bestimmtes aussagen. Nur S. Francisco und dessen nächste Umgebung sind einigemal nivelliert worden, so auch nach dem Erdbeben, aber es müssen hier die Vertikalverschiebungen sehr klein gewesen sein, denn die Differenzen zwischen den Koten vor und den Koten nach dem Erdbeben überschritten nicht die Grenzen möglicher Fehler. Große Differenzen (bis — 37 cm) hat man nur auf aufgeschüttetem Boden gefunden, der sich offenbar während des Erdbebens gesetzt hat.

Bis zu welcher Tiefe die Verrückung reichte, ob sie in der Tiefe größer oder kleiner war als auf der Oberfläche, wissen wir nicht; es scheint aber, daß der Herd des kalifornischen Erdbebens von 1906 tiefer hinab reichte als derjenige des kalabrischen Erdbebens vom 8. September 1905. Mit dem Erdbeben von Messina vom 28. Dezember 1908 können wir das Erdbeben von S. Francisco nicht vergleichen, da die diesbezüglichen Daten für das messinische Erdbeben noch nicht zusammengestellt sind. Auf Grund der von G. B. Rizzo*) zusammengestellten Daten ergab sich die Tiefe des Hypozentrums des kalabrischen Erdbebens von 1905 zu 4,5 bis 11 km, der wahrscheinlichste Wert war 7 km. Unter Zugrundelegung der Daten von F. Omori**), die leider etwas weniger vollständig sind als die Daten in bezug auf das kalabrische Erdbeben, ergab sich die Tiefe des Hypozentrums für das Erdbeben von S. Francisco zu 16,5 bis 32,4 km. Die Berechnung erfolgte auf folgende Weise: Zuerst berechnete man aus möglichst zahlreichen Beobachtungen die scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer gewissen Phase, z. B. des ersten oder zweiten Vorläufers längs der Erdoberfläche. In der Regel stellte sich heraus, daß diese scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit dem Abstand***) vom Epizentrum variiert. Sie hat ein Maximum im Epizentrum, dann nimmt sie ab, erreicht ein Minimum, um nachher wieder zu wachsen. Je tiefer das Hypozentrum, desto weiter vom Epizentrum liegt das Minimum der scheinbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Man kann folglich aus der Lage dieses Minimums auf die Tiefe des Hypozentrums schließen. Ist z. B. γ der im Bogenmaß ausgedrückte Abstand des Minimums vom Epizentrum, dann berechnet sich die Tiefe des Hypozentrums l aus der Formel:

$$l = \frac{2R \cdot \sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \sin \varepsilon}{\cos(\frac{1}{2}\gamma - \varepsilon)}.$$

---

*) G. B. Rizzo, Sulla velocità di propagazione . . . Memorie R. Accad. delle Sc. di Torino. II. Serie, Bd. LVII, S. 309—350.

**) F. Omori, Preliminary Note on . . . S. Francisco Earthquake. Bull. of the Imp. Earthq. Invest. Comm., Bd. I, Nr. 1, S. 26—43.

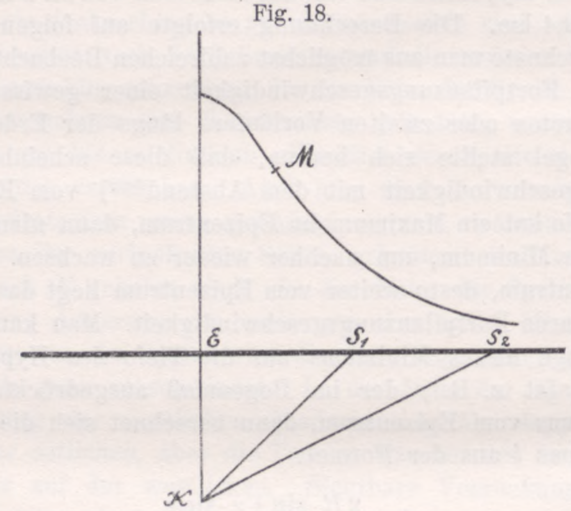
***) Selbst für die Hauptphase ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe des Epizentrums variabel, erst in einer gewissen Entfernung, die von der Tiefe des Herdes abhängt, wird sie praktisch konstant. Dies rührt hauptsächlich daher, daß der Herd kein in der Oberfläche der Kugel gelegener Punkt ist.

Hier bezeichnet R den mittleren Erdradius und ε einen Hilfswinkel, welcher durch die Gleichung

$$\sin \varepsilon = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma}{\gamma} - \cos \frac{1}{2} \gamma$$

definiert ist. Für das kalabrische Erdbeben betrug der Abstand des Minimums der Geschwindigkeit (des ersten und des zweiten Vorläufers, auch der Hauptphase, bei dieser letzteren natürlich schwach ausgeprägt) ungefähr 1500 km; folglich war $\gamma = 13^0{,}5 = 0{,}075\,\pi$, $\sin \varepsilon = 0{,}00462$ und $l = 6{,}95$ km*). Diese Methode ist der älteren Methode Seebachs, welche die Tiefe des Hypozentrums aus den Laufzeiten berechnete, verwandt, sie hat aber vor dieser den Vorzug, daß sie die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigt und infolgedessen sich auf Beobachtungen auf entfernten

Fig. 18.



Stationen stützen kann. Das ist ein wichtiger Vorzug, denn bei längerer Laufzeit hat derselbe Fehler in der Zeitbestimmung einen geringeren Einfluß auf das Ergebnis, außerdem kann man mehr Stationen und solche, wo die Zeit durch astronomische Uhren bestimmt wird, verwenden.

In der Methode Seebachs betrachtet man die Erdoberfläche als eben. Die Grundformeln kann man leicht auf folgende Weise

*) Wegen der näheren Einzelheiten vergl. man M. P. Rudzki, Uber die Tiefe des Herdes usw. Bull. Acad. des Sc. Cracovie (1907), S. 40—44.

bekommen: Bezeichnet man die als konstant gedachte Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit v, die Tiefe des Hypozentrums K wie früher mit l, den Abstand ES (Fig. 18) der Station S vom Epizentrum mit d und die Laufzeit mit t, so hat man offenbar

$$t_1^2 = \frac{l^2 + d_1^2}{v^2}, \quad t_2^2 = \frac{l^2 + d_2^2}{v^2}, \quad t_3^2 = \frac{l^2 + d_3^2}{v^2} \text{ usw.}$$

Darin sind t_1, t_2, t_3 usw., ferner d_1, d_2, d_3 usw. durch Beobachtung gegeben; zu bestimmen sind v und l. Also zwei Gleichungen reichen hin, um die Unbekannten zu bestimmen. Übrigens kann man zuweilen auch v als bekannt ansehen. Die Methode versagt jedoch sehr oft; an nahen Stationen sind die Zeitbestimmungen unsicher (oft gibt es keine), an entfernteren läßt sich die Krümmung der Erdoberfläche, die in Seebachs Formeln nicht berücksichtigt ist, schon fühlen. Diesem Übel könnte man übrigens durch eine Anpassung der Formeln an die Kugel abhelfen, das erste Übel würde aber trotzdem übrig bleiben. Es ist überhaupt schwer, l zu bestimmen, weil dasselbe im Verhältnis zu d sehr klein ist.

Duttons Methode stützt sich auf Beobachtungen der Intensität der Erschütterung. Die Energie der Schwingungen ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, folglich:

$$E = \frac{A}{l^2 + d^2},$$

wo A eine Konstante bedeutet. Die Energiekurve (vergl. die Fig. 18) hat einen Wendepunkt in M, dessen Abszisse d mit der Tiefe des Hypozentrums $EK = l$ durch die einfache Gleichung $d = l\sqrt{3}$ zusammenhängt. Die Lage des Wendepunktes M erkennt man daran, daß in seiner Umgebung die Energie am schnellsten abnimmt, folglich die Isoseisten sich am dichtesten zusammendrängen.

Alle diese Methoden haben dieselbe Schwäche: sie gehen von einer Reihe von Voraussetzungen aus, die nicht realisiert sind. Es wird angenommen, daß das Mittel, in welchem sich die Schwingungen fortpflanzen, homogen und isotrop ist; bei Dutton gesellt sich noch die Annahme hinzu, daß keine Energie durch Reibung verloren geht. Weiter wird in allen Methoden das Hypozentrum mit dem Herd zusammengeworfen, d. h. dieser letzte als ein Punkt aufgefaßt, was insbesondere bei Methoden, die Beobachtungen an nahegelegenen Stationen benutzen, schädlich wirkt. Auch die Methode Mallets ist von diesen Vorwürfen nicht frei; dazu gründet

sie sich auf eine Erscheinung — die Richtung der Risse in Mauern — die nur indirekt von der Richtung seismischer Strahlen abhängt.

So unsicher die Methoden zur Bestimmung der Tiefe des Hypozentrums sind, in einem stimmen sie überein: sie geben immer kleine Tiefen — einige oder mehrere, selten hundert oder mehr Kilometer. Nur die Methode Alfred Schmidts weicht von den übrigen ab, sie gibt immer große Tiefen, so z. B. für das Erdbeben von Charleston (31. August 1886) 107 km, während die Methode Duttons nur 19,3 km ergab. Für das kalabrische Erdbeben von 1905 ergab die Methode Schmidts sogar einige hundert Kilometer. Dem können wir nicht beistimmen, vielmehr halten wir die Übereinstimmung der Resultate anderer Methoden für überzeugend und glauben, daß die großen zerstörenden Erdbeben ihren Sitz in der Erdrinde haben. Von kleinen, schwachen Stößen kommen die meisten gewiß ebenfalls aus geringen Tiefen, obgleich es auch solche geben kann, die aus größeren Tiefen kommen. Wir können aber nichts Bestimmtes sagen, indem bei schwachen Stößen die Anhaltspunkte zur Bestimmung der Hypozentrumtiefe in der Regel zu spärlich sind.

Wenn das Erdbeben von S. Francisco wirklich von der obenbeschriebenen Spalte ausgegangen ist, so müssen wir uns den Herd desselben als eine nahezu senkrechte, ungefähr 300 km lange und wahrscheinlich mehrere Kilometer hohe Fläche vorstellen. Es ist sicher nicht erlaubt, eine solche Fläche mit einem Punkte zu identifizieren, selbst wenn man Beobachtungen an ungefähr 2000 km entfernten Stationen benutzt (im Falle des Erdbebens von S. Francisco lag das Minimum der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in ungefähr 2000 km Entfernung). Man darf aber nicht vergessen, daß, wie in § 1 dieses Kapitels auseinandergesetzt wurde, das Hypozentrum den wahren Herd nur vertritt.

Bei tektonischen Erdbeben darf man sich im allgemeinen den Herd als eine oder einige vertikale, horizontale oder schiefgestellte Flächen vorstellen, denn eine solche Gestalt haben die Spalten, an denen die Verrückungen stattfinden. Die Schnitte solcher Flächen mit der Erdoberfläche sind Linien. Im verhältnismäßig einfachen, aber, wie es scheint, häufig vorkommenden Fall einer einzigen Spalte müssen die Isoseisten und Isochronen eine langgezogene Form haben, wie es tatsächlich zuweilen beobachtet wird. Auch sogenannte „Zwillingserdbeben“, bei welchen die Diskussion scheinbar auf zwei Hypozentra führt, können tatsächlich von einer einzigen Spalte aus-

gegangen sein. Einfache Überlegungen zeigen, daß bei einigermaßen zweifelhaften Daten man selbst ohne vorgefaßte Meinung auf zwei Hypozentra kommen kann, obgleich die Erschütterung nur von einer Spalte ausgegangen ist. Der Umstand, daß die Beobachtungen angeblich auf eine Stoßzeit für das eine und auf eine andere für das andere Hypozentrum hinweisen, bildet noch keinen zwingenden Beweis für die Existenz zweier Herde.

Sobald der Herd kein Punkt ist, kann der Stoß nicht im ganzen Herde gleichzeitig erfolgen. Nehmen wir als Beispiel die Bildung einer neuen Spalte. Es muß dabei etwas Ähnliches wie beim Bersten des Eises auf einem See geschehen. Das Eis birst zuerst an einer Stelle, pfeilschnell wächst die Spalte, doch vergeht eine endliche Zeit, bis sie, sagen wir, das Ufer des Sees erreicht. Ebenso darf man annehmen, daß eine mehrere Kilometer lange Spalte in der Erdkruste nicht im Nu gebildet wird, sondern daß eine gewisse Zeit vergeht, bis das Bersten sich von einem Ende zum anderen fortpflanzt. Man könnte von einer Geschwindigkeit der Spaltenbildung sprechen. Wie groß diese ist, wissen wir nicht, wahrscheinlich ist sie von derselben Größenordnung, möglicherweise identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Welle in den Gesteinen der Erdkruste. Ähnliche Überlegungen führen zu demselben Schlusse auch bei anderen tektonischen sowie nichttektonischen Erdbeben. Nehmen wir z. B. das plötzliche Kristallisieren großer unterkühlter Lavamassen. Man wird zugeben, daß die Kristallisation nicht augenblicklich in einem vielleicht Hunderte von Kubikkilometern messenden Lavabehälter erfolgt; so schnell sich auch der Kristallisationsprozeß ausbreitet, wird doch eine endliche Zeit vergehen bis er zu Ende ist. Wir meinen deswegen, daß bei großen Dimensionen des Herdes Erdbebenwellen in verschiedenen Punkten nacheinander während mehrerer Sekunden erzeugt werden.

§ 8. Nachbeben. Erdbebenschwärme. Relaisbeben.

Selten werden die in der Erdrinde vorhandenen Spannungen durch ein einziges, wenn auch noch so großes Erdbeben vollständig ausgelöst. Beinahe immer folgen auf ein großes Erdbeben mehrere schwächere „Nachbeben“ (*aftershocks* der Engländer). Anfangs sind sie häufiger und durchschnittlich stärker, dann immer schwächer und seltener, bis nach einer Zeit, die in gewissen Fällen

sich auf ganze Jahre ausdehnt, die Ruhe wieder hergestellt wird. Als ein naheliegendes gutbekanntes Beispiel können die Nachbeben des Erdbebens von Messina (am 28. Dezember 1908) angeführt werden. Zuweilen wird ein Gebiet von einer Reihe kleinerer Erdbeben, unter denen kein einziges als das Hauptbeben aufgefaßt werden kann, heimgesucht, man spricht dann von einem „Erdbebenschwarm".

Unter den Nachbeben verdient eine Abart, auf welche Oddone*) aufmerksam gemacht hat, besondere Beachtung. Wir sprechen von Nachbeben, die in gleichen, kurzen Zeitspannen wiederkehren. Oddone glaubt, daß diese Nachbeben durch im Antiepizentrum reflektierte und nach dem Herde zurückkehrende Wellen, welche daselbst noch übrig gebliebene Spannungen vorfinden, ausgelöst werden. Er führt einige wenige Beispiele an, in denen das Zeitintervall zwischen den einzelnen Nachbeben 34 Minuten dauerte. Während dieser Zeit mußte die Welle den Erddurchmesser zweimal durchwandern. Daraus ergibt sich eine mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu $\frac{4 \cdot 6370}{34 \cdot 60} = 12{,}5$ km pro Sek., was die Geschwindigkeit des ersten Vorläufers (nach Knott) nur unbedeutend übertrifft.

Hier ist der Ort, auch die sogenannten „Relaisbeben" zu erwähnen. Es kann geschehen, daß die seismische Welle eine Stelle erreicht, wo die Spannung schon den Kulminationspunkt erreicht hat und auf die Auslösung gleichsam wartet; eine kleine Erschütterung genügt, um eine großartige Entladung der potentiellen Energie zu veranlassen. Es ist nicht unmöglich, daß das aleutische Erdbeben (eigentlich war das ein submarines Erdbeben, dessen Herd sich nicht sehr weit von den Aleuten befand) und das Erdbeben von Valparaiso am 17. August 1906 zu den „Relaisbeben" gehörten; das erste begann nur etwa eine halbe Stunde früher als das zweite.

Verschiedene Methoden führen zur Bestimmung der Lage des Epizentrums. Wer das pleistoseiste Gebiet untersucht, muß auf das Isochronenziehen verzichten. Die Zeitangaben durch Private usw. sind dafür zu wenig exakt. Er kann dagegen auf Grund der Zerstörungen und der Aussagen der Einwohner den Intensitätsgrad schätzen und Isoseisten ziehen. Das Epizentrum wird er natürlich

---

*) Oddone, Quelques constantes seismiques. Veröffentlichung des Internationalen Seismologischen Zentralbureaus.

in die Mitte der ersten Isoseiste verlegen. — Obgleich dieses Verfahren mit der in diesem Buche akzeptierten Definition des Epizentrums nicht übereinstimmt, kann und muß es gebraucht werden, da, wie gesagt, das Verfahren mit Isochronen nicht gelingt. — Übrigens ist das strenge Festhalten an der Definition auch deswegen nicht am Platze, weil überhaupt alle Bestimmungen nur innerhalb gewisser Grenzen genau sein können. Auch in günstigen Fällen ist der mögliche Fehler gewiß größer als der Abstand zwischen dem zuerst und dem am stärksten erschütterten Punkte. Das Konstruieren von Isoseisten ist um so wichtiger, als eine eingehende Diskussion derselben im Verein mit einer geologischen Erforschung der Gegend wichtige Aufschlüsse über die Gestalt und Größe des Herdes und über die eigentliche Ursache des Erdbebens geben kann.

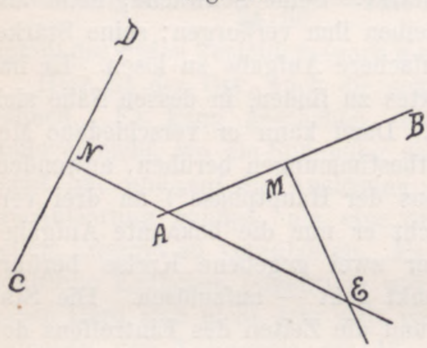
In einer anderen Lage befindet sich derjenige, der nur über instrumentelle Aufzeichnungen an weitentfernten Stationen verfügt. Wegen der großen Entfernung erscheint ihm das Erdbeben wirklich so, als ob es aus einem Punkte käme. Darin liegt seine Schwäche und zugleich seine Stärke. Seine Schwäche, denn alle die tektonischen Einzelheiten bleiben ihm verborgen; seine Stärke, denn er hat eine wesentlich einfachere Aufgabe zu lösen. Er hat nur die Koordinaten eines Punktes zu finden, in dessen Nähe sich der Sitz des Erdbebens befand. Dazu kann er verschiedene Methoden, die jedoch alle auf Zeitbestimmungen beruhen, anwenden. Hat er die Zeiten des Eintreffens der Hauptphase*) an drei verschiedenen Stationen, so braucht er nur die bekannte Aufgabe: Einen Kreis zu finden, welcher zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht — aufzulösen. Die Stationen seien nun A, B und C und die Zeiten des Eintreffens der Hauptphase t_1, t_2, t_3, wobei $t_1 < t_2$ und $t_1 < t_3$. Denken wir uns für einen Augenblick die Aufgabe schon gelöst und das Epizentrum E gefunden. Beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius EA um E, so geht er natürlich durch die Station A. Nun müssen die um B und C mit den Radien $V(t_2 - t_1)$ und $V(t_3 - t_1)$ — wo V die bekannte oberflächliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Hauptphase bezeichnet — geschlagenen Kreise den ersten Kreis berühren. Daraus folgt, daß man zur Lösung der Aufgabe um die Stationen B und C mit den Radien $V(t_2 - t_1)$ und $V(t_3 - t_1)$ Kreise

*) Wir sprechen hier von der Geschwindigkeit der Hauptphase, da diese Geschwindigkeit konstant ist.

schlagen und den durch A gehenden und die beiden Kreise tangierenden Kreis konstruieren muß. Eigentlich gibt es vier solche Kreise, aber in der Praxis werden sich immer Anhaltspunkte für die Erkennnung des wahren Epizentrums finden. Die Formeln, welche zur Lösung der Aufgabe auf der Kugel dienen, sind nicht schwierig, obwohl etwas kompliziert.

Seismische Stationen sind jetzt so zahlreich geworden, daß es wohl vorkommen kann, daß eine und dieselbe Phase an zwei Stationen zu derselben Zeit (sagen wir bis auf eine oder eine halbe Sekunde genau) registriert wird. Haben wir je zwei an zwei Stationen gleichzeitig registrierte Phasen, so ist es leicht, das Epizentrum zu finden. Nehmen wir z. B. an, daß an den Stationen A und B eine gewisse Phase zur Zeit t_1 und an den Stationen C und D dieselbe oder eine andere Phase zur Zeit t_2 registriert wurde. Das Epizentrum E ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Isochronen: derjenigen, die durch A und B, und derjenigen, die durch C und D geht. Daß diese Isochronen zu verschiedenen Phasen gehören, macht nichts. Man verbindet A mit B und halbiert die Strecke AB in M; ebenso verbindet man C mit D und halbiert die Strecke CD in N; dann legt man durch M eine zur Geraden AB senkrechte Ebene, desgleichen legt man durch N eine zur Geraden CD senkrechte Ebene. Beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden, welche die Oberfläche der Kugel im Epizentrum E und Antiepizentrum E' schneidet. Analytisch und rechnerisch gestaltet sich diese Aufgabe ziemlich leicht*). Die beigefügte Zeichnung (Fig. 19) gibt die Projektion auf eine zu EE' senkrechte Ebene.

Fig. 19.



Es wurde schon früher gesagt, daß die Zeitintervalle zwischen einzelnen Phasen des Erdbebens mit der Entfernung vom Epizentrum wachsen und daß man umgekehrt aus den Zeitintervallen auf die

*) Sie wurde vom Verfasser beim galizischen Erdbeben vom 6. Oktober 1908 verwendet. Allgemeiner Bericht und Chronik der 1908 in Österreich beobachteten Erdbeben, S. 264.

Entfernung schließen kann. Man kann sich dabei der empirischen Formeln von Láska und Omori bedienen. Für Entfernungen zwischen 500 und 1200 km gibt Láska die Formel

$$d = 5{,}56\ \tau,$$

wo τ die Dauer der Vorläufer, d. h. die seit dem Anfang des Erdbebens bis zum Anfang der Hauptphase verstrichene, in Sekunden ausgedrückte Zeit und d die Entfernung*) in Kilometern bedeutet.

Omori gibt für Entfernungen von

50	bis	200 km	die Formel	$d = 6{,}86\,\tau + 8{,}1$
100	„	1000 „	„ „	$d = 7{,}27\,\tau + 38$
2000	„	14000 „	„ „	$d = 6{,}54\,\tau + 720$

Der Unterschied zwischen Láska und Omori rührt zum Teil von einer anderen Auffassung des Anfangs der Hauptphase her. Noch besser ist es, die Laufzeitkurven (etwa die Göttinger Laufzeitkurven) zu benutzen. Aus der Definition der Laufzeitkurve folgt, daß τ nichts anderes ist als die Differenz zwischen den Ordinaten der Laufzeitkurve für die Hauptphase und den Vorläufer; folglich braucht man nur die dem Zeitintervall τ gleiche Ordinatendifferenz auszusuchen, und die entsprechende Abszisse wird die gesuchte Entfernung d geben. Hat man zwei Stationen, auf denen die Entfernungen bestimmt worden sind, so bleibt nur noch übrig, zwei Kreise mit den Radien d_1 und d_2 zu schlagen. Der Schnittpunkt beider Kreise wird das gesuchte Epizentrum sein.

Es ist aber möglich, aus den Angaben nur einer einzigen, jedoch mit zwei entsprechend aufgestellten Pendeln (die Pendel müssen in zwei aufeinander senkrechten Vertikalebenen aufgestellt sein, z. B. eines in der $N—S$-, das andere in der $O—W$-Ebene) ausgerüsteten Station die geographischen Koordinaten des Epizentrums zu bestimmen. Dazu ist außer der Epizentraldistanz, die sich aus der an einer Station beobachteten Zeit τ ergibt, noch der Azimut des Epizentrums erforderlich. Nun kann aber der Azimut α aus der Formel

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{A_O}{A_N},$$

wo A_N und A_O die wahren Bodenverrückungen in den Richtungen $N—S$ und $O—W$ bezeichnen, berechnet werden und es reduziert sich somit eigentlich die ganze Aufgabe auf die Ermittlung der

*) Wir meinen die (geodätische) Entfernung längs der Erdoberfläche.

Bodenverrückungen aus den Seismogrammen. Fürst Galitzin*) hat gezeigt, daß die damit verbundenen technischen Schwierigkeiten überwunden werden können und hat die zur Ermittlung von A_N und A_O nötigen Formeln gegeben. Aus naheliegenden Gründen empfiehlt er, nur den ersten Ausschlag des Pendels zu gebrauchen. Es sei nebenbei bemerkt, daß, wenn man auf die Vorzeichen von A_N und A_O acht gibt, eo ipso die Vorzeichen von cos α und sin α bekannt sind und jede Zweideutigkeit in der Bestimmung des Azimuts behoben wird. Der erste Versuch Galitzins ist nicht besonders günstig ausgefallen. Für das Erdbeben vom 20./21. Oktober 1909 fand er folgende Koordinaten: $\beta = 30^0\ N$, $\lambda = 73^0\ O$. Dieser Ort liegt in Indien am Sutledj. Indes zeigte es sich später, daß das Erdbeben in Beludschistan stattgefunden hatte, wo die Eisenbahnstation Bellpat zerstört wurde. Die Koordinaten von Bellpat sind: $\beta = 29^0\ N$, $\lambda = 68^0\ O$. Am besten wird man den Fehler daraus beurteilen, daß die berechnete Epizentrumdistanz von Pulkowa 4550 km war und der berechnete Azimut $S\ 63^0\ O$. Indes beträgt die Entfernung Pulkowa — Bellpat 4440 km und der Azimut von Bellpat $S\ 57^0\ O$.

Gewöhnlich hat man mehr Daten als erforderlich sind. Man verwendet dann die Methode der kleinsten Quadrate oder andere Ausgleichsmethoden. Denken wir uns z. B. den Fall, daß die Zeit τ an mehreren Stationen bekannt ist; man bestimmt dann mit Hilfe der Laufzeitkurven die zu $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots \tau_n$ gehörigen Epizentraldistanzen $d_1, d_2, d_3 \ldots d_n \ldots$, schlägt aus den Stationen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Kreise auf der Kugel mit den Radien $d_1, d_2 \ldots$ und findet, daß diese Kreise sich nicht in einem, sondern in verschiedenen Punkten, sagen wir $E_{12}, E_{13} \ldots E_{ki}$, schneiden. Man kann dann die wahrscheinliche Lage des Epizentrums nach derselben Methode, nach welcher man den Schwerpunkt mehrerer materieller Punkte bestimmt, ausfindig machen, nur wird man statt der Massen die Gewichte**), welche den Punkten $E_{12}, E_{13} \ldots E_{ki}$ zukommen, einsetzen. Die Bestimmung dieser Gewichte ist eine heikle Frage, es scheint aber geraten, das Gewicht des Punktes E_{ki} aus den Gewichten q_k und q_i der Radien d_k und d_i zusammenzusetzen (statt

---

*) Galitzin, Zur Frage der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums eines Bebens. Bull. Acad. Imp. des Sciences St. Pétersbourg (St. Petersburg 1909), S. 999—1012.

**) Im selben Sinne, wie die Gewichte der Beobachtungen.

welcher man auch einfach die Gewichte der Zeiten τ_k und τ_i nehmen kann) nach der Formel

$$Q_{ki} = \frac{q_k q_i}{q_k + q_i}.$$

Es ist kaum nötig, darauf hinzuweisen, daß das Nichtzusammenfallen der Punkte E_{12}, E_{13} . . . E_{ki} usw. nicht bloß von Beobachtungs-, sondern auch von Theoriefehlern herrührt. Eine Reihe von Annahmen, die allen Methoden der Epizentrumsbestimmung zugrunde liegen, nämlich punktförmige Beschaffenheit des Herdes, kreisförmige Gestalt der Isoseisten und Isochronen, Kugelgestalt der Erde usw. sind nicht realisiert und Abweichungen, Nichtübereinstimmungen sind unvermeidlich. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß auf große Entfernungen hin Isochronen und Isoseisten sich mehr der Kreisgestalt nähern; es sind die dem Epizentrum nahen Isoseisten und Isochronen, welche von dieser Gestalt am meisten abweichen. Sie werden von der unregelmäßigen Gestalt des Herdes und der Heterogenität der Erdrinde am stärksten beeinflußt.

Zum besseren Verständnis werden wir ein aufs Geratewohl gewähltes Beispiel anführen. Aus Registrierungen an den vier Stationen: Tokio, Manila, Florenz und Berkeley in Kalifornien berechnet F. Omori*) folgende Koordinaten für das aleutische Erdbeben vom 17. August 1906:

Nördl. Breite = 50°, östl. Länge von Greenwich = 175°,

während Linke**) aus Registrierungen an den vier Stationen: Göttingen, Jena, Apia (auf den Samoainseln) und Tiflis die Koordinaten:

Nördl. Breite = 50°, östl. Länge von Greenwich = 180°

findet.

§ 9. Die geographische Verteilung der Erdbeben.

Ein Blick in einen Erdbebenkatalog zeigt sofort, daß die Epizentra nicht gleichmäßig auf der Erdoberfläche verteilt, sondern in gewissen Gebieten, so in Süditalien, Griechenland, Andalusien usw. zusammengedrängt sind. Montessus de Ballore***) hat der

---

*) F. Omori, Notes on the Valparaiso and Aleutian Earthquakes. Bull. Earthquake Invest. Comm. Bd. I (Tokio 1907), S. 75—113.

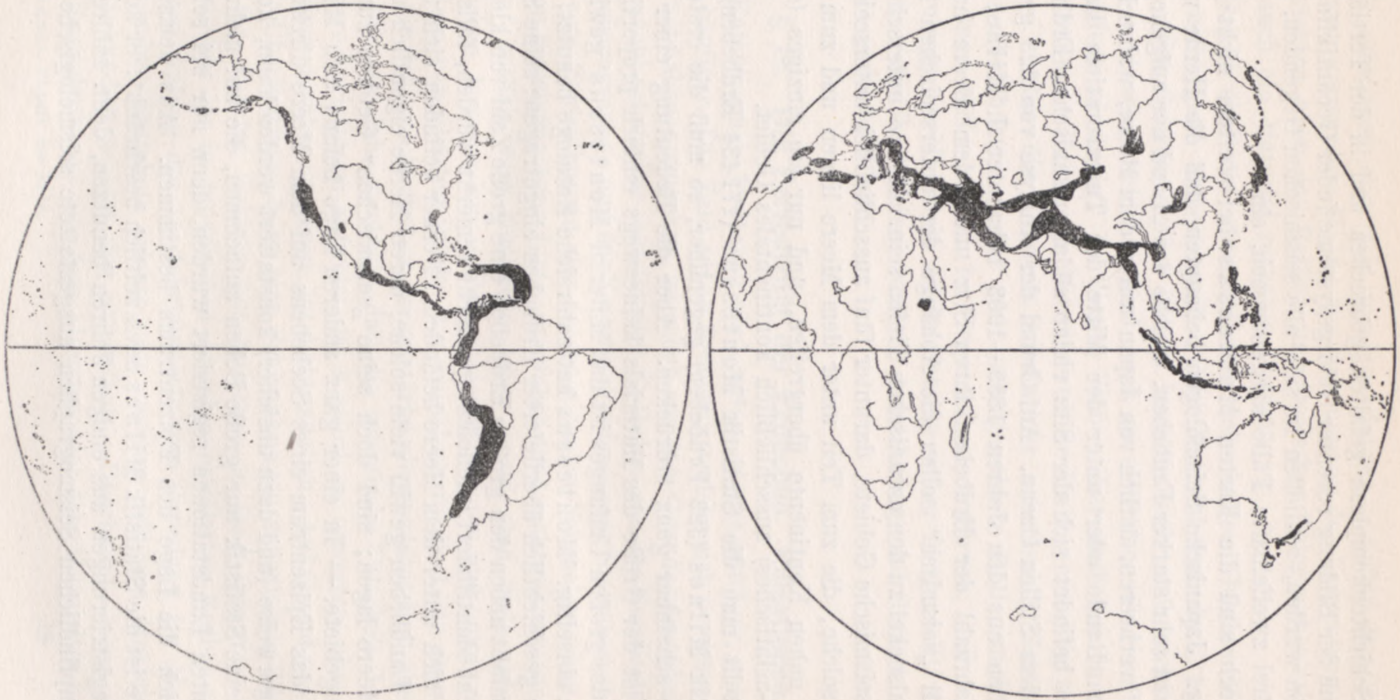
**) Linke, Wöchentliche Erdbebenberichte des Geoph. Institutes Göttingen Nr. 8, 1907.

***) Montessus de Ballore, Les Tremblements de Terre. Geographie seismologique, Paris 1900.

geographischen Verteilung der Erdbeben ein besonderes Werk gewidmet und auf Grund eines sehr reichen Materials (nicht weniger als 171434 Erdbeben) die folgende Klassifikation aufgestellt: Er nennt „seismisch“ *(séismique)* diejenigen Gebiete, wo Erdbeben häufig sind und von Zeit zu Zeit verheerende Katastrophen vorkommen; „peneseismisch“ *(pénèséismique)* diejenigen, wo die Erdbeben nicht so häufig und nicht so stark auftreten; endlich „aseismisch“ *(aséismique)* solche, wo die Erdbeben selten und schwach oder dem großen Publikum ganz unbekannt sind. Genauer könnte man die aseismischen Länder als solche definieren, wo die Erdbeben in der Regel nur mit Hilfe der Instrumente wahrgenommen werden und ein für die Menschen fühlbares Erdbeben, falls es vorkommt, keinen namhaften Schaden anrichtet. Die Klassifikation Montessus' ist gleichzeitig quantitativ und qualitativ; eine einheitliche, nur auf ein Prinzip gegründete Klassifikation ließ sich nicht durchführen. Die „seismischen“ Länder (vergl. die beigefügten Karten, Fig. 20), bilden zwei Zonen. Eine Zone zieht sich längs des Mittelländischen Meeres, dann mit einem Zweige über Syrien, Kleinasien, den Kaukasus bis nach Zentralasien hin, mit dem anderen Zweige längs des Himalaja, der indochinesischen Gebirge bis in den malaiischen Archipel. Die zweite Zone umgibt den Pazifischen Ozean, eine Abzweigung zieht sich über Kolumbien, Venezuela und die Kleinen Antillen nach den Großen Antillen hin. Kleinere abseits liegende seismische Gebiete, die übrigens auf der Karte sofort zu erkennen sind, brauchen wir nicht aufzuzählen. Es existiert, was Montessus auch hervorhebt, zwischen den seismischen Ländern und den Ländern, wo jüngere Gebirge sich befinden, eine in die Augen springende Koinzidenz. Betrachten wir z. B. die Länder am Mittelmeer, speziell die Länder an dessen südlicher, afrikanischen Küste. In Marokko und Algerien sehen wir jüngere Gebirge und häufige Erdbeben, in Tripolis, Barka, Ägypten, wo es keine jungen Gebirge gibt, gibt es auch keine Erdbeben usw. Um die Koinzidenz besser darzutun, führt Montessus Karten der Geosynklinalen von Haug an und sagt*): „die seismischen Zonen sind identisch mit den Geosynklinalen der mesozoischen Zeit, wie sie Haug in seiner bekannten Abhandlung ‚Les géosynclinaux et les aires continentales‘**) angegeben hat“ und weiter: „Die Geosynklinalen (die am meisten instabilen Teile der Erdoberfläche), wo

*) a. a. O., S. 24.
**) Bull. Soc. Geol. France, Ser. 3, Bd. XXVIII.

Fig. 20.



Seismische Gebiete nach den Karten I und II von Montessus de Ballore.
„Les Tremblements de Terre“, A. Colin, Paris 1906.

dicke Schichtenkomplexe gefaltet, gebrochen und in der Tertiärzeit während der Bildung rezenter Gebirgssysteme (oder Geoantiklinalen) gehoben wurden, schließen in sich alle seismischen Gegenden, zwei oder drei zweifelhafte Fälle ausgenommen, ein“.

Doch sind die Karten Montessus bei weitem nicht vollständig. Japanische Seismologen behaupten, daß die Herde vieler und dazu sehr starker Erdbeben, welche das „Land der aufgehenden Sonne“ verheeren, östlich von Japan unter dem Meere, wahrscheinlich am Rande oder unter der Mitte der Tuscaroratiefe liegen. Ebenso befindet sich der Sitz vieler südamerikanischen Erdbeben unter dem Stillen Ozean. Auf Grund der Analyse von 323 großen Erdbeben aus den Jahren 1899—1903 behauptet J. Milne, daß die Mehrzahl der Erdbeben ihren Sitz unter dem Meere haben. Speziell „seismisch“ sollen die Abhänge der unterseeischen Kontinentalsockel zu den ozeanischen Tiefen sein. Milne unterscheidet zwölf seismische Gebiete, darunter fünf ausschließlich unterseeische, sechs solche, die zum Teil unter dem Meere liegen und zum Teil in die nahen Kontinente übergreifen, und nur ein einziges (europäisch-asiatisches) ausschließlich kontinentales Gebiet.

Stellt man die Statistik Montessus (171434 Erdbeben) der Statistik Milnes (323 Erdbeben) gegenüber, so muß die erste die zweite scheinbar ganz erdrücken. Aber die Bedeutung einer Statistik ist der Größe des Materials keineswegs einfach proportional. Trotz des großen Umfanges ist das Material Montessus’ gewissermaßen einseitig. Montessus hat zahlreiche Kataloge benutzt, eine Menge geschichtlich überlieferter Erdbeben eingetragen; seine Statistik umfaßt neben den großen Erdbeben eine große Zahl von kleinen, die nicht identifiziert, vielleicht gar nicht bemerkt würden, falls ihre Herde sich unter dem Meere befänden. Ferner befinden sich unter seinen Landbeben gewiß viele solche, deren Herde eigentlich unter dem Meere lagen; sind doch seine „seismischen“ Gebiete zumeist Küstengebiete. — In einer ganz anderen Lage befand sich Milne. Indem das Epizentrum eines Seebebens auf dem Meere direkt nur zufälligerweise (und dazu unsicher) konstatiert werden kann, konnte er in seine Statistik nur große Beben aufnehmen, die auf mehreren entfernten Landstationen registriert wurden, denn nur bei solchen ließ sich die Lage des Epizentrums bestimmen. Aus demselben Grunde ist die Statistik Milnes auch zeitlich beschränkt: er konnte nur Registrierungen aus einigen Jahren benutzen, denn zahlreiche, mit empfindlichen Seismographen ausgestattete seismologische Sta-

tionen existieren erst seit wenigen Jahren. Außer den Seismogrammen verwendete Milne zur Bestimmung des Epizentrums noch Nachrichten über das Reißen unterseeischer Telegraphenkabel — also auch ein Material rezenten Datums.

Gewiß sind die unterseeischen seismischen Gebiete Milnes noch nicht ganz sichergestellt. Sein Material war dazu noch zu klein. Die Gesetze großer Zahlen konnten sich noch nicht offenbaren und seine Schlüsse sind noch zu sehr von einer zufälligen Koinzidenz abhängig. In diesem Sinne, aber auch nur in diesem Sinne kann die Kritik von Montessus de Ballore richtig genannt werden. Aber die Existenz submariner seismischer Gebiete negieren oder ihnen nur eine ganz untergeordnete Rolle zuschreiben, kann man nicht; es ist im Gegenteil zu erwarten, daß mit der Anhäufung des Materials solche Gebiete sicher festgestellt werden, obwohl vielleicht in einer anderen Ausdehnung und Gestalt, als sie Milne gezeichnet hat.

§ 10. Die Periodizität der Erdbeben. Pulsationen.

Katastrophale Erdbeben sind selten, starke häufiger, schwache noch häufiger. Die Zahl aller Erdbeben, welche sich in einem Jahre ereignet haben, anzugeben, ist schon aus dem Grunde unmöglich, weil die Anzahl schwacher registrierter Erdbeben von der Empfindlichkeit der Seismographen und der Verteilung seismischer Stationen abhängt. Die vom Zentralbureau der Internationalen Seismologischen Assoziation herausgegebene Liste „im Jahre 1905 wahrgenommener Erdbeben" enthält 3928 Nummern, aber gewiß sind viele submarine Erdbeben, ferner solche in Polargebieten, Wüsten und unkultivierten Ländern von gleicher Stärke der Aufnahme in die Liste entgangen. Daß die Zahl von Erdbeben, deren Stärke ein gewisses Maß übertrifft, von Jahr zu Jahr wechselt, daß die seismische Tätigkeit der Erde säkulare Variationen aufweist, ist a priori zu erwarten, aber etwas Positives darüber zu sagen, ist nicht möglich. Auf Grund geschichtlicher Überlieferung kann man Schwankungen seismischer Tätigkeit nur für einzelne Gebiete konstatieren; so fand Omori aus der Diskussion der in japanischen Annalen erwähnten Erdbeben, daß um den Anfang des 15. Jahrhunderts sein Vaterland ein Maximum seismischer Tätigkeit erlebte, ein zweites früheres Maximum im 9. Jahrhundert scheint ihm zweifelhaft. Überhaupt, wenn es sich um Überlieferungen aus dem Altertum oder dem Mittelalter handelt,

ist man oft im Zweifel, ob nicht etwa mit der Natur der Sache in keinem Zusammenhange stehende Umstände mit im Spiel sind. Ein Erdbeben, das eine große Stadt zerstörte, wird erwähnt, ein anderes, vielleicht stärkeres, das in einer von der Hauptstadt entfernten, schwach bewohnten Provinz einige arme Dörfer zu Boden warf, wird mit Stillschweigen übergangen. Ein Annalist, der sich persönlich für das Phänomen interessiert, schreibt auch schwächere Erdbeben auf, ein anderer, dem nur Katastrophen der Erwähnung würdig erscheinen, nur die stärksten usw. Eine zuverlässige Grundlage bildet nur das nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten gesammelte Material der Neuzeit, leider aber reicht es nicht sehr weit zurück.

Es wurden schon manchmal verschiedene Periodizitäten der Erdbeben, ein Zusammenhang mit den Phasen des Mondes usw. gefunden, aber all dies ist zweifelhaft. So z. B. zeigt sich dieselbe, wenn man die Erdbebenfrequenz an einzelnen Tagen des synodischen oder des anomalistischen*) Monats untersucht, an gewissen Tagen größer, an anderen kleiner; aber bald ist die Amplitude, d. h. die Differenz zwischen der maximalen und minimalen Frequenz, nicht viel größer, als bei einer ganz zufälligen Verteilung der Erdbeben auf einzelne Tage zu erwarten wäre, bald fallen die Maxima und Minima auf solche Tage des Monats, daß eine rationelle dynamische Erklärung nicht gelingt usw. Eine größere Frequenz der Erdbeben des Nachts wie tagsüber und eine größere in den Winter- als in den Sommermonaten ist nicht zu leugnen, aber es liegt der Verdacht nahe, daß hier der Einfluß einer physiologischen Ursache zu erblicken ist. Schwache Erdbeben haben mehr Aussicht, nachts bemerkt zu werden, weil die Bevölkerung nachts im Hause weilt und sich ruhig verhält, während tagsüber die arbeitenden, beschäftigten Leute nur etwas stärkere Erschütterungen wahrnehmen. Im selben Sinne wirkt der Aufenthalt der Bevölkerung in geschlossenen Räumen zugunsten der Wintermonate. Sehr belehrend ist eine Diskussion von 37511 Erdbeben**) durch Montessus de

---

*) Der synodische Monat (der gewöhnliche Monat) hat etwas mehr als $29^1/_2$, der anomalistische etwas mehr als $27^1/_2$ Tage. Der erste Monat ist das mittlere Zeitintervall, welches zwischen den gleichen relativen Stellungen der Sonne, der Erde und des Mondes verfließt. Der anomalistische Monat ist das mittlere Intervall zwischen zwei Durchgängen des Mondes durch das Perigäum.

**) Vergl. C. G. Knott, The Physics of Earthquake Phenomena, Oxford 1908. Kapitel VII und VIII enthalten eine eingehende Diskussion der Periodi-

Ballore. Es waren darunter mehr Nacht- als Tagbeben und das Verhältnis der Zahl der Tagbeben zur Zahl der Nachtbeben war 0,8. Als er aber die Erdbeben nach Intensitäten (der Skala Rossi-Forel) gruppierte, erhielt er folgende Verhältnisse zwischen Tag- und Nachtbeben:

Intensitäten	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Verhältnis	1,8	0,73	0,60	0,67	0,65	0,76	0,81	0,85	1,27	1,02

In der Gruppe I, welche die schwächsten, nur instrumentell registrierten Beben enthält, überwiegen die Tag- die Nachtbeben offenbar deswegen, weil viele durch den Verkehr erzeugte Erschütterungen sich mit den Beben mischen. In den Gruppen III, IV und V fällt das Verhältnis bis zu $^2/_3$, das sind nämlich die Gruppen, welche die schwachen, aber vom Menschen wahrnehmbaren Erdbeben umfaßt; an diesen Erdbeben offenbart sich der Einfluß der größeren Empfindlichkeit bei Nacht am besten. In den Gruppen VIII, IX und X, welche die stärksten Erdbeben enthalten (X = Katastrophen), gleicht sich das Verhältnis zwischen Tag- und Nachtbeben beinahe ganz aus. Sprünge zwischen den Verhältniszahlen einzelner Gruppen, von 0,85 auf 1,27 und von 1,27 auf 1,02, sind darauf zurückzuführen, daß sehr starke Erdbeben selten sind, somit in der Statistik mit kleinen Zahlen auftreten, die noch vom Zufall abhängen. In anderen Gruppen, wo die Resultate auf großem Zahlenmaterial beruhen, sind die Verhältniszahlen nur wenig vom Zufall abhängig.

Von Zeit zu Zeit treten in den Seismogrammen „Pulsationen" auf. Mit diesem Namen werden kleine, aber zuweilen mehrere Stunden ohne Unterbrechung dauernde Schwingungen bezeichnet. Sie unterscheiden sich sehr deutlich von den Erdbeben: es gibt keinen ersten und keinen zweiten Vorläufer, keine Hauptphase und keinen Schweif. Zwar nimmt die Amplitude der Schwingungen zu und ab, aber das ganze Aussehen des Seismogrammes ist verschieden. Insbesondere fallen die relative Isochronie der Schwingungen und

---

zitätsfrage. Besondere Beachtung verdient die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach den von A. Schuster angegebenen Regeln.

Die Frage nach dem Einfluß der Tag- und Nachtstunden auf die Wahrnehmung der Erdbeben wurde vielfach umstritten; es wurde z. B. hervorgehoben, daß viele Leute bei schwachen Erdbeben gar nicht erwachen. Eigene Erfahrung und Beobachtungen an anderen Personen führen den Verfasser zu der Annahme, daß schwache Erdbeben in der Nacht entschieden leichter als bei Tage wahrgenommen werden.

ihre geringe Amplitude auf. Die Schwingungsperioden sind nicht besonders groß. Zu Hongo (Tokio) hat man Perioden von 2 bis 30 Sek. beobachtet; am häufigsten beobachtete man Perioden von ungefähr 6 Sek. (13,7 Proz. aller Fälle), 8 Sek. (10,8 Proz.) und 10 Sek. (13,3 Proz.)*). Fürst Galitzin unterscheidet zwei Typen: I. sehr regelmäßige periodische Bodenbewegungen, die stunden- oder tagelang dauern, mit scharf ausgeprägten Perioden, deren Größe zwischen 3 und 10 Sek. schwankt; II. verhältnismäßig unregelmäßige Bewegungen, die jedoch einen wellenförmigen Charakter haben und deren Periode viel größer ist, im Mittel etwa 30 Sek. Zur Erklärung der Pulsation werden verschiedene Hypothesen aufgestellt. Wiechert sieht in ihr durch die Brandung an den Küsten erzeugte „erzwungene" Schwingungen der Erdrinde. Andere wieder vermuten eine „meteorologische" Ursache. Für diese letzte Annahme scheint das viel häufigere Auftreten der Pulsationen im Winter zu sprechen. Pulsationen oder, wie man auch sagt, „mikroseismische Bewegungen" treten zuweilen bei starken Winden auf. Doch fehlt es nicht an Widersprüchen, und ein klarer kausaler Zusammenhang mit irgendeiner bestimmten Erscheinung wurde bisher nicht aufgedeckt. Interessant ist die Entdeckung T. Shidas**) zu Tokio; er konstruierte einen Barographen, welcher sehr rasche Variationen des Luftdrucks registriert, und fand Druckschwankungen, deren Periode im Mittel ungefähr 6 Sek. dauerte, doch am besten markiert waren Schwankungen von 12 Sek. Dauer. Shida vermutet, daß diese Luftdruckvariationen die Pulsationen des Bodens erzeugen. Andererseits wäre in diesen Luftdruckschwankungen ein Anzeichen atmosphärischen Wogenganges zu erblicken (wir meinen Luftwogen im Sinne Helmholtzs). Eine teilweise Bestätigung dieser Ansicht finden wir in den Beobachtungen Galitzins, welcher eine Abhängigkeit der mikroseismischen Bewegung***) vom Winde fand. Wir sagen „teilweise Bestätigung", denn die besagte Abhängigkeit gilt nach Galitzin nur für Pulsationen des zweiten Typus mit einer mittleren Periode von ungefähr 30 Sek.

---

*) F. Omori, Report on the Observation of Pulsatory Oscillations in Japan. Bull. Imp. Earthquake Investigation Committee, Bd. III, Nr. 1 (1909), S. 6 und 7.

**) T. Shida, Nature (englisch), Bd. 82, S. 45.

***) Galitzin, Über mikroseismische Bewegungen. Beiträge zur Geophysik, X. Bd., S. 86—92.

Sechstes Kapitel.

Deformationen.

§ 1. Kontinuierliche und diskontinuierliche Deformationen.

Im vorigen Kapitel haben wir gesagt, daß viele Erdbeben durch plötzliche Deformationen der Erdrinde entstehen. Obwohl Tausenden von Menschen verderbenbringend, sind diese Deformationen doch im Verhältnis zu den Dimensionen der Erde sehr klein. Die Verrückung beträgt höchstens einige Meter, und die verschobenen Massen sind zwar im Vergleich zu den Erzeugnissen von Menschenhand kolossal, aber im Verhältnis zur Erdmasse nur winzig.

Man kann zwei Arten von Deformationen bei den Erdbeben unterscheiden: solche, welche das Erdbeben erzeugen, und solche, die als Folgen der Erdbeben aufgefaßt werden können. Zu den ersten gehören: die Neubildung von Spalten und Gleitflächen, Verschiebungen großer Gesteinspartien längs neugebildeter oder alter Spalten und Gleitflächen, zu den zweiten: das Herabrutschen loser oder wasserdurchtränkter Gesteinsarten von steilen Abhängen, das Abspalten großer Blöcke von senkrechten Felswänden, das Nachsinken weicher, loser Bodenarten, das Heraussprudeln des Grundwassers und andere Erscheinungen, die aus den Beschreibungen der Erdbeben wohlbekannt sind. Diese sekundären Deformationen können ihrerseits Anlaß zu kleinen Erdbeben geben; zuweilen gestalten sie sich zu einer primären Ursache des Erdbebens, so z. B. kann der Sturz eines sehr großen Blockes eine nicht unbeträchtliche Erschütterung erzeugen.

Sekundäre Deformationen verändern das Aussehen des Landes mehr als primäre, doch vom tektonischen Standpunkt aus sind diese wichtiger als jene. Primäre Deformationen sind Etappen großartiger geologischer Prozesse, sie sind Entwicklungsphasen in der Bildung neuer Gebirge, Senken, Küsten usw.

Die Deformation während des Erdbebens von San Francisco wurde bereits im vorigen Kapitel beschrieben. Während des Erdbebens in den Provinzen Mino und Owari (Japan) am 28. Oktober 1891 bildete sich im Neotale eine mehr als 60 km lange Spalte; relative vertikale Verschiebungen an der Spalte erreichten 10 m.

Während des Erdbebens in Beludschistan am 20. Dezember 1892 wurde die nach Quettah führende Eisenbahn zwischen Quettah und Chaman beschädigt, die Schienen wurden verbogen; bei der Ausbesserung der beschädigten Strecke zeigte es sich, daß sie um 80 cm kürzer geworden war. Außerdem bildete sich während des Erdbebens nicht weit von der beschädigten Bahnstrecke eine ungefähr 20 km lange, Berg und Tal durchquerende Spalte.

Während des Erdbebens in Lokris (Griechenland) im April 1894 bildete sich auf einer Strecke von 35 km eine zur Meeresküste parallele Spalte; relative vertikale Verschiebungen an der Spalte erreichten $1^1/_2$ m.

Das größte Erdbeben des 19. Jahrhunderts war dasjenige von Assam am 12. Juni 1897. Sein Sitz befand sich in den Garo- und Khasibergen, und in der 400 km weit entfernten Stadt Kalkutta wurden die Häuser trotzdem noch bedeutend beschädigt. — Sekundäre Deformationen waren sehr bedeutend: der Lauf mehrerer Flüsse veränderte sich, Täler wurden teilweise zugeschüttet, es bildeten sich neue Seen, es entstanden trichterförmige Vertiefungen usw. Außerdem entstanden mehrere große Spalten. Daß dieselben die wahre Ursache des Erdbebens bildeten, können wir nicht behaupten, aber wir halten es für wahrscheinlich, daß sie eng damit verknüpft sind. Die größte Spalte bildete sich im Tale des Chedrangflusses. R. D. Oldham*) konnte sie nur auf einer Strecke von 20 km verfolgen; aber ihre wahre Länge muß größer sein, denn an einem Ende verschwindet sie unter den mächtigen Alluvionen des Brahmaputra und am anderen verliert sie sich im Walddickicht. Die (relative) vertikale Verschiebung an der Spalte erreicht lokal 10 m. Eine zweite Spalte befindet sich beim Dorfe Sámin, sie hat 4 km Länge, die vertikale Verschiebung erreicht 3 m. Eine dritte Spalte durchquert die Teepflanzung Bordwar, sie hat 11 km Länge. An dieser letzten ließ sich eine Verschiebung nicht konstatieren; der Gneisfels wurde auf einer Strecke von 11 km gebrochen, ohne daß ein Flügel sich gehoben oder gesenkt hätte. Aus der Änderung der Gefälle der Flüsse**) und Bäche ergibt sich eine relative Hebung des Landes bis zu 8 m. — Bald nach dem Erdbeben, nämlich im folgenden Jahre 1898, wurde die alte Triangulation von 1860 verifiziert. Leider umfaßte die neue Vermessung ein zu kleines

*) R. D. Oldham, Report on the great Earthquake of 12 June 1897. Memoirs of the Geological Survey of India, Bd. XXIX, Kalkutta 1899.

**) Insbesondere des Rongthamflusses.

Gebiet, sie ging nirgends über die Grenzen der von der Katastrophe verwüsteten Landschaft hinaus. Sie wurde an keinen Punkt, an keine Linie angeknüpft, von denen man sicher annehmen könnte, daß sie vom Erdboden nicht verschoben und verändert wurden. Infolgedessen kann man nur von relativen Verschiebungen innerhalb des Schüttergebietes sprechen. In vertikaler Richtung wurde der Triangulationspunkt Mauterichan um 7,3 m, der Triangulationspunkt Landau Modo um 5,2 m, andere Punkte um geringere Beträge gehoben. Eine Senkung, und dabei keine große (1,2 m), wurde nur an einem Punkte (Mopen) konstatiert. Die Dreieckseiten sind im allgemeinen länger geworden, aber die Differenzen sind nicht groß; nur in einem Falle hat man eine Dehnung um 2,6 m gefunden. Dabei weiß man nicht, ob tatsächlich eine Dehnung vorliegt. Es wurde nämlich keine neue Basis gemessen, sondern es wurde angenommen, daß eine Seite der Dreieckskette unverändert geblieben ist. Es kann also sein, daß diese Seite kürzer geworden ist und die Dehnung der übrigen auf einer Täuschung beruht.

Außer den obigen könnten wir noch andere Beispiele plötzlicher, diskontinuierlicher Deformationen anführen, wir könnten selbst in das graue Altertum bis zu dem Erdbeben von 373 vor Christi Geburt zurückgreifen, welches die Städte Helike und Bura am Korinthischen Golf vernichtete. Leider sind viele alte Überlieferungen unbrauchbar, denn sie liefern keine Anhaltspunkte zur Lösung der Frage, ob es sich wirklich um eine Deformation handelt, welche tiefere Regionen der Erdrinde in Anspruch nahm, oder aber nur um eine gewöhnliche Rutschung. Aber selbst wenn wir alle zweifelhaften Fälle mit in Rechnung ziehen, werden wir finden, daß die Zahl der Erdbeben, bei denen man eine Deformation der Erdrinde wahrgenommen hat, nicht sehr groß ist. Viel häufiger sind solche Erdbeben, bei denen man keine direkten Merkmale einer relativen Verschiebung größerer zusammenhängender Massen der Erdrinde konstatiert. Diese Bemerkung bezieht sich nicht nur auf kleine, sondern auch auf sehr große, katastrophale Erdbeben, auf Erdbeben, bei denen sekundäre Deformationen, Rutschungen, Felsstürze usw. sehr bedeutend waren*).

---

*) Nach dem Erdbeben von Messina am 28. Dezember 1908 wurden ziemlich große Veränderungen der Küste in der Messinastraße konstatiert; sie scheinen aber auf sekundären Deformationen, Nachsinken weicher Bodenarten und Rutschungen zu beruhen. Das Epizentrum befand sich wahrscheinlich unter Wasser, in der Messinastraße zwischen Reggio und Messina.

Vielleicht betraf die Verschiebung ein großes Stück der Erdrinde, war aber zu klein, um bemerkt zu werden, oder die Deformation vollzog sich in der Tiefe und die Erdoberfläche wurde nur von den Schwingungen erreicht. Es ist gar nicht schwer, sich solche verborgene Deformationen vorzustellen. Unter anderem gehört nach Smoluchowski die Bildung der Gleitflächen, von welcher im § 7 des vorigen Kapitels die Rede war, zu den verborgenen Deformationen.

Wenn wahrnehmbare plötzliche Deformationen so selten sind, wenn Jahre vergehen, bis ein Stück der Erdrinde sich um einige Meter hebt oder verschiebt, wie langsam muß dann die Gebirgsbildung fortschreiten. Aus Kalifornien kennen wir zwei plötzliche größere Deformationen: eine von 1868, eine zweite von 1906, die wahrscheinlich zwei Entwicklungsstufen desselben tektonischen Prozesses bilden. 38 Jahre sind zwischen einer und der nächsten größeren Verschiebung verstrichen.

Außer und neben plötzlichen diskontinuierlichen Deformationen können auch kontinuierliche Deformationen stattfinden. Diese letzteren erfolgen meist so langsam, daß sie sich der Beobachtung beinahe ganz entziehen. Selbst in aseismischen Gebieten sind Orte bekannt, wo nach Aussage der Einwohner ein vor Jahren unsichtbares Objekt, z. B. der Kirchturm in einem nahen Dorfe, seit einer gewissen Zeit sichtbar geworden ist usw. Leider kann man in den meisten Fällen nicht entscheiden, ob wirklich eine Deformation eingetreten ist, oder einfach eine Abtragung des dazwischenliegenden Terrains durch die Erosion stattgefunden hat. Große aber langsame Deformationen können ganz unbemerkt bleiben. So z. B. sind wir absolut nicht in der Lage zu sagen, ob zur Zeit Hannibals die Höhe der Alpen über dem Seespiegel größer oder geringer war als gegenwärtig. Die Gelehrten des 21. und der folgenden Jahrhunderte werden in einer besseren Lage sein als wir: in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden mehrere Präzisionsnivellements ausgeführt und das laufende 20. Jahrhundert ist hinter seinem Vorgänger nicht zurückgeblieben. Durch Wiederholung des Präzisionsnivellements in entsprechenden Zeitabschnitten, sagen wir nach 50 Jahren, wird man in der Lage sein, nicht nur relativen Verschiebungen, wenn solche vorhanden sind, auf die Spur zu kommen, sondern auch die Geschwindigkeit der Deformation zu bestimmen. Natürlich können auf solche Weise nur Deformationen, welche eine gewisse untere Grenze übertreffen, entdeckt werden.

Um das Gesagte besser zu erklären, werden wir das folgende Beispiel nach Lallemand*) anführen. Denken wir uns eine Strecke von ungefähr 600 km Länge von einem Meer zu einem anderen und einen Rücken von ungefähr 2000 m Höhe in der Mitte der Strecke. Nehmen wir ferner an, daß die Strecke in sechs Sektionen zu 100 km zerlegt und jede Sektion zweimal, d. i. einmal in einer, ein zweites Mal in der entgegengesetzten Richtung nivelliert wurde, so fragt es sich, mit welcher Genauigkeit sich die Höhe des Rückens aus dem Nivellement ergeben wird. Wenn wir ein sehr gutes Präzisionsnivellement voraussetzen, so wird der wahrscheinliche Fehler nur $\pm \frac{42}{\sqrt{2}}$ mm betragen. Aber um etwas von der Deformation zu erfahren, müssen wir zwei Nivellements, sagen wir das Nivellement aus dem Jahre 1900 mit demjenigen von 1950 vergleichen. Wenn wir annehmen, daß beide Nivellements gleich genau sind, dann wird der wahrscheinliche Fehler der Differenz zwischen der Höhe aus dem Jahre 1900 und der Höhe aus dem Jahre 1950 $\pm \frac{42}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \pm 42$ mm betragen.

Es wird gewöhnlich angenommen, daß der wahre Fehler leicht viermal so groß als der wahrscheinliche sein kann, somit bleibt die Höhendifferenz um $\pm$ 17 cm unsicher, und jede Differenz, die innerhalb dieser Grenzen oder nicht weit darüber hinaus liegt, wäre zweifelhaft.

Die Kontrolle der Deformation durch Nivellements ist Sache der Zukunft; einige wenige Fälle, in denen das Nivellieren Deformationen schon aufgedeckt oder bestätigt hat, wurden im vorigen und in diesem Kapitel gelegentlich der Erdbeben von San Francisco und von Assam besprochen, einige andere, so in der Schweiz, in Japan usw. sind zu unbedeutend, um eine besondere Besprechung zu verdienen.

Auf Grund geschichtlicher Überlieferung können wir Hebungen und Senkungen besonders an den Küsten wohl oft vermuten aber selten behaupten: einmal ist die Überlieferung lückenhaft, ein anderes Mal entpuppt sich eine Senkung als eine einfache Rutschung, ein drittes Mal erklärt sich die angebliche Hebung des Landes und das Zurück-

---

*) Lallemand, Mouvements et déformations de la croûte terrestre. Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1909, S. 47 B.

treten des Meeres durch Anschwemmung usw. Doch gibt es einige Fälle, so z. B. die Deformationen an der Meeresküste bei Pozzuoli, die als vollkommen verbürgt zu betrachten sind. In den Ruinen des Serapistempels zu Pozzuoli stehen drei Säulen. Bis $3^1/_2$ m Höhe sind sie glatt, darüber zieht sich ein nahezu 3 m breiter Gürtel voll von Löchern, die durch eine im Salzwasser lebende Konchylie (Lithodomus dactylus) ausgebohrt wurden. Der Tempel muß im Mittelalter eine Zeitlang bis zum Horizonte des oberen Randes des Löchergürtels unter Wasser gestanden haben; die Abwesenheit der Löcher an den unteren Teilen der Säulen erklärt sich durch den Schutt und die Vulkanasche, welche den Boden bis $3^1/_2$ m Höhe (ungefähr) bedeckten. Die Hypothese, daß der Bau eigentlich kein Tempel, sondern ein Aquarium war, müssen wir verwerfen. Bei der Aufräumung des Schuttes wurde der obere Teil der vierten Säule gefunden; er war ebenso voll Löcher, wie die drei anderen Säulen, nur ein Stück, welches im Schutt steckte, war frei von Löchern. Folglich war der Bau schon als Ruine mit Schutt halb bedeckt und diente seinem Zwecke nicht mehr, als das Meer ihn überflutete. Im Jahre 205 n. Chr. stand der Serapistempel noch unversehrt; seit der Zeit muß er sich um wenigstens $6^1/_2$ m gesenkt und nachher wieder gehoben haben. Als der Schreiber dieser Zeilen ihn im Jahre 1883 besuchte, stand am Boden etwas Wasser, bis zu einigen Zentimetern Höhe. Die Hebung wird von einigen mit der Eruption des Monte Nuovo im Jahre 1538 in Zusammenhang gebracht. Übrigens ist die Senkung und Hebung des Serapistempels eine lokale Erscheinung.

Eine viel großartigere Erscheinung ist die langsame Hebung Skandinaviens und der Umgebung der Hudson-Bai. Skandinavien hebt sich in hundert Jahren ungefähr einen Meter. Die Hebung erfolgt nicht gleichmäßig; sie ist örtlich größer oder kleiner, am raschesten steigt die Gegend an der Nordwestküste des Bottnischen Busens empor.

Weit wichtiger als die augenscheinliche Gewißheit, welche sich auf Nivellements, auf geschichtliche Überlieferung oder auf den Erhaltungszustand alter Baudenkmäler gründet, ist diejenige, welche auf der geologischen Forschung beruht. Diese letztere gibt uns auf Schritt und Tritt Beweise zahlreicher und großartiger Deformationen, welche in der Vergangenheit stattgefunden haben. Sie lehrt uns, daß Gebirge und Hochflächen sich jetzt dort erheben, wo früher ein Meer sich ausdehnte, daß ganze Kontinente gesunken sind und

vom Meere überflutet wurden. Sie lehrt uns, daß ehemals horizontal im Meere abgelagerte Schichten gefaltet, geknickt, gebrochen und übereinander geschoben wurden.

§ 2. Die Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit.

Wenn man von äußeren Kräften absieht und dazu annimmt, daß trotz Deformationen alle Teile der Erde stets eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit besitzen, so kann man den Flächensatz in der Form schreiben:

$$C\omega = \text{const.}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

wo C das Trägheitsmoment um die Rotationsachse und ω die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit der Rotation bezeichnet. Nun ist aber

$$C = \Sigma m r^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

wo m ein Massenelement des Erdvolumens und r dessen Abstand von der Rotationsachse bezeichnet. Es ist klar, daß das Trägheitsmoment gleichzeitig mit dem Volumen der Erde zu- und abnimmt. Nach Gleichung 1 aber nimmt die Winkelgeschwindigkeit zu, wenn das Trägheitsmoment abnimmt und umgekehrt.

Bis vor kurzem betrachtete man als vollkommen feststehend, daß die Erde sich infolge der Abkühlung zusammenzieht. Seit der Entdeckung des Radiums in den Gesteinen ist jedoch der Lehre von der säkularen Abkühlung der Erde die Grundlage entzogen worden und wir können gar nicht entscheiden, ob die Erde sich zusammenzieht oder nicht, ob die Rotationsgeschwindigkeit zu- oder abnimmt. Übrigens würde der Einfluß der Abkühlung auf die Geschwindigkeit der Rotation äußerst gering sein.

Aus derselben Gleichung 2 ersieht man, daß, wenn die Masse der Erde infolge des Meteoritenfalles wächst, auch das Trägheitsmoment zunehmen und nach Gleichung 1 die Rotationsgeschwindigkeit abnehmen muß. Eigentlich kann ein Meteoritenfall die Rotation auch noch auf eine andere Weise beeinflussen. Ein fallender Meteorit trifft die Erde im allgemeinen in einer Richtung, welche nicht durch den Schwerpunkt geht, folglich eine Rotation erzeugen kann. Aber einerseits müssen die Wirkungen links und rechts, oberhalb und unterhalb des Schwerpunktes auftreffender Meteorite einander kompensieren, andererseits werden wir sofort sehen, daß

der Einfluß der Meteoriten jedenfalls nur sehr gering ist und daß es sich gar nicht lohnt, die Erscheinung genauer zu analysieren.

R. S. Woodward*) beschäftigte sich mit dem Einfluß der Kontraktion der Erde und des Meteoritenfalles auf die Tageslänge. Nach dem Beispiel des bekannten Spezialisten in der Meteoritenfrage, H. A. Newtons, nimmt er an, daß täglich ungefähr 20000 Meteoriten auf die Erde fallen und daß die Masse eines einzelnen durchschnittlich 1 g beträgt. Auf Grund dieser Zahlen findet er, daß die Zunahme der Tageslänge infolge des Meteoritenfalles 200000 mal so klein ist als die Abnahme der Tageslänge infolge der Kontraktion. Dabei ist seine Schätzung der Erdkontraktion sehr mäßig, er findet z. B., daß der Tag während einer unendlich langen Zeit nur um 6 Proz. seiner Länge abnehmen kann und während der ersten 10 Millionen Jahre nur eine halbe Sekunde verliert.

Es scheint, daß die Reibung bei ozeanischen und irdischen Gezeiten einen Einfluß auf die Tageslänge haben dürfte. Schon Kant behauptete, daß die Geschwindigkeit der Erdrotation abnehmen soll, weil die Gezeitenwelle dem Monde von Ost nach West folgt und der Rotation entgegenwirkt. Die Auffassung Kants werden wir nicht analysieren, da sie mehr ein geschichtliches Interesse hat; nur so viel wollen wir sagen, daß die ziemlich verbreitete Meinung, daß die Anziehung des Mondes auf die Gezeitenwelle ein der Rotation der Erde entgegenwirkendes Kräftepaar erzeugt, nicht haltbar ist. H. Poincaré**) hat gezeigt, daß das Moment dieses Kräftepaares Null ist. Die Gezeitenreaktion beruht einzig und allein auf der Reibung. Ohne Reibung würde keine Tendenz zur Egalisierung des Sterntages mit der Umlaufszeit des Mondes um die Erde bestehen.

Es ist klar, daß eine namhafte Änderung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde der Aufmerksamkeit der Astronomen nicht entgangen wäre. Die Umdrehungszeit der Erde oder der sogenannte Sterntag ist das fundamentale Zeitmaß. Ändert sich das Zeitmaß, so müssen sich die Umlaufszeiten der Himmelskörper scheinbar und zwar im entgegengesetzten Sinne ändern. Wenn der Sterntag

---

*) R. S. Woodward, The effects of secular cooling and meteoric dust on the length of the day. Astronomical Journal Bd. XXI (1901), S. 169—175.

**) H. Poincaré, Sur un théorème général relatif aux marées. Bull. astron. Bd. XX (1903), S. 215—229.

z. B. länger wird, so muß die Bewegung der Himmelskörper eine scheinbare Beschleunigung aufweisen.

Noch gegen das Ende des 17. Jahrhunderts verglich Halley*) einige von Ptolemäus und von arabischen Astronomen überlieferte Mondfinsternisse mit Mondfinsternisbeobachtungen seiner Zeit und fand, daß die Bewegung des Mondes um die Erde eine gewisse Beschleunigung aufweist. Hundert Jahre später zeigte Laplace, daß diese Beschleunigung durch die langsame Änderung der Exzentrizität der Erdbahn bedingt ist, aber noch ein halbes Jahrhundert später (im Jahre 1853) zeigte Adams, daß die von den Änderungen der Exzentrizität abhängige Beschleunigung sich nur ungefähr auf die Hälfte des von Laplace angegebenen Betrages beläuft. Die Differenz zwischen den Werten von Laplace und Adams erklärt sich dadurch, daß Laplace sich mit der ersten Annäherung begnügte, während Adams auch noch Glieder zweiter Ordnung berücksichtigte. Außerdem zeigte Adams, daß die theoretische Beschleunigung nicht ausreicht, um die beobachtete zu erklären. Er nahm einige bei den Schriftstellern des Altertums erwähnte Sonnenfinsternisse, verglich sie mit den rezenten Beobachtungen und fand, daß die Umlaufszeit des Mondes seit dem Altertum eine größere Beschleunigung erfahren hat, als diejenige, die aus seiner Theorie folgt. Auf diese Weise wurde die schon als erledigt betrachtete Frage der Mondbeschleunigung wieder angeschnitten. Im Jahre 1866 bemerkte Delaunay, daß die Differenz zwischen der Theorie und der Erfahrung sich durch die Änderung unseres Zeitmaßes, d. h. der Umdrehungszeit der Erde, erklären ließe und wies auf die Gezeitenreaktion als Ursache hin. Infolge der Reibung bei den Gezeiten wird die Energie der Erdrotation langsam zerstreut, die Rotationsgeschwindigkeit verringert und die Bewegung des Mondes scheinbar beschleunigt. G. H. Darwin**), welcher daran eine ganze Theorie der Evolution des Mondes angeknüpft hat, behauptete selbst eine Zeitlang, daß die Erde in einem Jahrhundert mindestens 8,3 Sekunden, vielleicht ganze 23,4 Sekunden verliere. Wie diese Behauptung zu verstehen ist, werden wir sofort erklären.

---

*) Die Geschichte dieser Frage wurde von Tisserand im 13. und 14. Kapitel des III. Bandes (Paris 1894) seines: Traité de mécanique céleste ausführlich dargestellt.

**) G. H. Darwin, Scientific Papers. II. Bd. Tidal Friction and Cosmogony. Cambridge 1908.

Man denke sich zwei Uhren, eine absolut genaue, die, sagen wir, im Jahre 1900 reguliert und nachher sich selbst überlassen, und eine zweite, die von Zeit zu Zeit nach den üblichen Methoden, d. h. nach den Gestirnen reguliert wird. Nach hundert Jahren, d. h. im Jahre 2000 müßte dann die erste Uhr um 8,3 Sekunden bezw. um 23,4 Sekunden gegen die zweite vorgehen. Doch dies war ein etwas übereilter Schluß, wie die weitere Entwickelung der Frage bewiesen hat. In der letzten Zeit wurde sie gelegentlich der merkwürdigen Untersuchungen Cowells zum Gegenstand einer lebhaften Diskussion unter englischen und amerikanischen Astronomen. Es wurden dabei die zahlreichen theoretischen Schwierigkeiten und die Komplikation beleuchtet, welche durch die Notwendigkeit entsteht, alte meist zweideutige Texte zu prüfen und zu interpretieren. Es zeigte sich, daß die Mondbeschleunigung geringer ist, als man etwa zur Zeit, als G. H. Darwin seine Abhandlung schrieb, dachte. Die Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung wurde indes nicht vollständig aufgehoben; auch ist man im Zweifel geblieben, ob die Abweichung allein auf der Änderung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde oder auch noch auf anderen Ursachen beruht.

Da wir uns aber das Ziel: „mögliche Ursachen der Deformation zu durchmustern“ gesteckt haben, werden wir nach dem Beweise, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Erde sich geändert hat, nicht weiter fragen, sondern beispielsweise als zu prüfende Hypothese annehmen, daß die Erde sich um 22 Sekunden nach einem Jahrhundert verspätet, und fragen, vor wieviel Jahren der Sterntag, d. h. die Umdrehungszeit der Erde nicht 86164*), wie jetzt, sondern, sagen wir, 80000 Sekunden enthielt. Demnach soll zwischen der gegenwärtigen Rotationsdauer T und der damaligen T_0 die Beziehung bestehen:

$$T = \frac{86\,164}{80\,000} = 1{,}07705\ T_0.$$

Gleichzeitig aber besteht die Beziehung:

$$T = T_0 + k\,t,$$

wo k die Zunahme der Rotationsdauer pro Zeiteinheit und t die seitdem verstrichene Zeit bezeichnet. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$t = 0{,}07705\ \frac{T_0}{k} = \frac{0{,}07705}{1{,}07705} \cdot \frac{T}{k}.$$

*) Genauer 86164,091 Sekunden.

Nehmen wir als Zeiteinheit ein Jahrhundert, so ist, da dasselbe ungefähr 36 622 Sterntage umfaßt

$$T = \frac{1}{36\,622},$$

andererseits entspricht einer Verspätung der Erde um 22 Sekunden im Jahrhundert eine Zunahme der Rotationsdauer um 44 Sekunden im Jahrhundert, d. i. um $\frac{44}{36\,622}$ Sekunden pro Rotationsdauer oder um $\frac{44}{(36\,622)^2 \cdot 86\,164}$ Jahrhundert pro Rotationsdauer, somit ist

$$k = \frac{44}{(36\,622)^2 \cdot 86\,164} \text{ Jahrhundert}$$

und demnach

$$t = \frac{0{,}07705}{1{,}07705} \cdot \frac{36\,622 \times 86\,164}{44} \text{ Jahrhunderte.}$$

Die Ausführung der Rechnung wird ungefähr 5 130 000 Jahrhunderte, d. i. 513 Millionen Jahre ergeben.

Machen wir noch eine willkürliche Annahme, nämlich die, daß die damalige und die gegenwärtige Abplattung den Gleichgewichtsbedingungen genügen — so wird sich dann sofort ergeben, daß einer Rotationsdauer von 80 000 Sekunden eine ungefähre Abplattung von $\frac{1}{260}$ entspricht*). Beim Übergang von dieser Abplattung zur gegenwärtigen Abplattung von $\frac{1}{298}$ müßte die äquatoriale Halbachse sich ungefähr um 1 km verkürzen und die polare um ungefähr 2 km verlängern. Es ist aber zweifelhaft, ob eine so langsame Deformation unmittelbare Spuren in Gestalt von gehobenen Küstenlinien zurückgelassen hätte; auch bei einer noch so großen Starrheit würde die Deformation der Erde parallel der Deformation der Ozeane erfolgen und die Küsten würden sich nur wenig verschieben.

§ 3. Die Änderungen der Lage der Rotationsachse.

Verschiedene Ursachen: Transport fester Stoffe durch Flüsse und Strömungen, vulkanische Ausbrüche, Erdbeben usw. verändern die Massenverteilung. Alle diese Änderungen sind jedoch sehr klein und es müssen sehr viele Jahre vergehen, bis ihre Wirkung

---

*) Man kann dabei annehmen, daß die Abplattung proportional dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit wächst.

merklich wird. Hayford und Baldwin*) führen folgende Überschlagsrechnung aus. Sie nehmen an, daß während des Erdbebens von S. Francisco im Jahre 1906 ein Stück Erdrinde von 40 000 qkm Fläche, 118 km Dicke und von der mittleren Dichte 4 sich nordwärts horizontal um 3 m verschoben hat. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß der Mittelpunkt dieses Blockes sich in ungefähr 38° nördlicher Breite befindet, finden sie, daß der Pol der Trägheitsachse sich um 0,0007″, d. h. um zwei Millimeter verschoben hat!!

Da jedoch durch Summation kleiner Wirkungen große Endergebnisse erzielt werden können, so ist es geboten, die Verschiebung des Pols infolge Massenverschiebungen näher zu betrachten. Hier müssen wir hervorheben, daß bei einem Körper wie die Erde, der weder absolut starr noch vollkommen elastisch ist, die Breitenvariation unter mannigfachen Schwankungen zu einer dauernden Änderung aller Breiten führen kann. Um dies einzusehen, müssen wir zwei hypothetische Fälle ins Auge fassen. — Zuerst werden wir die Erde als vollkommen plastisch betrachten und fragen, was geschieht, wenn eine Massenverschiebung stattgefunden und die Trägheitsachse sich von der Rotationsachse getrennt hat. Es kommt selbstverständlich die Eulersche Perturbation zustande; da aber die Konfiguration, in welcher beide Achsen zusammenfallen, eine Konfiguration stabilen Gleichgewichts ist, so äußern sich sofort Kräfte, welche der Wiedervereinigung beider Achsen zustreben. Bei einem plastischen und mit innerer Reibung begabten Körper werden diese Kräfte nach einer Reihe immer abnehmender Oszillationen und nach einigen Deformationen, die ihrerseits die Lage der Trägheitsachse ändern, eine Wiedervereinigung beider Achsen zustande bringen, aber in der Regel nicht am alten Orte. Die neue gemeinschaftliche Lage beider Achsen wird von der alten etwas verschieden sein und die äquatoriale Ausbauchung der Erde wird sich auch entsprechend verschieben. — Da der beschriebene Prozeß sich immer von neuem wiederholen kann, so kann die Rotationsachse und mit ihr die äquatoriale Ausbauchung sich immer von neuem verschieben.

Wir haben soeben den Prozeß als einen diskontinuierlichen beschrieben; tatsächlich wäre er aber kontinuierlich, da gewisse

---

*) Hayford und Baldwin, Movements in the California Earthquake. Coast and Geod. Survey. Report for 1906—1907. Appendix 3, S. 97.

Ursachen der Massenverschiebungen wie der Transport durch Flüsse, beständig wirken.

Betrachten wir jetzt die Erde als unplastisch, also starr, aber nicht absolut starr, sondern so, wie es spröde, brüchige Körper sind. Der Verlauf des Prozesses wäre dann ein anderer, denn Deformationen, welche beide Achsen der Wiedervereinigung zuführen, können erst dann auftreten, wenn die deformierenden Kräfte ein gewisses, von der Widerstandsfähigkeit des Stoffes abhängiges Maß überschritten haben. Wir hätten dann plötzliche Deformationen, die übrigens zu einem ähnlichen Resultat führen könnten, wie kontinuierliche Deformationen bei einem plastischen Körper, nur müßte man oft sehr lange warten, bis es zu einer solchen Deformation käme.

Weder die erste noch die zweite Hypothese entspricht der Wahrheit, beide stellen nur gewisse extreme Zustände vor, zwischen denen der wahre Zustand der Erde liegt; man weiß selbst nicht, welches Extrem der Wahrheit näher kommt. Der gegenwärtige Verlauf der Breitenvariation scheint eher für die zweite Hypothese zu sprechen, aber die Bahn des Pols zeigt so viele rätselhafte Züge, daß man mit der Interpretation vorsichtig sein muß. — Nur auf Grund ganz allgemeiner Betrachtungen können wir behaupten, daß eine Wanderung des Pols auf der Erdoberfläche a priori nicht auszuschließen ist, daß sie aber jedenfalls nur sehr langsam erfolgen kann.

Ein ähnlicher Gedankengang wie derjenige, der am Ende des vorigen Paragraphen eingeschlagen wurde, hätte uns zu einem ähnlichen Schluß geführt, nämlich dem, daß Deformationen, welche die Wanderungen des Pols begleiten, keine leicht erkennbaren Spuren in der Gestalt von Küstenverschiebungen usw. hinterlassen können. Man könnte sie aber auf Grund paläontologischer, insbesondere paläophytologischer Überreste konstatieren, denn große Verschiebungen der Lage der Rotationsachse könnten nicht ohne einen merklichen Einfluß auf die Verteilung klimatischer Zonen bleiben. Schon im vierten Kapitel haben wir gelegentlich der Eulerschen Perturbation hervorgehoben, daß, abgesehen von der Präzession und Nutation, die Rotationsachse eine praktisch konstante Lage im Raume einnimmt. Wenn also die Lage der Rotationsachse in bezug auf die Erde eine Änderung erleidet, so bedeutet dies, daß die Erde in eine andere Lage zur Sonne kommt. Falls die Paläontologen einmal zu der Überzeugung kämen, daß in einer der vergangenen geologischen Epochen die Verteilung klimatischer

Zonen auf eine von der gegenwärtigen ganz verschiedene*) Rotationsachse hinweist, so bliebe den Geophysikern nichts übrig, als dieses Postulat zu akzeptieren. Es scheint aber nicht, als ob die Paläontologen bald mit einer solchen Forderung auftreten wollten. In gewissen geologischen Epochen, z. B. in der Steinkohlenperiode, ist es schwer, klimatische Zonen zu unterscheiden, in der permischen gibt es Spuren einer Eiszeit in Südafrika, Indien und Australien; da aber Gletscher im Gebirge selbst unter dem Äquator existieren können, sind Gletscherspuren kein zwingendes Argument zugunsten einer Verschiebung klimatischer Zonen.

§ 4. Die Hypothese der Trennung des Mondes von der Erde.

Große Unebenheiten der Erdoberfläche: Kontinente und ozeanische Vertiefungen, könnten letzte Spuren einer uralten Katastrophe sein. In England war und ist noch eine Hypothese**) ziemlich allgemein verbreitet, nach welcher der Stille Ozean die letzte Spur einer Vertiefung darstellt, welche während der Trennung des Mondes von der Erde entstand. Die geologische Seite der Frage wollen wir nicht berühren, nur nebenbei wollen wir erwähnen, daß bei weitem nicht alle Geologen den Stillen Ozean als dem Monde gleichaltrig ansehen. Nach dieser Bemerkung wollen wir zur geophysikalischen Seite der Frage übergehen.

Die besprochene Hypothese stützt sich zum Teil auf die oben zitierten Untersuchungen G. H. Darwins über die Evolution des Mondes und zum Teil auf die berühmten Untersuchungen Poincarés über die Gleichgewichtsfiguren eines homogenen flüssigen Weltkörpers. Eigentlich dürfte die Theorie Poincarés und G. H. Darwins, als für homogene Körper gültig, auf die Erde nicht angewandt werden, aber sie schien so breite und neue Horizonte zu eröffnen, daß die Versuchung, Konsequenzen aus derselben zu ziehen, tatsächlich sehr groß war. Wir werden vielleicht am besten tun, wenn wir Poincaré***) selbst reden lassen.

---

*) Kleine Verschiebungen der Rotationsachse können auf diese Weise nicht entdeckt werden.

**) Sie wurde besonders durch das Buch O. Fishers: „Physics of the Earth's Crust" popularisiert.

***) Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation. Acta mathematica, Bd. VII (1885), S. 379.

„Betrachten wir einen von Anfang an mit Rotationsbewegung begabten homogenen flüssigen Körper, und denken wir uns, daß dieser Körper sich infolge langsamer Abkühlung zusammenzieht, aber gleichzeitig stets homogen bleibt. Nehmen wir ferner an, daß die Abkühlung so langsam und die innere Reibung der Flüssigkeit so stark ist, daß die Rotationsbewegung in allen Teilen der Flüssigkeit stets dieselbe bleibt. Unter diesen Bedingungen wird die Flüssigkeit immer trachten, eine säkular stabile Gleichgewichtsgestalt anzunehmen. Übrigens wird das Rotationsmoment konstant bleiben."

„Zu Beginn, solange die Dichte noch sehr klein ist, hat die flüssige Masse die Gestalt eines sehr wenig von einer Kugel abweichenden Rotationsellipsoids. Die erste Folge der Abkühlung wird eine Zunahme der Abplattung sein, doch bleibt die Gestalt stets ein Rotationsellipsoid. Erst, wenn die Abplattung ungefähr den Wert $^2/_5$ erreichen wird, wird das Rotationsellipsoid in ein Jacobisches Ellipsoid*) verwandelt. Wenn die Abkühlung fortschreitet, hört die Masse auf, ellipsoidal zu sein; sie wird asymmetrisch in bezug auf eine der früheren Symmetrieebenen des dreiachsigen Ellipsoids**): es bildet sich eine Vertiefung auf dem Ellipsoid in seinem mittleren Teile, aber näher nach einem Ende der größten Halbachse hin. Der größere Teil des Stoffes trachtet, sich einer sphärischen Form zu nähern, während der kleinere Teil aus dem Ellipsoide an einem Ende der großen Halbachse austritt, als wenn er sich von der Hauptmasse trennen wollte."

„Es ist schwer, mit Sicherheit vorherzusagen, was dann geschieht, wenn die Abkühlung weiter fortschreitet, aber es ist gestattet, anzunehmen, daß die Vertiefung immer weiter wachsen und den Hals zwischen der Hauptmasse und dem austretenden Teile immer weiter einschnüren wird, bis endlich der Körper in zwei isolierte Massen zerfällt."

„Es könnte jemand in diesen Betrachtungen eine Bestätigung oder eine Kritik der Laplaceschen Hypothese suchen, man darf aber nicht vergessen, daß die Bedingungen ganz verschieden sind. Denn unsere Masse ist homogen, während

---

*) Dies sind dreiachsige Ellipsoide, deren Halbachsen a, b, c den Ungleichheiten $a > \sqrt{2} \cdot c$, $b > c$ genügen, die kleinste Halbachse c ist Rotationsachse.

**) Nämlich diejenige, welche durch die mittlere und kleinste Halbachse geht.

der Nebel von Laplace gegen das Zentrum hin stark verdichtet sein mußte."

Das obige Zitat aus Poincaré ist so klar, daß es überflüssig wäre, auseinanderzusetzen, warum seine Theorie auf die Genesis des Mondes angewandt wurde; es wird aber nicht überflüssig sein, auf den schwachen Punkt derselben hinzuweisen. Auf Grund gewisser allgemeiner Theoreme aus der Theorie des Gleichgewichts rotierender flüssiger Weltkörper glaubte Poincaré schließen zu dürfen, daß die birnförmige Gleichgewichtsgestalt, in welche das Jacobische Ellipsoid vor dem Zerfallen des Körpers in zwei ungleiche Teile übergeht, eine stabile Gleichgewichtsgestalt ist. Indes hat Schwarzschild*) gezeigt, daß die allgemeinen Kriterien, auf die Poincaré seinen Schluß stützte, für die birnförmige Gestalt gerade nicht zutreffen. Daraufhin hat Poincaré**) die Frage der Stabilität birnförmiger Gestalten in einer höchst merkwürdigen Abhandlung wieder aufgenommen und gezeigt, daß das Kriterium der Stabilität sich auf die Frage reduziert, ob die Summe einer gewissen unendlichen Reihe negativ oder positiv ist. Die Summierung der Reihe hat G. H. Darwin***) unternommen, aber sie gelang ihm nicht. Er berechnete nur einige erste Glieder, fand daß ihre Summe negativ ist und schloß daraus auf die Stabilität. Bald darauf gab Liapunow†) an der Hand einer anderen Methode den Beweis, daß die birnförmige Gestalt unstabil ist. Nun berechnete G. H. Darwin††) wieder einige weitere Glieder der Reihe, fand wieder eine negative, obwohl numerisch kleinere Summe als das erste Mal und behauptete, daß die Stabilität doch bestehe. Da er aber den Rest der Reihe nicht bestimmen konnte, können wir die Summation nicht als ausgeführt betrachten (die Reihe ist ja unendlich). Andererseits hat er auch nicht bewiesen, daß Liapunow einen Fehler begangen hat. Aus diesen Gründen können wir seine Behauptung

---

*) Schwarzschild, Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichtes. Neue Annalen der Kgl. Sternwarte München, Bd. III, S. 234–298.

**) Poincaré, Sur la stabilité des figures pyriformes. Phil. Trans. Bd. 198 A, S. 333—373.

***) Darwin, The Stability of the pear-shaped Figure of Equilibrium. Phil. Trans. Bd. 200 A.

†) Liapunow, Un probléme de Tchebychef. Mém. de l'Acad. Imp. des Sc. St. Petersbourg (1905), Bd. XVII, Nr. 3.

††) Darwin, Further considerations on the Stability of the pear-shaped Figure. Phil. Trans. Bd. 208 A.

nicht als begründet und die birnförmige Gestalt nicht als stabil anerkennen. Auf diese Weise fällt die dritte Phase der Evolution weg, und wenn bei weiter zunehmender Rotationsgeschwindigkeit das Jacobische Ellipsoid aufhört, eine Gestalt stabilen Gleichgewichts zu sein, so zerfällt es unter stürmischer Bewegung, und der Prozeß kann überhaupt mit Hilfe statischer Methoden nicht verfolgt werden.

Natürlich bedeutet dies noch nicht, daß eine Trennung des Mondes von der Erde nicht möglich sei. Die Theorie Poincarés bezieht sich auf einen homogenen Körper, und die Erde ist gewiß nicht homogen. Was bei einem homogenen Körper nicht möglich ist, könnte bei einem heterogenen möglich sein. Doch wissen wir von der Evolution heterogener Körper zu wenig, um etwas Bestimmtes sagen zu können.

Wir hoffen, daß der Leser uns beistimmen wird, wenn wir sagen, daß die Hypothese der Geburt des Mondes durch die Erde nicht zur Grundlage etlicher weiteren Schlüsse gemacht werden kann.

§ 5. Loves Hypothese der gravitationalen Instabilität.

Im vorigen Abschnitt haben wir eine Theorie besprochen, welche die Urgeschichte der Erde vom Standpunkte der Hydrostatik aus behandelt. Jetzt werden wir eine von J. H. Jeans*) aufgestellte und von A. E. H. Love**) ausgebildete Hypothese besprechen, in welcher die Erde als ein homogener isotroper fester Körper angesehen wird. Love betrachtet die Erde als einen festen, aber nicht absolut starren Körper. Es ist also ein Körper, auf welchen die Gleichungen der Elastizitätstheorie (vergl. fünftes Kapitel, § 2, Gl. 1 und 5) anwendbar sind. Aber wenn es sich um die Erde handelt, kann man nicht, wie es sonst in der Elastizitätstheorie üblich ist, die Attraktion vernachlässigen. Love nimmt sie in seine Gleichungen auf und wird infolgedessen gezwungen, Komponenten eines dem hydrostatischen ähnlichen Druckes einzuführen. Auf diese Weise sind seine Gleichungen eine Art Kompromiß zwischen den Gleichungen der Elastizitätstheorie und der Hydrostatik. Der Mangel an Raum verbietet uns, seine Gleichungen

---

*) J. H. Jeans, On the Vibrations and Stability of a gravitating Planet. Phil. Trans. Bd. 201 A.

**) A. E. H. Love, The gravitational Stability of the Earth. Phil. Trans. Bd. 207 A.

sowie seine weitere Analyse anzuführen: wir müssen uns auf eine kurze Schilderung der Hauptzüge seiner Theorie beschränken.

Dank der Attraktion lasten die Schichten der Erde eine auf der anderen und erzeugen einen sehr großen Druck im Erdinnern, welcher seinerseits eine Verdichtung nach dem Zentrum erzeugt, so daß der Stoff, obwohl ursprünglich homogen, doch eine variable Dichte besitzt. Eine Konfiguration, in welcher die Dichte kontinuierlich nach dem Mittelpunkt hin wächst, ist stabil, jedoch unter der Bedingung, daß der Kompressionsmodul k und die Starrheit μ hinreichend große Werte besitzen. Es fragt sich zuerst, ob die gegenwärtigen Koeffizienten k und μ der Erde die Stabilität sichern. Aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit seismischer Wellen findet Love eigentlich zu niedrige Werte: $k = 3{,}69 \times 10^{12}$, $\mu = 1{,}38 \times 10^{12}$ in C. G. S.-Einheiten, er wollte aber die untere Grenze dieser Werte haben. Doch sind beide Koeffizienten mehr als hinreichend groß, um die Stabilität zu sichern. Nun vermutet Love, daß der Zustand der Dinge in der Vergangenheit vielleicht ein anderer war. Denken wir uns z. B., daß die Kompressibilität ehemals viel größer war als jetzt, daß z. B. die Erde bedeutend mehr kompressibel war als Glas. Dann wäre die Konfiguration mit einer nach dem Mittelpunkt wachsenden Dichte nicht stabil, es wäre eine Neigung zur Bildung einer unsymmetrischen Dichteverteilung und einer unsymmetrischen Figur vorhanden. Die Ursache dieser Neigung soll man in der Abwesenheit von Strömungen suchen: wenn z. B. irgendwo aus irgendeinem Grunde eine lokale Verdichtung entsteht, kann der verdichtete Stoff nicht herunterfallen und sozusagen in die ihm zugewiesene Tiefe kommen. Es bildet sich ein neues lokales Attraktionszentrum und der Körper deformiert sich entsprechend der neuen Verteilung der Attraktionskräfte. Natürlich kommt die Deformation zustande nicht durch Strömungen, sondern durch Verdichtung bezw. Ausdehnung und Scherung des Stoffes. — Infolge der Deformation kann die Oberfläche kein Umdrehungssphäroid bleiben: es müssen sich Unebenheiten bilden, die mit Hilfe von oberflächlichen Kugelfunktionen*) ersten und dritten

---

*) Bezüglich der Kugelfunktionen vergleiche man das zweite Kapitel. Die oberflächlichen Kugelfunktionen ergeben sich sofort aus der zweiten und dritten Gleichung 27 des zweiten Kapitels; die Funktionen von ψ unmittelbar aus der dritten Gleichung, die Funktionen von φ aus der zweiten nach Division durch c^n, wobei zu berücksichtigen ist, daß $\mu = c \cos \varphi$. Die entsprechende Funktion $n$ten Grades von r (Radius) ist r^n oder r^{-n-1}.

Grades ausgedrückt werden können. Die Unebenheit, welche durch die oberflächliche Kugelfunktion ersten Grades ausgedrückt wird, gibt nur einen runden Kontinent, aber zusammen mit den Unebenheiten, welche durch oberflächliche Kugelfunktionen dritten Grades ausgedrückt werden, gibt sie ein ziemlich kompliziertes System von Kontinenten und ozeanischen Vertiefungen. Love zeigt, daß durch passende Wahl der willkürlichen konstanten Koeffizienten*) man die gegenwärtige Verteilung von Land und Meer in rohen Umrissen wiedergeben kann.

So interessant die Theorie Loves ist, gibt sie zu gewissen Bedenken Anlaß: sind wir gewiß, daß Strömungen im Erdinnern ganz unmöglich sind? Ist nicht eine gewisse Plastizität, also Strömen unter starken Druckdifferenzen zulässig?

§ 6. Die Kontraktion der Erde.

Schon im vierten Kapitel, § 5, haben wir hervorgehoben, daß der jährliche Wärmeverlust der Erde sich leicht berechnen läßt, daß aber nicht bekannt ist, ob dieser Verlust zum Teil, gänzlich oder mit Überschuß durch die Zersetzung des Radiums gedeckt wird, ob also der Wärmevorrat der Erde gegenwärtig ab oder zunimmt bezw. stationär bleibt. Infolgedessen können wir nicht sicher behaupten, daß die Erde sich abkühlt und zusammenzieht. Andererseits konnten wir (vergl. viertes Kapitel, § 5), in Unkenntnis der Zustandsgleichung und des Ausdehnungskoeffizienten des Erdinnern, selbst keine ordentliche Überschlagsrechnung ausführen. Auf Grund der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung kann man nur die Größenordnung der Kontraktion berechnen. Das werden wir auch tun mit dem ausdrücklichen Vorbehalte, daß weder die Hypothese der Kontraktion noch die Methode der Rechnung als sicher zu betrachten sind.

Es sei μ der lineare Ausdehnungskoeffizient, T die Temperatur, t die Zeit. Während der unendlich kleinen Zeit dt ändert sich das Volumen eines unendlich kleinen Elementes $dx\,dy\,dz$ des Körpers um

$$3\mu \frac{dT}{dt} \cdot dt \cdot dx\,dy\,dz$$

*) Es stehen drei Kugelfunktionen ersten Grades, also drei willkürliche Koeffizienten, ferner sieben Kugelfunktionen dritten Grades, also sieben willkürliche konstante Koeffizienten zur Verfügung.

und das Volumen des ganzen Körpers, wenn μ konstant angenommen wird, ändert sich um

$$3\mu dt\, S\frac{dT}{dt}\cdot dx\,dy\,dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Nach der Theorie Fouriers ist nun aber:

$$\frac{dT}{dt}=a\left[\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{d^2T}{dz^2}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

wo a den thermometrischen Wärmeleitungskoeffizienten bedeutet. Substituiert man 4 in 3 und benutzt das bekannte Theorem von Green, nach welchem eine Raumintegration durch eine Integration über die ganze Oberfläche ersetzt werden kann, so erhält man

$$3\mu a\,dt\int\frac{dT}{dn}\,d\sigma,$$

wo dn das Element der Normalen und $d\sigma$ das Element der Oberfläche bedeutet. Aber nach Gleichung 9 (viertes Kapitel, § 3) ist

$$\frac{dT}{dn}=-\frac{1}{G},$$

wo G den geothermischen Gradienten bezeichnet. Nimmt man den Gradienten als konstant an, so kann man die Integration sofort ausführen und man erhält folgenden Ausdruck für die Volumänderung des Körpers während der Zeit dt:

$$-\frac{3\mu a}{G}\cdot 4\pi R^2\cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

Die Volumänderung einer Kugel aber schreibt sich:

$$4\pi R^2\cdot dR. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Setzt man 5 und 6 einander gleich, so erhält man:

$$\frac{dR}{dt}=-\frac{3\mu a}{G}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

Nach Lord Kelvin ist $a=400$ für die Erdrinde, wenn ein Jahr als Zeiteinheit und ein engl. Fuß als Längeneinheit genommen wird. Die Zeiteinheit werden wir beibehalten, aber statt des engl. Fußes nehmen wir ein Zentimeter als Längeneinheit. Da ein engl. Fuß $=30{,}48$ cm und a die Dimensionen einer durch eine Zeit dividierten Fläche besitzt, so müssen wir die Zahl 400 mit $(30{,}48)^2$ multiplizieren. Weiter ist nach O. Fisher der mittlere lineare Ausdehnungskoeffizient der Gesteine der Erdrinde

$$\mu=0{,}000007 \text{ für } 1^0 \text{ F.}$$

Da wir C-Grade gebrauchen, so müssen wir μ mit $\frac{9}{5}$ multiplizieren. Endlich ist (in Zentimetern) $G = 3500$. Auf Grund dieser Zahlen ergibt sich:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{3 \times 0{,}000007 \times 9 \times 400 \times (30{,}48)^2}{5 \times 3500} = -\ 0{,}004 \text{ cm (ungefähr).}$$

Somit berechnet sich die Verkürzung des Erdradius zu vier hundertstel Millimeter pro Jahr. Die entsprechende Verringerung der Erdoberfläche berechnet sich zu ungefähr 6400 qm*) pro Jahr. Gewiß stimmen diese Zahlen sehr gut damit überein, was wir über die Langsamkeit geologischer Prozesse wissen, aber angesichts des zu Anfang dieses Abschnittes Gesagten müssen wir ihnen eine weitergehende Bedeutung absprechen.

Wenn die physikalisch-theoretischen Stützen der Kontraktionstheorie versagen, so fragt es sich, ob diese nicht als eine durch geologische Forschungen empirisch bewiesene Tatsache gelten kann. Wir sehen in der Erdrinde so viele gefaltete Schichten, daß eine Erklärung durch Kontraktion sich von selbst aufdrängt. Da aber nur die Erdrinde der Forschung zugänglich ist, so können wir nicht behaupten, daß die Faltung in der Erdrinde durch die Kontraktion der ganzen Erde zustande gekommen ist. Andere Ursachen, vielleicht auch solche, von denen wir heute noch keine Ahnung haben, können wirksam sein; es wurde schon eine Theorie**) aufgestellt, welche das Radium als Ursache der Falten- und Gebirgsbildung bezeichnet. Außerdem haben wir positive Gründe, die Kontraktionstheorie nicht als einzig mögliche Erklärung der Gebirgsbildung anzuerkennen. Den wichtigsten wollen wir sofort anführen. Es ist klar, daß bei einer Kontraktion der Erde als Ganzes die Falten annähernd gleichmäßig über die ganze Oberfläche verteilt sein müssen. Die geologische Forschung zeigt indes, daß die Faltung heute ebenso wie in der Vergangenheit immer auf eng begrenzte Gebiete konzentriert war. Diese Gebiete waren zu den einzelnen geologischen Epochen verschieden, ihre Zahl war einmal größer, ein anderes Mal kleiner, aber seit der kambrischen Zeit ist es nie vorgekommen, daß die Faltung mehr als einen kleinen Bruchteil der Erdoberfläche betroffen hätte. Wollen wir trotzdem die Ursache der Faltung in der Kon-

---

*) Oder 0,64 Hektaren.

**) Von J. Joly, vergl. Nature, Bd. 78, S. 456—466.

traktion der Erde erblicken, so müssen wir annehmen, daß sich unter der Erdrinde eine flüssige Schicht befindet, auf welcher die Rinde gleiten kann. Dann können dickere oder steifere Teile der Rinde dem horizontalen Drucke widerstehen und der ganze Effekt der Kontraktion kann sich auf minder widerstandsfähige Teile konzentrieren. Um also die Kontraktionshypothese haltbar zu machen, müssen wir eine zweite Hypothese zu Hilfe nehmen, welche direkt zu isostatischen Deformationen (vergl. § 8 unten) führt.

Übrigens ist es nicht möglich, die Hypothese einer zusammenhängenden flüssigen Schicht mit dem großen Widerstand, welchen die Erde in der Gezeitenreaktion und in der als Breitenvariation bekannten Perturbation (vergl. viertes Kapitel, § 8 und 9) aufweist, zu vereinbaren, denn beinahe der ganze Widerstand müßte dann von der Erdrinde geleistet werden und der innere Kern, so steif und starr wir uns ihn auch denken, könnte nur wenig mithelfen. — Love*) hat diesen Fall untersucht: er hat eine sehr dicke Erdrinde (1400 km dick), eine dünne flüssige Schicht und einen absolut starren Kern angenommen und doch gefunden, daß die Starrheit der Erdrinde noch ungefähr fünfmal so groß sein müßte wie die Starrheit des Stahles. Unter minder günstigen Annahmen, d. h. bei einem etwas nachgebenden Kern, oder bei einer dickeren flüssigen Schicht, oder bei einer dünneren Erdrinde**) müßte die Starrheit dieser letzteren noch größer sein. Es ist aber klar, daß man die Starrheit der Erdrinde nicht ins Unendliche wachsen lassen kann.

Nebenbei sei bemerkt, daß die Rechnung Loves, wie er selbst hervorhebt, sich nicht der Annahme widersetzt, daß große lavaerfüllte Behälter sich unter der Lithosphäre befinden, nur müssen sie begrenzt sein und keine zusammenhängende Schicht bilden.

§ 7. Die Deformationen infolge Massentransportes durch Denudation und Ablagerung.

Die Sonnenenergie erhält Atmosphäre und Meere in steter Bewegung, sie verdampft das Wasser und führt es mit den Winden über weite Strecken; ohne Sonnenenergie würde kein Regen

---

*) Love, The Yielding of the Earth to Disturbing Forces. Monthly Notices R. A. S, Bd. LXIX, S. 479.

**) Für die Theorie der Gebirgsbildung würde eine Erdrinde von 1400 km Dicke entschieden zu dick sein.

fallen und keine Flüsse würden dem Meere Wasser zuführen. Der stetige Zufluß der Sonnenenergie ist die Grundursache der Erosion und der Denudation; das Regenwasser spült die Gehänge ab und die Flüsse führen das abgeschwemmte Material dem Meere zu.

Die chemische und mechanische Verwitterung steht der Denudation zur Seite. In kalten Klimaten werden die Gesteine von der Oberfläche aus durch das frierende Wasser zerkleinert: das Wasser dringt in die kleinsten Poren und Spalten des Gesteins ein, und wenn es im Winter zu Eis wird, dehnt es sich aus und zersprengt das Gestein. In den Wüsten wieder werden die Gesteine durch die Sonnenhitze zerbröckelt. Die Amplitude der täglichen Temperaturschwankung zwischen Tag und Nacht ist sehr groß; tagsüber dehnt sich die Oberflächenschicht stark aus, in der Nacht zieht sie sich stark zusammen, das Gestein kann diese abwechselnde Ausdehnung und Zusammenziehung nicht aushalten, es bilden sich zahlreiche feine Sprünge und der Fels bröckelt ab. Oft wird der Fels durch Baumwurzeln, die in eine Spalte eingedrungen, dann gewachsen und dicker geworden sind, gesprengt. Die chemische Verwitterung beruht hauptsächlich auf der Umwandlung der Silikate in Karbonate und freie Oxyde, als „residuum" bleiben kieselärmere Hydrosilikate, die in der Regel weich und lose sind und sich leicht abspülen lassen. Auch Mikroorganismen: Bakterien, haben einen Anteil an der Verwitterung, aber das sind Einzelheiten, auf die wir nicht einzugehen brauchen.

Beinahe alles, was die chemische und mechanische Verwitterung vom anstehenden Fels losgerissen hat, was das Regenwasser abgespült hat, wird von höheren nach tiefer gelegenen Orten hinunterbefördert. Wir haben „beinahe" gesagt, denn einen Teil des feinsten Detritus befördert der Wind als Staub auch von niederen nach höheren Orten. Nach Penck führt die Denudation jährlich ungefähr 20 Kubikkilometer Gestein weg. Nicht alles, was, sagen wir, im laufenden Jahre vom Fels weggerissen wurde, gelangt noch im selben Jahre ins Meer oder in abflußlose Seen; viel Material bleibt unterwegs zurück oder befindet sich noch auf der Wanderung, aber statt dessen gelangt Material aus früheren Jahren in das Meer. Im großen und ganzen wird jahraus jahrein ein der Denudation gleicher Betrag im Meere und in abflußlosen Seen abgesetzt.

Es gibt Gebiete, in denen Denudation und Akkumulation einander beinahe die Wage halten, andere, in denen ein Prozeß über-

wiegt, aber an sich unbedeutend ist, und wieder andere, in denen Denudation oder Akkumulation nicht nur vorherrscht, sondern sogar zu besonderer Intensität gelangt. Eine sehr intensive Denudation trifft man im Gebirge: hier sind die Regengüsse stärker, die Abhänge steiler und die Energie des abspülenden Wassers ist viel größer als in Ebenen, wo die Erosion oft praktisch auf Null sinkt oder der Akkumulation Platz macht. Eine intensive Akkumulation ist auch lokalisiert: viel Detritus wird in gewissen Seen und Tälern, ferner im Meere, aber nicht sehr weit von der Küste abgesetzt. Kontinentale Ablagerungen erstrecken sich beinahe nirgends weiter als bis zu 300 km von der Küste. In den zentralen Gebieten der Ozeane bilden sich Tiefseeablagerungen: Globigerinen- und Diatomeenschlamm und roter Ton, wo neben den Gehäusen der Foraminiferen und Diatomeen, neben vereinzelten Meteoriten, neben Ohrknochen der Delphine und Haifischzähnen nur geringe Mengen von vulkanischem und sonstigem irdischen Staub zu finden sind.

Es gibt also auf der Erde Orte, wo sich intensiv neue Ablagerungen bilden, und andere, wo die Denudation rasch fortschreitet. An den ersteren nimmt der Druck auf tiefere Schichten zu, in den zweiten nimmt er ab. Diese Druckänderungen müssen Deformationen verursachen. Damit keine Deformationen eintreten, müßte die Erde unendlich starr und unendlich inkompressibel sein; aber unendlich starre und unendlich inkompressible Körper gibt es in der Natur nicht, und es kann sich nur um die Größe der Deformationen handeln, welche infolge von Massenverlagerungen durch Denudation und Akkumulation entstehen.

Es sind zahlreiche, oft Tausende von Metern mächtige Schichtenkomplexe bekannt, die unzweifelhaft in einem seichten Meere abgelagert wurden. Man kann sich vorstellen, daß die Senkung des alten Meeresbodens mit der Ablagerung nahezu gleichen Schritt gehalten hat, so daß die Oberfläche der abgelagerten Schichten, d. i. der neue Meeresboden, sich beständig in einer geringen Tiefe befand. Doch bleibt ein Zweifel übrig: man weiß nicht, was Ursache und was Folge war. Man kann sagen, daß der alte Meeresboden unter dem wachsenden Drucke der Ablagerungen sank, aber man kann auch sagen, daß irgendeine andere, von der Ablagerung unabhängige Ursache die (langsame) Bildung einer Senkung herbeiführte, daß Flüsse ihren Lauf nach der Senkung hin nahmen und Sinkstoff zuführten, aus dem sich nun die Ablagerungen bildeten.

Nicht so zweideutig sind gewisse Erscheinungen, die in ehemals vereisten Gebieten beobachtet werden.

Es ist bekannt, daß während der Eiszeit das Meer an den Küsten vereister Länder relativ höher stand als heutzutage, obgleich die Wassermenge im Meere um das ganze in den Gletschern gebundene Wasser geringer war als jetzt. Man hat versucht, die Verschiebung der Küsten durch die Attraktion der Eismassen zu erklären, aber die Rechnung*) hat gezeigt, daß diese Hypothese hinfällig ist, denn man müßte dem Eise eine unmögliche Mächtigkeit zuschreiben. Nimmt man aber an, daß nicht das Meer gestiegen, sondern das Land unter der Last des Eises gesunken ist, so erklärt sich die Küstenverschiebung ganz ungezwungen.

Die besten und verläßlichsten Daten bezüglich der eiszeitlichen Küstenverschiebungen besitzen wir für Skandinavien, wo die Höhe der Meeresspuren über dem heutigen Meeresspiegel geodätisch gemessen wurde. Die höchsten Spuren des Meeres**) befinden sich in Schweden, 80 km von der nordwestlichen Ecke des Bottnischen Busens, in einer Höhe von 280 m. In Nordamerika finden sich auch zahlreiche Spuren des eiszeitlichen Meeres, nach Warren Upham***) bis zur Höhe von 500 m, aber diese Zahl ist weniger sicher als diejenige, die wir soeben von Skandinavien zitiert haben.

§ 8. Isostatische Deformationen.

Im letzten Abschnitt haben wir gesagt, daß Massenverlagerungen infolge Denudation und Akkumulation unbedingt gewisse Deformationen nach sich ziehen müssen. Ohne Kenntnis der physischen Eigenschaften der Erde lassen sich jedoch diese Deformationen nicht berechnen, und das einzige, was wir tun können, ist, von gewissen willkürlichen Hypothesen auszugehen und die Konsequenzen derselben mit Tatsachen zu vergleichen, um aus dem Vergleich umgekehrt auf die Eigenschaften der Erde zu schließen.

---

*) Vergl. Hergesell, Über die Änderung der Gleichgewichtsflächen der Erde. Beiträge zur Geophysik, I. Bd.; E. Drygalski, Geoiddeformationen zur Eiszeit. Berlin 1887; R. S. Woodward, Bull. U. S. Geological Survey, Nr. 48.

**) De Geer, Om den senkvartära landhöjningen . . . Geologiska Förenings Förhandlingar, Bd. 20 (1898).

***) Warren Upham, The glacial lake Agassiz. XXV. Monograph U. S. Geol. Survey, S. 505—506.

Die erste Hypothese, die wir betrachten werden, ist die Hypothese der Isostasie. Den Namen, nicht den Begriff — denn schon bei Pratt und Airy finden wir ähnliche Ideen — hat C. E. Dutton eingeführt, um eine spezielle Vorstellung von der Konstitution der Erde, nach welcher ein stetiges Streben zur Herstellung hydrostatischen Gleichgewichtes besteht, zu bezeichnen. Daß diese Vorstellung auf einem richtigen Prinzip beruht, ist zweifellos. Schon im vierten Kapitel (§ 7) haben wir hervorgehoben, daß Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewichte Drucke und Spannungen hervorrufen, die im allgemeinen bestrebt sind, diese Abweichungen aufzuheben. Auf etwaige Ausnahmen und Beschränkungen brauchen wir nicht einzugehen. — Die beinahe sicher existierende, obwohl wahrscheinlich sehr rohe Kompensation der Gebirge und Kontinente durch Dichtedefekte und der Ozeane durch Dichteüberschüsse (vergl. zweites Kapitel, § 8) darf als eine wichtige empirische Stütze der isostatischen Hypothese bezeichnet werden, da sie nämlich beweist, daß das Streben nach Gleichgewicht, wenn auch nur teilweise und roh, doch realisiert ist.

In seiner Abhandlung über die Gestalt der Erde und die Isostasie hat Hayford*) angenommen, daß unterhalb der Kompensationsfläche Gleichgewicht herrscht; jede Niveaufläche ist zugleich Fläche konstanten Druckes und konstanter Dichte; oberhalb der Kompensationsfläche sind Dichte und Druck**) in demselben Niveau variabel. — Aus den Lotabweichungen in den Vereinigten Staaten hat Hayford als wahrscheinlichste Tiefe der Kompensationsfläche 113 km bekommen. Aber man darf dieser Zahl keine besondere Bedeutung beimessen, da sie von gewissen willkürlichen Annahmen abhängt. Sobald Hayford diese Annahme etwas modifizierte, bekam er andere Zahlen. So bekam er z. B., als er statt seiner ursprünglichen Hypothese diejenige Chamberlins einführte, statt 113 km mehr als doppelt so viel, nämlich 287 km.

Hier wollen wir zuerst die alte Hypothese Airys betrachten.

Wir wollen annehmen: 1. daß die Schichten dicht unter der Erdrinde so plastisch sind, daß sie sich wie eine dicke Flüssigkeit verhalten; 2) daß die Erdrinde entweder biegsam ist oder aber aus

---

*) Hayford, The Figure of the Earth and Isostasy. U. S. Coast and Geod. Survey. Washington 1909.

**) Eigentlich Drucke, denn in festen Körpern unterscheidet man sechs Drucke. Vergl. viertes Kapitel, § 2.

vertikal stehenden Prismen besteht, die gegeneinander verschiebbar sind.

Dann, inbesondere wenn es sich um langsame Deformationen handelt, können auf die Erde die Gesetze der Hydrostatik angegewandt werden. Dort, wo der Detritus sich absetzt, senkt sich die Erdkruste; dort, wo infolge von Denudation der Druck abnimmt, hebt sie sich in die Höhe. Die sinkenden Schollen pressen die innere Flüssigkeit hinaus, aber sie findet Raum unter den in die Höhe steigenden. Die Niveauflächen deformieren sich nur unbedeutend: ihre vertikale Verschiebung ist von derselben Größenordnung wie $\frac{D^2}{R}$, wo D die Mächtigkeit der abgelagerten bezw. abgetragenen Schicht und R den Erdradius (natürlich in denselben Längeneinheiten) bezeichnet, so daß im folgenden von den Deformationen der Niveauflächen ganz abgesehen werden kann.

Nehmen wir eins von den Prismen, aus welchen die Kruste unter dem Ozean besteht, und setzen wir voraus, daß auf dessen Oberfläche sich während der Zeit $t_1 - t_0$ eine Schicht von der Mächtigkeit D abgesetzt hat. Die Dichte der Ablagerungen sei ϱ_e, die Dichte der Erdrinde ϱ_s, die Mächtigkeit der Erdrinde H, die Dichte der Flüssigkeit unter der Erdrinde endlich ϱ_i, wobei $\varrho_i > \varrho_s$; die Dichte des Meerwassers kann man gleich Eins setzen.

Nehmen wir jetzt irgendeine Niveaufläche in der inneren Flüssigkeit. Die einzige Bedingung, welcher dieses Niveau, sagen wir, das Niveau A genügen muß, ist, daß es nirgends die Erdkruste schneide. Die Gesetze des Gleichgewichts verlangen, daß der Druck im Niveau A zur Zeit t_1 dem Drucke in demselben Niveau zur Zeit t_0 genau gleich ist. Diese beiden Drucke werden wir jetzt berechnen.

Es sei d_0 die Tiefe des Ozeans über unserem Prisma zur Zeit t_0, d_1 die Tiefe des Ozeans zur Zeit t_1, q_0 der Abstand des Prismenbodens vom Niveau A zur Zeit t_0 und q_1 der Abstand zur Zeit t_1. Wenn endlich, was bei solchen Überlegungen erlaubt ist, von den Variationen der Schwerkraft mit der Tiefe und mit der geographischen Breite abgesehen wird, so ist der hydrostatische Druck im Niveau A zur Zeit t_0:

$$g\,[d_0 + H\varrho_s + q_0\,\varrho_i]$$

und zur Zeit t_1:

$$g\,[d_1 + D\varrho_e + H\varrho_s + q_1\,\varrho_i],$$

worin g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet. Da die beiden Drucke einander gleich sein müssen, so erhält man:

$$d_1 - d_0 + \varrho_i(q_1 - q_0) + \varrho_e D = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 8$$

Dazu kommt die Bedingung, daß die Wassermenge im Meer ungeändert bleibe. Diese Bedingung drückt sich durch die Gleichung aus:

$$\int (d_1 - d_0)\, d\alpha = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9$$

worin $d\alpha$ ein Element der Erdoberfläche bezeichnet. Die Integration kann über die ganze Oberfläche der Erde ausgedehnt werden, denn d_0 verschwindet dort, wo zur Zeit t_0 Land war, und d_1 dort, wo zur Zeit t_1 sich Land befindet. Im allgemeinen sind die Grenzen des Weltmeeres zur Zeit t_1 von den Grenzen zur Zeit t_0 verschieden, in der Regel tritt nämlich eine Erweiterung des Meeres (Transgression) ein; hat sich aber das Areal des Ozeans nicht geändert, dann drückt die Gleichung 9 nichts anderes aus als die Konstanz der mittleren Tiefe des Weltmeeres. Ebenso bleibt die Masse der inneren Flüssigkeit konstant. Diese Bedingung führt zu der Gleichung:

$$\int \varrho_i (q_1 - q_0)\, d\alpha = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10$$

in welcher die Integration über die ganze Erdoberfläche (eigentlich über die ganze Fläche A) ausgedehnt werden soll. Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, daß $q_1 - q_0$ das Maß der vertikalen Verschiebung der Erdrinde gibt. Wo $q_1 - q_0 > 0$, hat sich die Erdrinde gehoben, wo $q_1 - q_0 < 0$, hat sie sich gesenkt.

Endlich ist die Masse des während der Zeit $t_1 - t_0$ abgelagerten Materials der Masse des abgewaschenen gleich. Daraus folgt:

$$\int \varrho D\, d\alpha = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11$$

Auch hier bezieht sich die Integration auf die ganze Erdoberfläche. Im Gebiete der Ablagerung ist $D > 0$, im Gebiete der Denudation ist $D < 0$; wo beide fehlen oder einander die Wage halten, ist $D = 0$. Die Höhe der Meeresoberfläche über dem Niveau A war zur Zeit t_0

$$q_0 + H + d_0$$

und zur Zeit t_1 ist sie

$$q_1 + H + D + d_1.$$

Die Differenz

$$\varepsilon = d_1 - d_0 + q_1 - q_0 + D \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12$$

ist nichts anderes als die vertikale Verschiebung der Meeresoberfläche. Auf dem Lande, wo $d_1 = d_0 = 0$, hat ε eine ähnliche Bedeutung, es repräsentiert die vertikale Verschiebung der physischen Oberfläche des Landes in bezug auf das Niveau A. Dasjenige, was wir unmittelbar beobachten können, sind Differenzen zwischen den ε auf dem Lande und den ε auf dem Meere.

Unter den Bedingungsgleichungen 9, 10 und 11 ist jede einzelne die einfache Konsequenz der beiden übrigen. Folglich haben wir zwei Gleichungen: 8 und 12 und zwei voneinander unabhängige, durch Integrale ausgedrückte Bedingungsgleichungen.

Um ein einfaches Beispiel der Anwendung dieser Gleichungen zu geben, nehmen wir an, daß das Gebiet, in welchem sich die Sedimente ablagern, im Verhältnis zum Gebiet des Weltmeeres eine geringe Ausdehnung hat, und fragen, wann die Oberfläche der Sedimente die Oberfläche des Wassers erreichen wird? Es ist klar, daß in diesem Augenblick $d_1 = 0$ ist, ferner daß dank der Annahme einer geringen Ausdehnung des Akkumulationsgebietes ε vernachlässigt werden kann. Dadurch reduzieren sich die Gleichungen 8 und 12 auf

$$\varrho_i (q_0 - q_1) = \varrho_e D - d_0,$$
$$q_0 - q_1 = D - d_0,$$

und es ergibt sich sofort:

$$D = \frac{\varrho_i - 1}{\varrho_i - \varrho_e} \cdot d_0, \qquad q_0 - q_1 = \frac{\varrho_e - 1}{\varrho_i - \varrho_e} \cdot d_0 = \frac{\varrho_e - 1}{\varrho_i - 1} \cdot D.$$

Mit $\varrho_e = \varrho_i$ wäre D unendlich geworden, und es könnten sich die Sedimente eine unendliche Zeit lang bis zur unendlichen Dicke ablagern, denn das Sinken des alten Meeresgrundes würde immer mit der Sedimentation gleichen Schritt halten. Wir wissen aber, daß die Dichte von oben nach unten zunimmt, und daß infolgedessen das Sinken des alten Meeresgrundes ein Ende haben muß. Die obigen Gleichungen geben uns die endgültige Dicke der Sedimente und den endgültigen Betrag der Senkung. Setzen wir z. B. $d_0 = 1$ km (d_0 bezeichnet die ursprüngliche Tiefe des Wassers) $\varrho_i = 3$, $\varrho_e = 2$, so erhalten wir

$$D = 2 \text{ km}, \qquad q_0 - q_1 = 1 \text{ km},$$

d. h. in dem Momente, wo die Sedimente die Oberfläche des Wassers erreicht haben, beträgt ihre Gesamtmächtigkeit 2 km und der alte Meeresboden hat sich um 1 km gesenkt. Als zweites Beispiel nehmen

wir noch, wie vorher, $d_0 = 1$ km, aber $\varrho_i = 2{,}7$ und $\varrho_e = 2{,}5$; dann ergibt sich:

$$D = 8{,}5 \text{ km}, \quad q_0 - q_1 = 7{,}5 \text{ km}.$$

Mit einem Wort, wenn die Dichte von oben nach unten wächst, muß das isostatische Sinken der Erdkruste in Akkumulationsgebieten ein Ende haben. Mutatis mutandis könnten wir eine ganz ähnliche Rechnung für ein von der Denudation betroffenes Gebiet durchführen. Wir hätten dann gefunden, daß ein erodiertes, abgetragenes Gebiet trotz isostatischer Hebung doch einmal eingeebnet werden kann. Freilich verläuft der Prozeß asymptotisch, und der Zeitpunkt, in dem Hebung und Einebnung absolut aufhören, liegt in unendlicher Ferne.

Diese Sätze sind allgemeiner als die extreme, spezielle Hypothese, aus welcher sie hier abgeleitet wurden. Sie können auch auf Grund allgemeinerer Voraussetzungen bewiesen werden. Freilich würden wir dann mit so einfachen Formeln nicht auskommen.

§ 9. Anwendung auf die Deformationen der Eiszeit. Hypothese eines elastischen Körpers.

Während der Eiszeit waren die Festländer von großen Gletschern bedeckt, die heute verschwunden sind. Wenn wir annehmen, daß die Zeit t_0 dem Maximum der Vereisung und die Zeit t_1 der Gegenwart entspricht, so wird das Schmelzen des Eises*) ein der Denudation analoger Prozeß sein. Von der gleichzeitigen gewöhnlichen Denudation wollen wir ganz absehen, folglich werden wir auf dem Festlande nur dort $D = 0$ setzen, wo keine Gletscher während der Eiszeit existierten und wo sie auch jetzt fehlen. Wo während der Eiszeit das Land vereist war, aber jetzt keine Gletscher vorhanden sind, wird $-D$ die Dicke des Eises während der maximalen Vereisung bedeuten; wo die Gletscher an Mächtigkeit eingebüßt haben, aber noch nicht ganz verschwunden sind, wird $-D$ die Differenz zwischen der Mächtigkeit während der Eiszeit und der heutigen Mächtigkeit bezeichnen. Das Minuszeichen schreiben wir deswegen, weil nach dem im letzten Abschnitt getroffenen Übereinkommen die Dicke einer abgelagerten Schicht als eine positive, die Dicke einer abgetragenen Schicht bezw. die Dicke des geschmolzenen Eises

*) Damit will der Verfasser nicht sagen, daß das Schmelzen der eiszeitlichen Gletscher noch fortdauert. Ebenso ist er weit entfernt davon, irgendwelche Voraussetzungen über die Anzahl der Eiszeiten zu machen.

als eine negative Größe aufgefaßt werden soll. Es sei $-\overline{D_e}$ die mittlere Mächtigkeit des Eises zur Eiszeit, α_e die von den Gletschern zur Eiszeit bedeckte Oberfläche, α_m die Oberfläche des Weltmeeres. Ein Volumen Eis von $-\alpha_e \overline{D_e}$ ist einem Volumen Wasser von $-\varrho_e \alpha_e \overline{D_e}$ äquivalent. Folglich bildete sich nach der Eisschmelze eine Schicht Wasser auf dem Meere, deren Mächtigkeit*) D_m durch die Gleichung

$$D_m = -\varrho_e \frac{\alpha_e}{\alpha_m} \overline{D_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

gegeben ist. Gleichung 13 ist gleichbedeutend mit Gleichung 11; der Unterschied besteht nur darin, daß hier die Differenz zwischen der Dichte des Eises und der Dichte des Wassers berücksichtigt wurde. Da wir das von der Eisschmelze herrührende Wasser schon in Rechnung gezogen haben und die Menge des übrigen Wassers unverändert geblieben ist, so bleibt die Bedingungsgleichung 9 bestehen. Aus naheliegenden Gründen können wir einfach annehmen, daß die Tiefe dieses übrigen Wassers sich nicht verändert hat und setzen:

$$d_1 - d_0 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14$$

Jetzt ist die Bedingungsgleichung 9 erfüllt und Gleichung 8 reduziert sich auf dem Meere mit Berücksichtigung von 13 auf:

$$\varrho_i (q_1 - q_0) - \varrho_e \frac{\alpha_e}{\alpha_m} \cdot \overline{D_e} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

und auf dem Lande auf:

$$\varrho_i (q_1 - q_0) + \varrho_e D_e = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

Ebenso reduziert sich Gleichung 12 auf dem Meere mit Berücksichtigung von 13 und 14 und nach Einsetzen von $q_1 - q_0$ aus Gleichung 15 auf:

$$\varepsilon_m = \frac{\alpha_e}{\alpha_m} \left(\frac{\varrho_e}{\varrho_i} - \varrho_e \right) \overline{D_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

und auf dem Festlande unter Beachtung von 16 auf:

$$\varepsilon_e = \left(1 - \frac{\varrho_e}{\varrho_i} \right) D_e . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18$$

ε_e ist aber die Differenz zwischen der gegenwärtigen Höhe der Landoberfläche und der damaligen Oberfläche des Eises, während für uns die Differenz zwischen der gegenwärtigen und der

*) Die Mächtigkeit dieser Schicht ist eine positive Größe, weil die Addition eines Volumens Wasser zum Meere einer Akkumulation des Sedimentes äquivalent ist.

damaligen Höhe der Landoberfläche von Interesse ist. Die Oberfläche des Landes war um D_e niedriger als die Eisoberfläche. Bezeichnet man die Höhe des Landes mit η, so ist:

$$\eta = \varepsilon_e - D_e = q_1 - q_0 = -\frac{\varrho_e}{\varrho_i} D_e. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

Weder ε_m noch η können wir unmittelbar messen; das, was wir messen können, ist die Verschiebung des Meeresspiegels relativ zur Landoberfläche, welche sich durch die Differenz*):

$$\eta - \varepsilon_m = -\frac{\varrho_e}{\varrho_i} D_e - \frac{\alpha_e}{\alpha_m}\left(\frac{\varrho_e}{\varrho_i} - \varrho_e\right) \cdot \overline{D}_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20$$

ausdrückt, wobei man sich daran erinnern muß, daß D_e und $\overline{D}_e$ negative Größen sind.

Wir wollen jetzt Zahlen in die Formel 20 einsetzen. Nach Heß bedecken: das antarktische Eis**) ungefähr 13 Mill. qkm, das grönländische Inlandeis 1,9 Mill. qkm und die Gletscher des nordamerikanischen Archipels 0,1 Mill. qkm. Nach Berghaus' Atlas bedeckte das europäische Inlandeis während der Eiszeit 2,8 Mill. qkm und das nordamerikanische 11,9 Mill. qkm, für kleinere Gletscher setzen wir noch 0,1 Mill. qkm hinzu und finden, daß während der Eiszeit das Eis insgesamt 29,8 Mill. qkm bedeckte. Demgemäß setzen wir $\alpha_e = 29{,}8$ Mill. qkm, andererseits aber ist $\alpha_m = 361{,}1$ Mill. qkm; weiter setzen wir $\varrho_e = 0{,}9$, $\varrho_i = 3$ und erhalten:

$$\frac{\alpha_e}{\alpha_m} = 0{,}0825\ldots, \quad \frac{\varrho_e}{\varrho_i} = 0{,}3\ldots, \quad \frac{\alpha_e}{\alpha_m}\left(\varrho_e - \frac{\varrho_e}{\varrho_i}\right) = 0{,}0495\ldots$$

Nach Einsetzen dieser Werte in Gleichung 20 erhalten wir:

$$\eta - \varepsilon_m = -0{,}3\, D_e + 0{,}0495\, \overline{D}_e, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20'$$

wo $-D_e$ die lokale und $-\overline{D}_e$ die mittlere Mächtigkeit des geschmolzenen Eises bezeichnet. Im § 7 haben wir schon erwähnt, daß die Spuren des Meeres in Schweden bis 280 m hoch reichen; setzen

---

*) Das sind wesentlich dieselben Formeln wie die Formeln I, IV und V auf S. 182 und 183 des ersten Bandes der „Zeitschrift für Gletscherkunde" in der Abhandlung des Verfassers: „Über die Deformationen der Erde während der Eiszeit", nur die Symbole und die Vorzeichen sind etwas verschieden; was dort D_m hieß, heißt hier $-\overline{D}_e$, was dort mit a und a_1 bezeichnet war, wird hier mit α_e und α_m bezeichnet.

**) Heß, Die Gletscher, Braunschweig 1904, S. 114. Die erste dieser Zahlen beruht auf einer rohen Schätzung.

wir also $\eta - \varepsilon_m = 280$ m. Welchen Wert man für $-\overline{D}_e$ nehmen soll, läßt sich ohne gewisse willkürliche Hypothesen nicht entscheiden, aber glücklicherweise hat das Glied, welches $-\overline{D}_e$ enthält, einen sechsmal so kleinen Koeffizienten als das Glied mit $-D_e$, und dazu wird im vorliegenden Fall, wo für $\eta - \varepsilon_m$ ein großer Wert genommen wurde, $-\overline{D}_e$ wahrscheinlich kleiner sein als $-D_e$. Infolgedessen werden wir das Glied mit $-\overline{D}_e$ vernachlässigen und berechnen $-D_e$ aus der Gleichung:

$$-D_e = \frac{280}{0{,}3}\text{ m.}$$

Auf diese Weise ergibt sich die lokale Mächtigkeit des Eises zu 933 m. In Nordamerika reichen die Meeresspuren angeblich bis 500 m Höhe. Auf gleiche Weise wie vorher hätten wir hier als lokale Mächtigkeit des Eises 1667 m gefunden.

Unsere Rechnung war ziemlich roh, aber es lohnt sich nicht, eine große Exaktheit dort anzustreben, wo sichere Daten fehlen. Übrigens handelt es sich vor allem um die Größenordnung der lokalen Mächtigkeit des Eises. Diese haben wir geschätzt und mäßige, nicht unwahrscheinliche Zahlen gefunden. Wir können jetzt sagen, daß auch die maximale Mächtigkeit des Eises sich nicht durch Zehntausende, sondern höchtens durch einige Tausende von Metern ausgedrückt haben würde.

Jetzt verlassen wir die Hypothese von Airy und gehen zur Hypothese eines elastischen Körpers über. Auch bei einem elastischen Körper muß unter dem Eise eine Depression entstehen, während der Meeresboden sich etwas hebt. Dabei gibt es nur Kompressionen, Ausdehnungen, Scherungen und Verschiebungen, aber kein Hinüberströmen des Stoffes aus dem Gebiete, wo der Druck zugenommen hat zu dem Gebiete, wo er gefallen ist. Mit einer großen Kompressibilität und einer kleinen Starrheit könnten wir große, selbst den soeben beschriebenen gleichkommende Deformationen erhalten, aber nach den Ergebnissen des vierten und fünften Kapitels können wir nur eine sehr kleine Kompressibilität und große Starrheit voraussetzen. Mit der Starrheit des Stahles hätten wir gefunden, daß die Verschiebung der Küstenlinie um 280 m eine mittlere Mächtigkeit des Eises von mindestens 6—7 km erheischt. Dabei mag noch hervorgehoben werden, daß beim elastischen Körper nicht bloß die Mächtigkeit, sondern auch die Ausdehnung des Inlandeises groß sein muß, um eine namhafte Depression zu erzeugen.

Von zwei gleich mächtigen Gletschern erzeugt der ausgedehntere eine größere Depression.

Die Einzelheiten der Rechnung können wir übergehen; denn einerseits ist sie zu lang und zu kompliziert, andererseits nicht wichtig genug, um hier ausführlich angeführt zu werden.

Eine mittlere Eisdicke von über 7 km ist wenig wahrscheinlich. In norwegischen Tälern sieht man oft ungeschliffenen Fels oberhalb des geschliffenen. Ein 6—7 km dicker Eismantel hätte alles, Tal und Hochland, überflutet, ohne „*Nunatakers*“ übrig zu lassen. In den Alpen hat man gefunden, daß die höchsten Gipfel das Eis überragten, und gegenwärtig herrscht überhaupt unter den Glazialforschern die Meinung, daß die großen Gletscher der Eiszeit nirgends eine mit der Höhe des Himalaja oder der Anden vergleichbare Mächtigkeit erreichten.

Wir stoßen hier auf einen Gegensatz, der schon früher einmal zutage getreten ist. Während gewisse Erscheinungen, wie die Gezeitenreaktion und die Breitenvariation auf eine große Starrheit der Erde hinweisen, führt die Analyse der geologischen Deformationen zur Annahme einer gewissen Plastizität. Weitere Beispiele von Deformationen, welche für Plastizität sprechen, werden wir bald kennen lernen; jetzt wollen wir den genannten Gegensatz vom allgemeinen Standpunkte aus beleuchten. Aus mehreren Gründen ist man zu der Meinung berechtigt, daß der Gegensatz mehr in der Einseitigkeit unserer Theorien als in der Natur der Sache liegt. Um zu Zahlenwerten zu gelangen, sind wir einmal von der Theorie Airys, ein anderes Mal von der Theorie eines vollkommen elastischen Körpers ausgegangen, indes entspricht keine dieser Theorien den reellen Verhältnissen. Daß die Theorie Airys, wenn man sie buchstäblich versteht, nicht haltbar ist, haben wir schon in § 6 gesehen. Aber auch die Theorie des elastischen Körpers läßt nur eine beschränkte Anwendung zu, denn sie bezieht sich, wie im fünften Kapitel dargelegt wurde, auf einen idealen Körper, welchem gewisse reelle Körper, wie Stahl oder Elfenbein, sich innerhalb gewisser Druck- und Temperaturgrenzen nähern. Die Körper, welche die Natur geschaffen hat, zeigen unter verschiedenen Umständen verschiedene Eigenschaften, sie sind nicht so einfach wie ein idealer Körper der Elastizitätstheorie. Viele Körper verhalten sich ganz anders bei raschen als bei langsamen Deformationen. Nun sind diejenigen Deformationen, bei denen die Erde sich wie ein starrer Körper verhält, relativ rasch — die Periode der Breitenvariation beträgt

ungefähr 14 Monate, die Perioden der Gezeiten sind noch viel kürzer — während geologische Deformationen, bei denen die Erde eine gewisse Plastizität aufweist, äußerst langsam vor sich gehen. In diesem Unterschied der Zeitverhältnisse liegt auch der Schlüssel des Rätsels.

§ 10. Plastizität. Elastische Nachwirkung.

In ehemals vereisten Gebieten hat die Hebung noch nicht aufgehört. Skandinavien steigt um ungefähr einen Meter in hundert Jahren. Lokal geht diese Bewegung langsamer oder rascher vor sich; am raschesten steigt die Gegend am Nordwestgestade des Bottnischen Busens. Ebenso hebt sich in Nordamerika die Umgebung der Hudson-Bai. Das Nordgestade der großen kanadischen Seen hebt sich relativ zum Südgestade und die Seen fließen langsam nach Süden ab. Amerikanische Geologen sehen voraus, daß in zweitausend Jahren der Michigansee sich durch den Illinoisfluß in den Mississipi ergießen wird. Schon früher, bereits in einigen hundert Jahren, wird die Stadt Chicago durch Dämme vor Überschwemmung zu schützen sein. Die Hebung dauert fort*), obwohl das Eis bereits seit Jahrtausenden verschwunden ist. Als weiterer Beweis der Verspätung in der Hebung des Landes kann die große Höhe der Meeresspuren gelten. Die Mächtigkeit des Eises am Rande kann nicht besonders groß gewesen sein. Das grönländische Inlandeis ist am Rande nur etliche 30, 40 m dick. Angesichts dessen kann man keine besonders große Senkungen unter den peripherischen Partien des Eises erwarten. Sie bildeten sich gewiß unter dem zentralen Teil des Inlandeises und die heutige Lage der höchsten Meeresspuren bestätigt diese Vermutung. Das Meerwasser konnte aber schwerlich dorthin gelangen, während das Eis noch da war. Viel natürlicher ist es, anzunehmen, daß das Wasser in die Senkungen schon nach oder höchstens während der Eisschmelze gelangte. Auf diese Weise werden wir wieder zu dem Schluß geführt, daß die Hebung sich im Verhältnis zur Eisschmelze verspätet hat. Das beweist aber, daß in den eiszeitlichen Deformationen die Erde sich nicht so verhielt und auch heute nicht so verhält wie ein vollkommen elastischer Körper. Die Eisschmelze war jedenfalls ein

*) Im vorigen Abschnitt wurde das Fortdauern der Hebung nicht berücksichtigt, um die Sache nicht zu komplizieren. Es ist klar, daß die Resultate erst recht bestehen bleiben, wenn man den Umstand, daß die Hebung noch nicht beendet ist, in Rechnung zieht.

äußerst langsamer Prozeß. Ihre Dauer darf man nach Jahrtausenden*) rechnen. Bei einem sehr elastischen, dem Ideale der Theorie nahe kommenden Körper hätte gewiß die Hebung mit der Eisschmelze gleichen Schritt gehalten. Ebendasselbe sollte man erwarten, wenn im Sinne der Hypothesen Airys unter einer dünnen Erdrinde sich eine flüssige, sagen wir genauer eine leichtflüssige, Schicht befände. Indes hat sich die Hebung verspätet und man muß eine Erklärung für diese Verspätung suchen. Sie erklärt sich ungezwungen durch die Annahme, daß die Erde, oder wenigstens diejenigen Schichten, welche sich dicht unter der oberflächlichen, der geologischen Forschung unmittelbar zugänglichen Schicht befinden, eine gewisse, wenn auch geringe Plastizität besitzen. Um an einem Vergleichsobjekte zu zeigen, um welche Eigenschaft es sich handelt, nehmen wir das Gletschereis. Raschen Deformationen gegenüber zeigt es sich hart, spröde und brüchig, bei langsamen gibt es nach, ja in Gletschern fließt es wie eine zähe Flüssigkeit. Etwas Ähnliches brauchen wir zur Erklärung eiszeitlicher und anderer Deformationen der Erde.

Wir müssen aber etwas weiter ausholen und die Frage vom allgemeineren Standpunkte auffassen. Nach der klassischen Elastizitätstheorie ist die Deformation eines festen Körpers konstant, wenn der Druck konstant ist. Nur wenige reelle Körper verhalten sich so, wie die Theorie vorschreibt; streng genommen weichen alle mehr oder weniger vom Ideal ab. An den meisten reellen Körpern kann man beobachten, daß die Deformation sich vergrößert, obgleich die äußere deformierende Kraft konstant bleibt. Die elastische Kraft, mit welcher der Körper der deformierenden Kraft widersteht, nimmt mit der Zeit ab. Die Zeit, nach welcher die Widerstandskraft bis auf $1/e$**) ihres anfänglichen Wertes fällt, nennt man nach dem Vorgang Maxwells Relaxationszeit. Ein Körper ist um so plastischer, je kleiner die Relaxationszeit. Nach der kinetischen Theorie***) darf man annehmen, daß alle Körper

*) Nach Pencks Schätzung sind seit dem letzten namhaften Halt in der Schmelze alpiner Gletscher (Daun-Stadium) ungefähr 7000, seit dem Höhepunkt der letzten großen Eiszeit (Würm-Eiszeit) ungefähr 40000 Jahre verflossen. Diese Zahlen sind zunächst für die Alpen maßgebend, aber sie geben eine gute Idee davon, was man anderswo zu erwarten hat.

**) Hier bedeutet e die Basis natürlicher Logarithmen, folglich

$$e = 2{,}71828\ldots \quad 1/e = 0{,}3678\ldots$$

***) M. Smoluchowski, Einige Bemerkungen über die physischen Grundlagen der Theorie der Gebirgsbildung. Kosmos (Lemberg), Bd. XXXIV, S. 567 ff.

bis zu einem gewissen Grade plastisch sind und daß die Unterschiede quantitativer Natur sind. Freilich besitzen bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck verschiedene Körper sehr verschiedene Relaxationszeiten. Für Stahl beträgt die Relaxationszeit vielleicht einige Jahrhunderte, für Wachs, Paraffin usw. ist sie so klein, daß die Bestimmung elastischer Konstanten mit gewöhnlichen statischen Methoden schwerlich gelingt. Körper erster Art werden hochelastisch, solche zweiter Art weich genannt. Die Plastizität scheint in einigen Fällen von der Größe der deformierenden Kraft abhängig zu sein: sie ist größer und die Relaxationszeit kleiner, wenn die Kraft größer ist. Den größten Einfluß auf die Plastizität aber hat die Temperatur; die Plastizität nimmt nämlich mit der Temperatur zu. Glas, bei gewöhnlichen Temperaturen so spröde und brüchig, zeigt sich oberhalb 300° C deutlich plastisch (Größenordnung der Relaxationszeit zirka ein Tag). Man kann auch über die Zunahme der Plastizität aus der Abnahme der Koeffizienten der inneren Reibung urteilen. Für Glas bei hohen Temperaturen haben Trouton und Andrews folgende Werte dieses Koeffizienten gefunden:

bei	575° C	$1{,}1 \times 10^{13}$	C. G. S.-Einheiten*)	
„	660° „	$2{,}3 \times 10^{11}$	„	„
„	710° „	$4{,}5 \times 10^{10}$	„	„

Zum Vergleich führen wir an, daß derselbe Koeffizient für Pech bei 6° den Wert $2{,}2 \times 10^9$ und bei 12° den Wert $2{,}5 \times 10^8$ hat.

Mikroskopische Untersuchungen Ewings, Rosenhains und anderer haben dargetan, daß die Plastizität der Metalle auf unzähligen mikroskopischen diskontinuierlichen und irreversiblen Deformationen innerhalb der Kristalle des Metalles beruht. Metalle zeigen unter dem Mikroskop eine ganz ähnliche Struktur wie Gesteine, nur hat hier alles viel kleinere Dimensionen wie dort; was bei Gesteinen mit bloßem Auge sichtbar ist, das sieht man im Metall nur unter dem Mikroskop. Metalle sind Konglomerate von Kristallkörnern, deren Größe von der Natur des Metalles und verschiedenen anderen Bedingungen abhängt. Das plastische Nachgeben eines deformierten Metalles beruht auf unzähligen kleinen Gleitungen innerhalb der Kristalle. Die Gleitflächen stehen in bestimmten Verhältnissen zu den Hauptachsen der Kristalle. Die Plastizität

*) loc. cit. S. 570.

des Eises beruht ebenfalls auf dem Gleiten dünner Blättchen innerhalb der Eiskristalle; Verschiebungen der ganzen Gletscherkörner gegeneinander scheinen mitzuwirken. Näheres darüber werden wir im dreizehnten Kapitel sagen, hier wollen wir nur noch betonen, daß alle diese Deformationen durch höhere Temperatur begünstigt werden. — Daß ähnliche Erscheinungen bei Gesteinen wahrscheinlich sind, ist klar. Sie führen uns zu den Erscheinungen der Pseudo- oder Quasiplastizität, welche bei Körpern, die unter einem sehr großen Druck deformiert werden, auftreten können.

Es wird jetzt allgemein zugegeben, daß ein allseitiger, nach allen Richtungen gleicher, d. h. hydrostatischer Druck nur eine Kompression erzeugen kann. Einen solchen Druck brauchen wir nicht, wir brauchen einen nach allen Richtungen großen, aber ungleichen Druck. Obgleich, wie in § 2 des vierten Kapitels hervorgehoben wurde, die Verhältnisse: $\frac{p_{xx} - p_m}{p_m}$ usw. mit der Tiefe wahrscheinlich abnehmen, können die Differenzen $p_{xx} - p_m$ hinreichend große Werte erreichen, ehe sie die Elastizitätsgrenzen der Gesteine überschreiten. Die Gesteine brechen, aber unter allseitigem großen Druck können die Spalten nicht offen bleiben, sie werden sofort geschlossen und wahrscheinlich zusammengeschweißt. Die bekannten Experimente Springs über das Zusammenschweißen des Pulvers durch Druck zu einem festen Körper rechtfertigen diese Behauptung. Hydrochemische Prozesse können dabei mitwirken. Durch mehrmals wiederholtes Brechen und Zusammenschweißen kann eine Deformation erzeugt werden, die äußerlich sich vom Fließen gar nicht unterscheidet. Nur wird das Gestein, welches eine solche Deformation durchgemacht hat, unter dem Mikroskop zahlreiche sehr feine Sprünge zeigen. Auf solche Vorgänge hat schon Gümbel seinerzeit hingewiesen.

Die Frage, ob unter den oberflächlichen Schichten sich ein plastischer oder ein pseudoplastischer Stoff befindet, ist von sekundärer Bedeutung; wichtig ist, daß Bedingungen für das Auftreten der Plastizität (hohe Temperatur) und Pseudoplastizität (großer Druck) vorhanden sind. Übrigens läßt sich eine genaue Grenze zwischen Plastizität und Pseudoplastizität, speziell zwischen plastischen und pseudoplastischen Deformationen, kaum ziehen. Der Einfachheit wegen werden wir fernerhin nur von plastischen Deformationen sprechen, wobei wir aber ausdrücklich betonen, daß auch pseudoplastische damit gemeint sind.

Wie muß nun in der Hypothese der Plastizität eine durch die Last von Inlandeis verursachte Deformation verlaufen? Nehmen wir an, daß das Inlandeis sich während einer Zeit T_1 allmählich bildet, dann während der Zeit T_2 stationär bleibt und während der Zeit T_3 allmählich schmilzt. Natürlich muß man sich denken, daß alle drei Zeitspannen sehr lang sind, z. B. je mehrere Jahrtausende umfassen. Bei einer vollkommen elastischen Erde würde die Deformation während der Zeit T_1 wachsen, während der Zeit T_2 stationär bleiben und während der Zeit T_3 wieder abnehmen, so daß nach beendeter Eisschmelze keine Spur von Deformation übrig bliebe. Bei einer plastischen Erde dagegen wächst die Deformation während der Zeit T_1, aber schon gegen das Ende dieser Zeit wird sie einen größeren Betrag erreichen, als im Falle vollkommener Elastizität. Betrachten wir nun die Zeit T_2, während welcher das Inlandeis stationär bleibt; die Deformation wächst trotzdem weiter und, wenn die Zeit T_2 lange genug dauert, so kann sie den Betrag einer hydrostatischen Deformation erreichen, d. h. sie kann jenen im vorigen Abschnitt beschriebenen Zustand erreichen, in welchem die Bedingungen des hydrostatischen Gleichgewichts erfüllt sind. Erst jetzt tritt ein Stillstand ein. Betrachten wir endlich die Zeit T_3: das Eis schmilzt und die Deformation nimmt ab, aber mit einer um so größeren Verspätung, je geringer die Plastizität ist. Da eigentlich die Abnahme der Deformation asymptotisch verlaufen muß, so ist streng genommen die zum Verschwinden ihrer letzten Spuren erforderliche Zeit unendlich lang. Unmerklich werden die Spuren der Deformation schon nach einer endlichen, obwohl sehr langen Zeit*). — Von diesem Standpunkte aus lassen sich die bedeutende Verschiebung der Strandlinien in der Eiszeit, die noch andauernde Hebung ehemals vergletscherter Länder und viele andere Erscheinungen erklären. Weiter werden wir sehen, daß die Plastizitätstheorie auch zu anderen Deformationen gut paßt.

§ 11. Sinkende und gehobene Schollen. Untersuchungen von de Marchi.

Wenn eine Scholle, die α qkm bedeckt, um h km sinkt, so bildet sie eine um $\frac{2\alpha h}{R} = 0{,}00031\,\alpha h$ qkm zu große Kalotte. Dank

*) Wohlverstanden ist das nur ein Beispiel. Es wird uns wahrscheinlich niemand zumuten, daß wir damit den wahren Verlauf einer eiszeitlichen Deformation mit all ihren Komplikationen darstellen wollten.

der Arbeit, welche die Schwerkraft über der sinkenden Scholle verrichtet, muß sie sich etwas erwärmen, aber während die ganze Arbeit der Schwerkraft leicht berechnet werden kann, ist derjenige Teil, welcher eine Temperaturerhöhung bewirkt, nicht so leicht zu finden, indem zahlreiche Nebenumstände, mechanische Wirkungen usw. dazwischentreten. Andererseits kommt die sinkende Scholle in ein Gebiet höherer Temperatur, und wir werden gewiß keinen großen Fehler begehen, wenn wir annehmen, daß die sinkende Scholle die der gegebenen Tiefe zugehörige Temperatur annimmt. Da die Temperatur in den oberen Schichten der Erdkruste ungefähr um 28,6° C auf jeden Kilometer zunimmt, so werden wir annehmen, daß die Temperatur der sinkenden Scholle um 28,6° C auf jeden Kilometer zunimmt. Mit demselben Linearkoeffizienten der Ausdehnung, der im sechsten Abschnitt angegeben wurde, nämlich 0,0000126 pro 1° C erhält man eine Ausdehnung um $0{,}00072\,\alpha h$. Folglich ist die Oberfläche der sinkenden Scholle um $(0{,}00072 + 0{,}00031)\,\alpha h = 0{,}00103\,\alpha h$ zu groß. Also selbst für $h = 10$ km, was gewiß keine kleine Senkung ist, werden wir finden, daß die Oberfläche der sinkenden Platte nur um 1 Proz. zu groß ist. Eine gewisse Kompression, eine kleine Biegung der Scholle und der umgebenden Schichten werden diesen Überschuß leicht kompensieren.

Aber es wird nur selten vorkommen, daß eine Scholle parallel zu sich selbst sinkt; meist wird sie in eine schiefe Stellung kommen. Dasselbe wird auch in der Regel bei einer gehobenen Scholle geschehen. Folglich brauchen geneigte Schichten nicht immer einen Überrest einer alten Falte darzustellen, es können auch bei einer Hebung resp. Senkung in geneigte Lage gekommene Schollen sein.

Die Hebung eines der Denudation ausgesetzten Gebietes kann in einer Weise, die an die Theorie L. v. Buchs erinnert, geschehen. Die Denudation ist nicht gleichmäßig, der Widerstand der Schichten und der Druck von unten sind auch an verschiedenen Orten verschieden. Infolgedessen werden sich gewisse Stellen finden, welche dem Druck von unten zuerst nachgeben, sich emporwölben und am First bersten. Auf diese Weise können sich offene Antiklinalen, in deren Mitte tiefere Schichten zutage treten, bilden. Ebenso werden wir finden, daß die Senkung im Ablagerungsgebiete zur Bildung einer vollständigen oder unvollständigen Synklinale führen kann. Überhaupt ist die Mannigfaltigkeit isostatischer und anderer Deformationen, die man sich denken kann, sehr groß: ein für alle Fälle passendes Schema läßt sich nicht aufstellen. Beinahe jeder

konkrete Fall erheischt eine eigene Erklärung. Einen solchen konkreten Fall werden wir als Beispiel anführen.

Der Bau des Krimgebirges, speziell des westlichen Teiles von Balaklava bis Sudak, sowie der Bau der angrenzenden Steppe läßt sich einfach erklären durch die Annahme, daß eine längliche Scholle sich einerseits senkte und andererseits hob. Genauer können wir diese Bewegung als eine Drehung um eine horizontale, nahezu von *SW* nach *NO* laufende Achse bezeichnen. Die Längsausdehnung der Scholle fällt auch in nahezu dieselbe Richtung. Gewiß war diese Drehung auch von einer Verbiegung der Scholle und anderen sekundären Deformationen begleitet, aber die maßgebende Bewegung war eine Drehung. Auf dem sinkenden nordwestlichen Flügel der Scholle setzten sich Sedimente ab und da die Bildung der Sedimente in dieselbe Zeit wie die Drehung fiel, so mußten sie an der Bewegung teilnehmen. Infolgedessen sind die älteren Schichten stärker, die jüngeren weniger geneigt. Es ist möglich, daß gerade die Ablagerung der Sedimente dieses Umkippen einer Scholle der Erdkruste verursachte. Der südöstliche Flügel der Scholle wurde infolge der Drehung in die Höhe gehoben und bildete den Gebirgskamm. Am Fuß desselben traten Laven aus und bildeten vulkanische Berge wie Ajudagh, Kastel und einige kleinere Lavavorkommnisse.

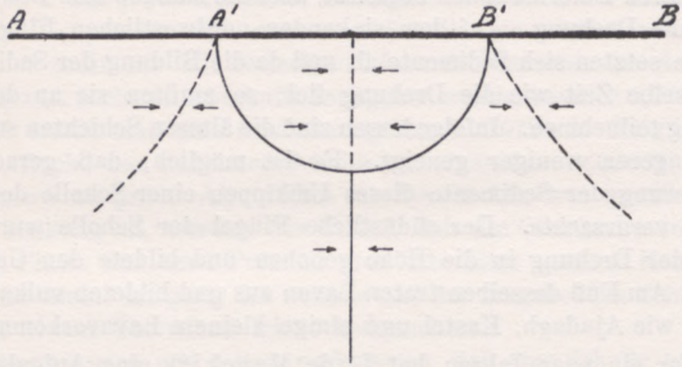
Vor ein paar Jahren hat L. de Marchi*) eine Aufgabe, die sich auf hier behandelte Fragen bezieht, betrachtet. Auf Grund der Untersuchungen von Cerruti und Boussinesq leitet de Marchi Formeln ab zur Berechnung der Verrückungen und der Drucke innerhalb eines homogenen und isotropen, vollkommen elastischen Körpers, welcher den ganzen Raum unterhalb einer unendlich ausgedehnten horizontalen Ebene einnimmt, und zwar unter der Annahme, daß in der Oberfläche des Körpers in einem geradlinigen Streifen ein positiver vertikaler Druck und in einem zweiten, zum ersten parallelen Streifen ein vertikaler negativer Druck herrscht. Offenbar bezieht sich die Aufgabe auf die Wirkung der Ablagerung und Denudation. Sie gründet sich auf die Voraussetzung einer vollkommenen Elastizität, die wir oben als unzureichend verworfen haben. Nichtsdestoweniger bietet sie ein gewisses Interesse, da sie auf die ersten Stadien der Deformation, wenn das Fließen in der

*) L. de Marchi, Teoria elastica delle dislocazioni tectoniche. Rendiconti Accad. dei Lincei. Cl. mat. e fis. ser. 5, Bd. XVI, (1907), S. 384—395. Die Abhandlungen de Marchis sind wegen zahlreicher Fehler mit Vorsicht zu benutzen.

Tiefe noch nicht begonnen hat, angewandt werden kann und einige Einsicht in die Druckverteilung gewährt.

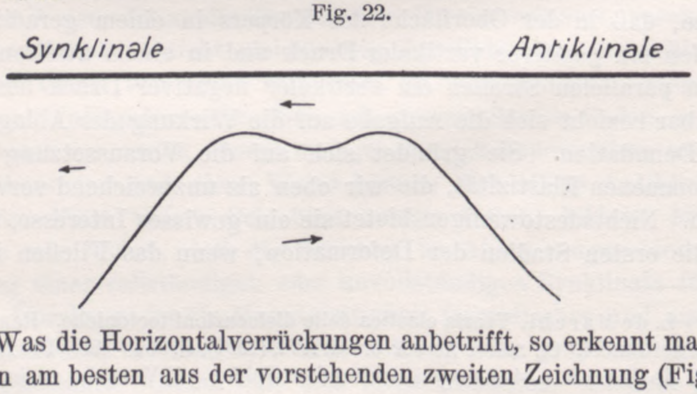
Unter dem ersten Streifen, wo die Ablagerung herrscht, bildet sich eine Geosynklinale, unter dem zweiten (Denudationsgebiet) eine Geoantiklinale. Die Diskussion der Formel, welche den Horizontaldruck gibt, zeigt, daß halbwegs zwischen den beiden Streifen sich leicht eine vertikale Spalte bilden kann. Der Stoff wird längs einer Vertikalebene und einer Walze auseinander gezogen, wie aus der Zeichnung (Fig. 21), welche einen zu den Achsen der Streifen

Fig. 21.



senkrechten Schnitt darstellt, ersichtlich ist. Andererseits ist der Vertikaldruck auf der Seite der Geosynklinale nach unten, auf der Seite der Geoantiklinale nach oben gerichtet, so daß sich eine vertikale Spalte mit Verwerfung bilden kann: der Flügel auf der Seite der Geosynklinale verschiebt sich nach unten, der andere nach oben.

Fig. 22.



Was die Horizontalverrückungen anbetrifft, so erkennt man dieselben am besten aus der vorstehenden zweiten Zeichnung (Fig. 22),

welche denselben Schnitt wie vorher darstellt. Die Pfeile geben die Richtung der Verrückung an. Die ausgezogene krumme Linie gibt den Ort an, in welchem die Verrückung verschwindet und in die entgegengesetzte übergeht. Man kann diese Zeichnung auch dahin interpretieren, daß die Pfeile die Richtung der beginnenden Strömung des Stoffes angeben.

In weiteren Abhandlungen*) versucht de Marchi seine Analyse auf die sogenannten Deckschollen *(nappes de charriage)* anzuwenden. Von den Deckschollen wird im nächsten Abschnitt die Rede sein. Hier bemerken wir nur, daß die Abhandlung de Marchis zwar einige richtige Bemerkungen enthält, aber im allgemeinen ihr Ziel verfehlt. Es ist einfach nicht möglich, eine solche Deformation mit den Mitteln der klassischen Elastizitätstheorie zu verfolgen.

§ 12. Faltung. Untersuchungen von M. Smoluchowski. Deckschollen.

Eine wichtige Kategorie der Deformationen sind Falten. Die Theorie ihrer Bildungsart hat M. Smoluchowski**) in einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung gegeben. Er betrachtet nur Falten, die sich auf der Erdoberfläche bilden. Die Grundannahme seiner Theorie ist, daß die Erdrinde auf den tieferen Schichten gleichsam schwimmt. Er stellt sich somit auf den Standpunkt der Theorie Airys oder, sagen wir allgemeiner, der Theorie der Isostasie. Ohne auf die Frage nach dem Ursprung der gebirgsbildenden Kräfte einzugehen, müssen wir zugeben, daß Falten ihre Entstehung in erster Linie der Wirkung horizontaler Druckkräfte verdanken. Infolgedessen kann das Problem so formuliert werden: Warum erzeugt ein Horizontaldruck eine Reihe von Falten? Die Antwort lautet: weil offenbar beim Vorhandensein eines Horizontaldruckes die Falten eine Stabilitätsform an sich darstellen. Umgekehrt müssen sich also die Abmessungen der Falten aus Stabilitätsbedingungen ergeben, wobei natürlich auch die Bedingung

---

*) L. de Marchi, Applicazioni geologiche usw. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. Cl. mat. e fis. ser. V, Bd. XVI, S. 499—507, und La teoria elastica dell'isostasi terrestre a. a. O. S. 910–916.

**) M. Smoluchowski, Über ein gewisses Stabilitätsproblem der Elastizitätslehre und dessen Beziehung zur Entstehung von Faltengebirgen. Anzeiger der Akad. Wiss. Krakau. Math.-naturw. Kl. 1909 (Juni), S. 3—20.

eingehalten werden muß, daß der Horizontaldruck pro Flächeneinheit die Druckfestigkeit des Gesteins nicht übersteige, da sonst Zermalmung eintreten würde.

Es zeigt sich, daß eine Gesteinsplatte nur Falten von geringer Ausdehnung bilden kann. Als Beispiel betrachtet Smoluchowski eine Sandsteinplatte. Er nimmt den Youngschen Modulus zu 800, die Druckfestigkeit zu 8 kg pro Quadratmillimeter*) an und setzt den „gebirgsbildenden Horizontaldruck“ seinem Grenzwerte gleich. Aus der Bernoulli-Kirchhoffschen Biegungsformel ergibt sich, daß die Dicke der Platte nur ungefähr 80 m und die Faltenbreite, d. i. der Abstand vom Kamm einer Antiklinale bis zum Kamm der nächsten, nur ungefähr 2100 m betragen kann**). Auf den ersten Blick erscheint also die Bildung großer Falten unmöglich. Aber die Anwendung der Bernoulli-Kirchhoffschen Biegungsformel setzt voraus, daß die Platte sich als kontinuierliches Ganzes etwa nach Fig. 23a verbiegt, während in Wirklichkeit in den Grenzflächen zwischen verschiedenen Gesteinsschichten sich regelmäßig eine Neigung zur Bildung von Spaltflächen und Gleiterscheinungen nach Fig. 23b kundgibt. Diese ist auch mechanisch leicht begreiflich, wenn man die Verteilung der Scherungskräfte (Tangentialdrucke, vergl. viertes Kapitel, § 2 und fünftes Kapitel, § 2, in der Figur durch Pfeile bezeichnet) berücksichtigt. Insbesondere tritt dies bei Einlagerung weicher Schichten zwischen härtere deutlich hervor.

„Haben wir es aber mit n voneinander unabhängigen, übereinander gelagerten Schichten von der Dicke h zu tun, welche unter Einwirkung der n Druckkräfte dieselbe Krümmung erhalten, so wird die potentielle Energie des Systems und ebenso die Arbeit der Druckkräfte n mal so groß, während die potentielle Energie der Schwerkraft unverändert bleibt. Daher wird sich eine jede dieser Schichten so verhalten, als ob nur der $n$te Teil der Schwerkraft wirksam wäre.“ Infolgedessen ändern sich die Formeln, und für

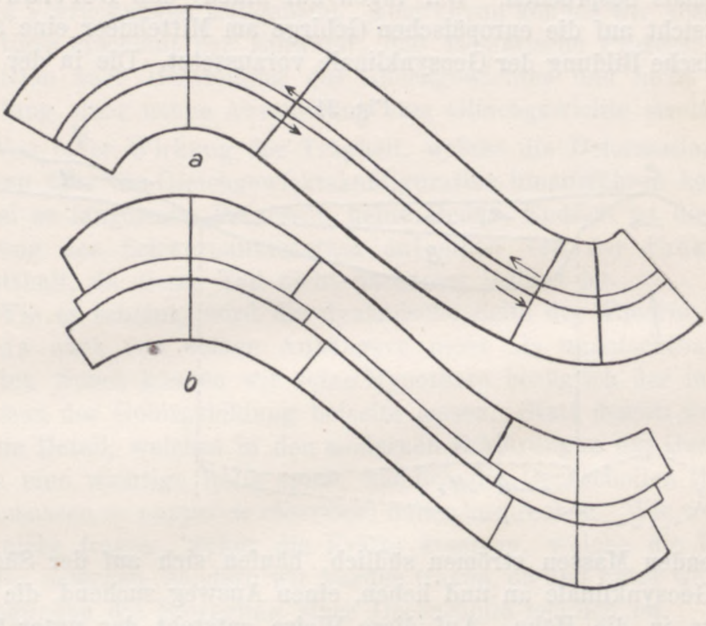
*) Um diese Werte in C. G. S.-Einheiten auszudrücken, muß man sie mit 981×10^5 multiplizieren. Der Youngsche Modul E berechnet sich dann zu $7{,}85 \times 10^{10}$. Man vergleiche diesen Wert mit dem Werte für Stahl (fünftes Kapitel, § 6).

**) Die Formel, auf der dieses Resultat beruht, wurde durch Versuche mit Gelatine und anderen Plättchen bestätigt. Vergl. M. Smoluchowski: Versuche über Faltungserscheinungen schwimmender elastischer Platten. Anzeiger Akad. Wiss. Krakau 1909, S. 727—734.

Sandstein von einer Gesamtdicke von 10 km erhält Smoluchowski eine Faltenbreite von 23,7 km, wobei der Sandstein selbst in untergeordnete Schichtenkomplexe zu je 930 m Dicke zerfällt. Die Bildung der Gleitflächen leitet somit ein und erleichtert die Faltenbildung.

Die Bildung von Gleitflächen und die Verschiebung der Schichten längs derselben geschieht sicher sprungweise und gibt Anlaß zu Erdbeben, deren Herd, obzwar dicht unter der Erdoberfläche gelegen, doch verborgen bleiben kann. Es ist nämlich wohl

Fig. 23.



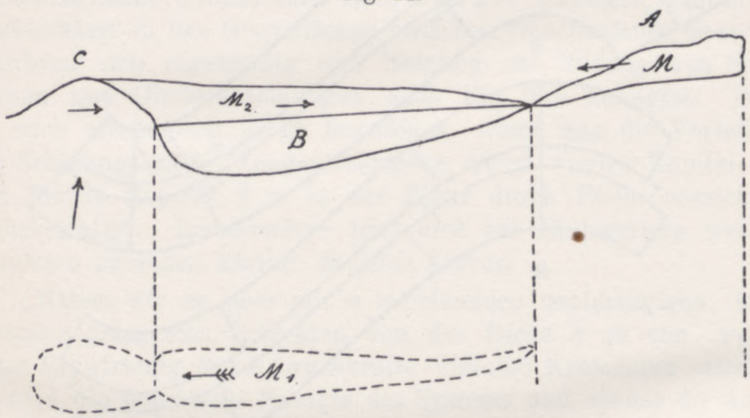
denkbar, daß eine Gleitfläche sich innerhalb eines Schichtenkomplexes bildet, ohne sich durch einen an die Erdoberfläche austretenden Riß zu verraten.

Denkt man sich zu den Falten Smoluchowskis noch weitere Deformationen, Brüche, Verwerfungen, Rutschungen usw. hinzu, so kann man einen recht komplizierten Gebirgsbau erhalten; doch die größten Knickungen, Kontorsionen, Auswalzungen können erst in der Tiefe zustande kommen. Wir werden dieselben im Zusammenhang mit der neuen Theorie der Gebirgsbildung besprechen.

Wir beginnen mit der Darstellung der Theorie der Schubmassen nach M. Bertrand. Bertrand*) geht von der Theorie der Isostasie aus. Er unterscheidet vier Hauptphasen der Gebirgsbildung: 1. Bildung einer Geosynklinale; die Sedimente füllen eine zunehmende Vertiefung aus. 2. Bildung eines Walles *(bourrelet)* auf der Südseite der Synklinale. 3. Schub des sich immer von neuem bildenden Walles gegen die Geosynklinale. Der Wall deckt sie als eine Schub- bezw. Deckmasse *(nappe de charriage)*. 4. Emporhebung des in der Tiefe erzeugten submarinen Baues.

Die Bildung der Geosynklinale (Fig. 24) unter der Last der Sedimente erfordert keine neue Erklärung, sie wurde schon oben mehrmals besprochen. Wir fügen nur hinzu, daß Bertrand mit Rücksicht auf die europäischen Gebirge am Mittelmeer eine asymmetrische Bildung der Geosynklinale voraussetzt. Die in der Tiefe

Fig. 24.



fließenden Massen strömen südlich, häufen sich auf der Südseite der Geosynklinale an und heben, einen Ausweg suchend, die Erdkruste in die Höhe. Auf diese Weise entsteht der unter 2) erwähnte Wall. Derselbe stürzt in die Vertiefung und leitet die Bildung der Deckmasse ein. Da aber das Sinken in der Geosynklinale und die Verschiebung der Massen M_1 in der Tiefe nach dem Gebiete C fortdauert, so bildet sich der Wall immer aufs neue und stürzt immer aufs neue in die Vertiefung. Es ist nicht leicht zu verstehen, warum in der Theorie Bertrands nach der Phase

*) M. Bertrand, Essai d'une théorie mécanique de la formation des montagnes. C. R. Bd. CXXX (1900), S. 291—298.

1 später die Phase 4 kommt, warum an derselben Stelle, wo während einer sehr langen Zeit die Erdkruste sank, nachher alles in die Höhe strebt. — Bertrand beruft*) sich darauf, daß anfänglich in der Synklinale B die Schwerkraft größer war als die normale, dann aber infolge der Verschiebung der dichten Massen M_1 unten und der Anhäufung weniger dichter Sedimente oben die positive Anomalie der Schwerkraft sich in eine negative verwandelte. Dabei verbindet Bertrand die Bildung der Deckmasse mit vermeintlichen Verschiebungen der Erdkruste in bezug auf das Erdinnere.

Die Auffassung des Problems ist nicht ganz korrekt, denn nicht die Anomalie der Schwerkraft, sondern die Druckverteilung ist bei Verrückungen maßgebend. Aber davon können wir absehen. Wichtiger erscheint der Einwand, daß isostatische Prozesse laut Definition nach Herstellung des Gleichgewichtes und nicht nach Schaffung einer neuen Abweichung vom Gleichgewichte streben.

Von einer Wirkung der Trägheit, welche die Deformation sozusagen über die Gleichgewichtskonfiguration hinausführen könnte, ist bei so langsamen Prozessen keine Rede. Endlich ist die Anwendung des Schwerpunktssatzes auf einen Teil der Erdkruste unstatthaft, da dieser Teil nicht durchweg isoliert ist.

Wie es scheint, wird die dynamische Seite der Theorie Bertrands auch von seinen Anhängern nicht als unanfechtbar betrachtet. Somit können wir seine Hypothese bezüglich der letzten Ursachen der Gebirgsbildung beiseite lassen. Statt dessen werden wir ein Detail, welches in den modernen Erklärungen des Gebirgsbaues eine wichtige Rolle spielt, nämlich die Deckschollen (bezw. Schubmassen = *nappes de charriage*) näher besprechen. Wir werden also nicht fragen, woher die Kräfte kommen, welche die Deckschollen bewegen, sondern wir werden fragen, ob und unter welchen Bedingungen die Bewegung einer Deckscholle möglich ist.

Daß eine Hunderte von Kilometern lange und breite Gesteinsscholle auf einer ebensolchen horizontalen Unterlage nicht verschoben werden kann, ist gewiß. Um uns davon zu überzeugen, führen wir mit M. Smoluchowski**) die folgende kurze Rechnung aus. Es seien a, b, c Länge, Breite und Dicke der Scholle, w das

*) M. Bertrand, a. a. O. S. 295.

**) M. Smoluchowski, Some Remarks on the Mechanics of Overthrusts. Geol. Magazine, Dek. V, Bd. VI (1909), S. 204—205.

Gewicht der Volumeinheit des Gesteins und e der Reibungskoeffizient. Die Kraft, welche den Block in Bewegung setzen kann, ist: $P = abcwe$; der Druck aber wird sich auf den Querschnitt ac so verteilen, daß der Druck auf eine Querschnittseinheit sich zu $\frac{P}{ac} = bwe$ berechnet. Nehmen wir für e den Reibungskoeffizienten von Gußeisen auf Gußeisen (ein wenig fettig), nämlich $e = 0{,}15$*), setzen wir ferner $b = 100$ km, so zeigt sich, daß der zur Überwindung nötige Druck der Last einer 15 km hohen Gesteinssäule gleichkommt. Andererseits beträgt die Druckfestigkeit des Granits und Gneises ungefähr 800 kg pro Quadratzentimeter, des Sandsteins 700, des Kalksteins 500, des Basalts 1200 und des Porphyrs 2400 kg pro Quadratzentimeter. Nehmen wir diese letzte Zahl als die höchste an und setzen die Dichte des Porphyrs = 2,67, so werden wir finden, daß 2400 kg pro Quadratzentimeter dem Drucke einer Gesteinssäule von 9 km Höhe entsprechen. Also selbst unter so ausnahmsweise günstigen Bedingungen ist der zur Überwindung der Reibung nötige Druck mehr als anderthalbmal so groß als die Druckfestigkeit, d. h. die Gesteinscholle würde sich nicht vom Fleck rühren, sondern in Stücke zerbrechen.

Es könnte jemandem sonderbar erscheinen, daß doch — während die Druckfestigkeit des Granits und Gneises nur dem Gewicht einer ungefähr 3 km hohen Säule desselben Gesteins gleichkommt — Gebirge, Plateaus usw. von größerer Höhe bestehen können. Das Rätsel erklärt sich leicht, wenn man daran denkt, daß die Druckfestigkeit nach der Hypothese berechnet wird, daß der Druck einseitig wirkt, d. h. nur in einer Richtung von Null verschieden ist. Wenn aber in drei aufeinander senkrechten Richtungen Drucke N_{xx}, N_{yy}, N_{zz} wirken, wobei $N_{xx} > N_{yy} > N_{zz}$, so braucht das Gestein auch dann nicht zu zerbrechen, wenn alle drei Drucke größer sind als die Druckfestigkeit, solange nur die Differenzen $N_{xx} - N_{yy}$, $N_{yy} - N_{zz}$, $N_{xx} - N_{zz}$ kleiner als die Druckfestigkeit bleiben.

Auf einer geneigten Unterlage könnte der Block durch sein eigenes Gewicht hinuntergleiten. Beim Reibungskoeffizient 0,15 muß der Neigungswinkel mindestens 8,5° (tg 8,5° = 0,15), beim Reibungskoeffizient 0,69 mindestens 34,6° betragen, damit ein

---

*) Für Muschelkalk auf Muschelkalk (trocken) ist derselbe Koeffizient: 0,69.

Gleiten möglich ist. So große Neigungen kommen aber kaum in Betracht.

Anders gestaltet sich die Frage, wenn die Unterlage nicht fest, sondern flüssig ist. Dann kommt das Gesetz der Flüssigkeitsreibung ins Spiel: eine auch noch so geringe Kraft kann den Block verschieben, nur wird die Geschwindigkeit um so geringer sein, je kleiner die Kraft ist. Freilich darf man an kein Schwimmen der Deckmassen im strengen Sinne denken, aber es ist klar, daß die Plastizität der Unterlage Bewegungen ermöglicht, die ohne dieselbe schier unmöglich erscheinen. Also wieder kommen wir auf die Plastizität als diejenige Eigenschaft, welche den Ausweg zwischen scheinbar unversöhnlichen Gegensätzen öffnet.

Auf einen Umstand müssen wir hier die Aufmerksamkeit der Leser lenken. Man kann auch voraussetzen, daß die Deckmasse sich im Denudationsgebiete bildet. Sie wäre dann mit derjenigen Scholle der Erdrinde zu identifizieren, unter welche die aus dem Raume unterhalb des Senkungsgebietes hinausgedrängten Massen hineingezwängt werden. Das Resultat ist dasselbe; denn es ist vollkommen gleich, ob die Scholle *A* auf die Scholle *B* oder umgekehrt die Scholle *B* unter die Scholle *A* geschoben wird. In Fig. 24 wäre dann *C* dasjenige Gebiet, in dem sich die Deckmasse bildet und die Deckmasse selbst wäre entweder mit der Scholle der Erdkruste, unter welche fremde Massen eingeschoben werden, oder mit jenen fremden durch Denudation aufgedeckten Massen zu identifizieren.

Die Entscheidung, ob und in welchen Fällen diese letzte Auffassung mit den Tatsachen übereinstimmt, liegt nicht im Rahmen unserer Zuständigkeit, sie muß den Fachgeologen überlassen werden.

Es sei noch eine Bemerkung erlaubt. Die Plastizität verhilft uns zum Verständnis der Bildung von Deckmassen, sie gibt auch eine Erklärung für jene mannigfachen, komplizierten Deformationen, welche in Gebirgen — speziell in Gebirgen von alpinem Typus — konstatiert werden. Aber eine ausgesprochene Plastizität dicht unter der Erdoberfläche können wir nicht erwarten. Deswegen können plastische Deformationen erst in einer gewissen Tiefe zustande kommen. Diese Tiefe genau festzustellen, ist natürlich nicht möglich; man kann nur sagen, daß sie nicht so übermäßig groß zu sein braucht, vielleicht 10, auch 20 km nicht übersteigt. Übrigens muß in den Eigenschaften der Stoffe und im Charakter der Defor-

mationen ein mehr oder weniger stetiger Übergang von der Brüchigkeit in den oberen Stockwerken zu einer größeren Plastizität in den unteren vorhanden sein. — Wenn aber Gesteine, die einmal in der Tiefe „geflossen“ sind, heute an der Erdoberfläche liegen, so müssen sie eine Hebung erfahren haben.

Somit haben wir festgestellt, daß der vierte Punkt der Hypothese Bertrands: daß der Gebirgsbau in der Tiefe vorgebildet und dann in die Höhe gehoben wird, als eine notwendige Forderung erscheint; aber eine hinreichende Erklärung dafür haben auch wir nicht gefunden. Daß die Plastizität der Gesteine doch tatsächlich gering ist, daß wahrscheinlich in vielen Fällen nur eine Pseudoplastizität vorhanden ist, daß endlich die lange Dauer der geologischen Prozesse es ist, welche ein wirkliches Hinüberfließen fester Körper von einem Orte zum anderen ermöglicht, haben wir schon im elften Abschnitt hervorgehoben.

§ 13. Ursachen der Gebirgsbildung.

Im letzten Abschnitt haben wir Deformationen als solche betrachtet, ohne auf ihre letzten Ursachen einzugehen. Die Ideen Bertrands wurden nur vorübergehend gestreift. Jetzt wollen wir noch eine Weile auf die Frage nach den letzten Ursachen zurückkommen. Es ist klar, daß unter den in den vorigen Abschnitten durchgemusterten Ursachen nur die Hypothese Loves, die Kontraktion der Erde und isostatische Prozesse in Betracht kommen können. Die Hypothese Loves wurde im fünften, die Kontraktionstheorie im sechsten, die Theorie der Isostasie im achten und den folgenden Paragraphen besprochen.

In einer Hinsicht ist die Theorie der Isostasie ihren Rivalen überlegen. An erste Stelle in der Kette der Ursachen und Wirkungen stellt sie eine mächtige äußere Kraftquelle: die Energie der Sonne. Die Energie der Sonne verdampft das Wasser, sie bewegt die Atmosphäre, sie schenkt dem Lande Regen, sie nährt die Flüsse, sie ist die eigentliche Ursache der Denudation, Erosion und Ablagerung und durch deren Vermittlung der isostatischen Deformation. Seit den ältesten Zeiten unterhält sie alte und erzeugt neue isostatische Deformationen, und die Arbeit, die sie in einer entsprechend langen Zeit verrichten kann, ist mehr als ausreichend, um alle Deformationen zu erklären.

Vergleichen wir z. B. mit der isostatischen Theorie die Theorie von T. J. J. See*). Er nimmt auf und erweitert eine alte vulkanische Theorie, deren Anfänge nach seiner eigenen Aussage bei Aristoteles und seiner Schule zu suchen sind. Unter dem Druck einiger hundert Atmosphären [der Druck von 10 m Meerwasser ist gleich einer Atmosphäre] sickert das Meerwasser durch den Meeresboden und dringt in Regionen hoher Temperatur vor, wo es sich in Dampf verwandelt. Der erhitzte und stark gespannte Dampf sucht sich einen Ausweg, gelangt unter die Festländer und entweicht in Vulkanen an die Oberfläche. Deswegen befindet sich die Mehrzahl der Vulkane dicht am Meere. Durch den Dampf wird Magma mit fortgerissen und aus unterseeischen Gebieten unter die Festländer getrieben: infolgedessen sinkt der Meeresboden und am Lande, insbesondere an den Küsten werden Gebirge aufgewölbt.

Dieselben Einwände, die man gegen die auf dem Durchsickern von Wasser beruhende Theorie des Vulkanismus geltend machte, kann man natürlich auch gegen die Theorie T. J. J. Sees ins Feld führen. Wir werden sie weder wiederholen noch diskutieren. Wer sie kennen lernen will, möge irgendein ausführliches Handbuch der Vulkanologie aufschlagen. Hier wollen wir nur das Fehlen einer ausgiebigen primären Energiequelle betonen. Andererseits ist die Absorption des Dampfes durch Magma eine feststehende Tatsache, aber es folgt daraus noch nicht, daß der Dampf eine aktive Rolle spielen muß. Kehrt man aber die Schlußfolge Sees um und sagt, daß nicht der Dampf Magma, sondern das Magma Dampf mit sich fortreißt, so wird man wieder zur Theorie der Isostasie geleitet.

Aber man darf durchaus nicht glauben, daß die Gebirgsbildung nur auf isostatischen Prozessen beruht. Es erheben sich schon Stimmen, welche dem Radium eine wichtige Rolle in der Gebirgsbildung zuschreiben, und S. Arrhenius glaubt, daß auf der Sonne und ebenso im Erdinnern bei hohen Temperaturen uns ganz unbekannte, sehr stark wärmeentwickelnde (exotherme) chemische Prozesse stattfinden. Eine jede Energieentwicklung kann aber Anlaß zu Deformationen geben.

Doch auf Hypothesen, die heutzutage noch gar nicht beurteilt werden können, wollen wir nicht eingehen.

---

*) T. J. J. See, The Cause of Earthquakes, Mountain Formation usw. Proc. Am. Phil. Soc., Bd. XLV (1906), S. 274—414; On the Temperature, Secular Cooling . . . Dieselbe Zeitschrift, Bd. XLVI (1907), S. 191—299; The new Theory of Earthquakes . . . Dieselbe Zeitschrift, derselbe Bd., S. 369—416.

Siebentes Kapitel.

Morphologie der Ozeane. Meerwasser.*)

§ 1. Abmessungen der Ozeane. Morphologie des Meeresbodens.

Nach Bessel hat die Erde (eigentlich das Erdellipsoid) 509 950 714 qkm Oberfläche. Wenn man aber, einer jetzt ziemlich verbreiteten Ansicht folgend, die Abplattung nach Bessel beibehält und die Länge der größeren Halbachse nach Clarke (vergl. erstes Kapitel, § 9) annimmt, so bekommt man eine um ungefähr 137 000 qkm größere Oberfläche. — Was diese letzte Zahl bedeutet, kann man danach beurteilen, daß ganz Bayern nur 75 870 qkm bedeckt. Nehmen wir rund 510 Millionen Quadratkilometer an. Davon entfallen 361,2 Mill. Quadratkilometer auf das Weltmeer und 148,8 auf das Festland. Diese beiden letzten Zahlen sind weniger sicher als ihre Summe, da die Umrisse der arktischen Länder ziemlich und diejenigen der antarktischen ganz unsicher bekannt sind. So schätzte H. Wagner 1895 das Gebiet des antarktischen Festlandes um volle 4 Mill. Quadratkilometer, d. i. nahezu um $^5/_6$ des europäischen Rußlands kleiner als O. Krümmel 1907.

Prozentual bedeckt das Meer ungefähr 70,82 Proz., das Festland ungefähr 29,18 Proz. der Erdoberfläche; das Verhältnis des Meeres zum Landgebiet ergibt sich demnach zu 2,43.

Auf S. 144 seines Buches gibt Krümmel folgende drei zusammengehörige Zahlen:

Gebiet des Weltmeeres**) . .	361 279 160 qkm
Volumen „ „ . . .	1 329 945 870 cbkm
Mittlere Tiefe des Weltmeeres .	3 681 m.

Als mittlere Höhe des Festlandes kann man 825 m***) annehmen. Mit 148,8 Mill. Quadratkilometer Gebiet ergibt sich das

*) Das faktische Material zu diesem Kapitel haben wir hauptsächlich aus Krümmels Handbuch der Ozeanographie, Bd. I, Stuttgart 1907, geschöpft. Andere Quellen werden stets ausdrücklich genannt.

**) Alle Meere sind inbegriffen, mit Ausnahme des Kaspi- und des Aralsees, die ganz richtig als große Salzseen ausgeschieden werden.

***) Wegen der großen Höhe des antarktischen Kontinents vergl. Meinardus, Peterm. Mitt. 55. Bd. (1909), Heft XI und XII.

Volumen der Festländer zu ungefähr 122,8 Mill. Kubikkilometer, d. h. zu etwa $\frac{1}{10,4}$ des Volumens der Meere.

Ebenso wie die Landoberfläche bietet der Meeresboden verschiedene Unebenheiten dar. Es gibt insbesondere im nördlichen Teile des Stillen Ozeans größere Ebenen als irgendwo auf dem Lande, aber es fehlt auch nicht an Hochländern und Gebirgen. Nicht alle Unebenheiten des Meeresbodens sind bekannt; sie werden erst allmählich durch Lotungen entdeckt. In dem Maße, wie die Lotungen sich mehren, werden auch die Karten des Meeresgrundes reicher an Einzelheiten. Was ganz fehlt, das ist die reiche Gliederung der Oberfläche durch unzählige Erosionstäler, welche so bezeichnend für das Land ist. Auf dem Lande hat die Erosion jeden Abhang in Tausende von kleineren Abhängen zerteilt. Auf dem Meeresgrunde fehlt die Erosion, das Feld ist der Sedimentation überlassen, diese aber trägt nur zur Einebnung etwa vorhandener Unebenheiten bei. Unter den vorhandenen Reliefformen springt sofort in die Augen die Flachseebank *(plateau continental, continental shelf)*, welche viele Küsten umgibt und gleichsam eine Fortsetzung der Festländer bildet. Am deutlichsten tritt die Bank an flachen Küsten auf: Hunderte von Kilometern weit von der Küste ist das Meer seicht, die Tiefe nimmt langsam zu; erst mit der 100- oder 200 m-Isobathe, zuweilen in noch größeren Tiefen, beginnt der steilere Abhang. Derselbe fällt ohne Unterbrechung bis 1000, 2000 oder noch mehr Meter Tiefe, dann beginnen wieder sanftere Böschungen: wir befinden uns schon auf dem Grunde der eigentlichen ozeanischen Vertiefung. Die Flachseebank ist gewiß nicht aufgeschüttet: ihr Untergrund besteht aus denselben Gesteinen wie das angrenzende Land, sie gehört zum Körper der Kontinente. In Europa nimmt die Bank die ganze Ostsee mit Ausnahme einiger kleiner Kolke ein: an der Küste Norwegens bildet sie eine schmale Zone; die norwegische Rinne trennt sie vom Boden der Nordsee, welche sehr seicht ist und auch zur Bank gehört. Großbritannien liegt auf einem ausgedehnten unterseeischen Sockel. Fiele das Meer um 200 m, so würde sich dem europäischen Festland eine Halbinsel, dreimal so groß wie Großbritannien, angliedern; ein weiteres Fallen des Meeresniveaus würde die Halbinsel nur unbedeutend vergrößern.

Vom Standpunkte der Isostasie aus ist die Existenz der Kontinentalbank etwas Selbstverständliches, da das Sinken des Meeres-

bodens nach dem sechsten Kapitel, § 8, die Sedimentation nicht vollständig kompensiert, so daß die Meere langsam gefüllt werden. Infolgedessen steigt das Meeresniveau, und flache niedrige Landstriche werden überschwemmt. Hierin liegt die Hauptursache der Transgression. Die vertikale Verschiebung des Meeresniveaus ε muß ungefähr 200 m betragen, da merkwürdigerweise die Grenze der Bank so oft mit der 200 m-Isobathe zusammenfällt. Eine Reihe höchstinteressanter Fragen knüpft sich hier an; da sie aber außerhalb des Rahmens dieses Buches liegen, so müssen sie übergangen werden.

Von anderen Bodenformen des Meeresgrundes stechen die alten überschwemmten Flußtäler deutlich ab. Einige von ihnen sind in die Bank, einige in die Böschungen des Kontinentalsockels eingeschnitten.

Auf dem Boden der Nordsee finden sich Spuren des alten Rheintales und der Täler seiner Zuflüsse. Der Rhein war ehemals doppelt so lang wie heute; seine Mündung lag nördlich von Schottland; die Themse, die Ouse, die Tyne, die Tweed und andere englische nach Osten strömende Flüsse lieferten ihm Wasser.

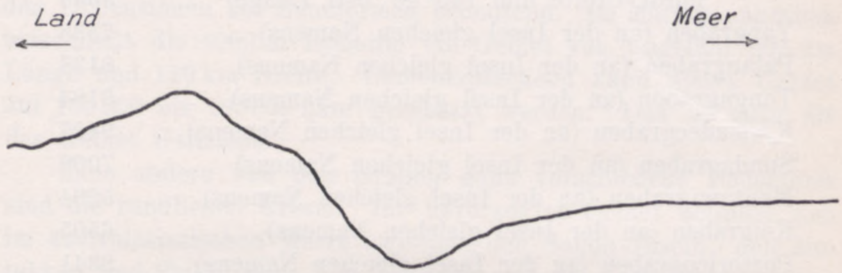
Ähnliche unterseeische Furchen finden sich an der französischen Küste gegenüber Cap Breton *(Fosse du Cap Breton)*, an der Küste Portugals, dann in der schmalen Bank, welche die Küste der Provence und die Riviera umsäumt. Hier gehen sie bis 700 bzw. 1000 m hinunter. Weiter sehen wir solche Furchen gewissen norwegischen Fjorden gegenüber. Die Täler des Indus, Ganges und Kongo setzen sich unter dem Meere fort, und das unterseeische Tal des Hudson in Nordamerika wurde mehrmals beschrieben. Nach J. W. Spencer*) kann dieses Tal bis auf 120 km von der Küste verfolgt werden; es geht bis zu 1460 m Tiefe hinunter. Davon entfallen 300 m auf die Tiefe der Kontinentalterrasse, die übrigen 1160 m sind in die Terrasse eingeschnitten. Jedoch hat das Profil des Tales an zwei Stellen ein so starkes Gefälle, wie es bei Flüssen nicht vorkommt, und es liegt die Vermutung nahe, daß das gegenwärtige Relief zum Teil durch Verwerfungen hervorgerufen worden ist. Dann wäre auch die relative Verschiebung des Meeresniveaus von der gegenwärtigen Tiefe des unterseeischen Tales verschieden. Ob eine ähnliche Erklärung auch für die tiefen unterseeischen

---

*) J. W. Spencer, The great Canyon of the Hudson-River. Amer. Journ. of Sc., Bd. XIX (1905), S. 1—15.

Täler der Provence und Riviera gilt, mag dahingestellt bleiben. — Ein anderes höchst bezeichnendes Merkmal des ozeanischen Bodenreliefs sind die großen Gräben. Die Festländer besitzen nichts, was ihnen an die Seite gestellt werden könnte. Die Böschungen sind sehr sanft, besonders an der ozeanischen Seite; an der Landseite bzw. an der Seite des unterseeischen Rückens ist der Abhang steiler. Gleichzeitig ist die festländische Küste, an welcher ein Graben sich befindet, gebirgig und die Streichrichtung des Gebirges, die Küste und die Längsachse des Grabens laufen oft einander nahezu parallel. Falls aber der Graben sich weit von einem Kontinente befindet, dann befindet sich neben ihm ein unterseeischer mit Inseln besetzter Rücken. Es ist immer dasselbe Relief, nur einmal liegt es höher, ein anderes Mal tiefer in bezug auf das Meeresniveau. (Fig. 25.) Wahrscheinlich existiert ein genetischer Zusammenhang zwischen Graben und Gebirge: der dem Graben

Fig. 25.



entnommene Stoff diente wahrscheinlich zum Ausbau des Gebirges. Es ist möglich, daß die Bildung von Gräben heutzutage noch weiter fortschreitet; was aber die Verschiebung solcher gewaltigen Massen verursachte, wissen wir nicht. Die isostatische Theorie paßt auf die Gräben nicht: viele von ihnen befinden sich weit vom Festlande, im Gebiete einer schwachen Sedimentation, woher kommt denn die Last, welche die Erdkruste in die Tiefe drückt? Andererseits hat die Theorie von See keine Erklärung dafür, warum in so beschränkten Gebieten der Dampf sich so wirksam zeigt, und die Theorie der Kontraktion gibt keinen Bescheid, warum neben dem Gebirge ein Graben entsteht. Die Gräben sind eine höchst merkwürdige, aber bisher nicht aufgeklärte Erscheinung.

In nachfolgender Tabelle geben wir die Tiefen der bekannten Gräben. Die Namen der Gräben rühren teils von den Namen naher Inseln, teils von Ortsnamen her.

Name des Grabens	Tiefe in Metern
Atacamagraben (von der nahen Wüste Atacama in Südamerika)	7635
Acapulcograben (an der Küste von Südamerika) .	5423
Petacalcograben (ebendaselbst)	5160
Manzanillograben (ebendaselbst)	5122
Aleutengraben (an den Aleuten-Inseln)	7383
Japangraben („Tuscarora“-Tiefe)	8513
Liu-Kiugraben (an den Inseln gleichen Namens) .	7481
San Bernardinograben (vom Namen einer Insel in den Philippinen)	6382
Talautgraben (an der Insel gleichen Namens) . .	7248
Nördlicher Boningraben (an den Inseln gleichen Namens)	6256
Südlicher „ („ „ „ „ „)	6575
Mariannengraben (an den Mariannen-Inseln. Nero-Tiefe, größte bisher gemessene Tiefe in 12° 40′ nördl. Breite und 145° 40′ östl. Länge) . .	**9636**
Yapgraben (an der Insel gleichen Namens) . . .	7538
Palaugraben (an der Insel gleichen Namens) . .	8138
Tongagraben (an der Insel gleichen Namens) . .	9184
Kermadecgraben (an der Insel gleichen Namens) .	9427
Sundagraben (an der Insel gleichen Namens) . .	7000
Mentawigraben (an der Insel gleichen Namens) .	5664
Keigraben (an der Insel gleichen Namens) . . .	6505
Portoricograben (an der Insel gleichen Namens) .	8341
Caymangraben (an der Insel gleichen Namens) . .	6269

Nur die beiden letzten Gräben befinden sich im Atlantischen und die drei vorletzten im Indischen, die übrigen 16 gehören dem Pacifischen Ozean an. Im Atlantischen Ozean befindet sich außerdem noch eine sehr große Tiefe, nämlich die Romanchetiefe (7370 m), aber wegen ihrer rundlich-trichterförmigen Gestalt kann sie nicht zu den Gräben gezählt werden.

Die angegebenen Tiefen sind nicht endgültig maßgebend, möglicherweise wird man in denselben Gräben noch größere Tiefen finden. Ebenso ist die Nomenklatur nicht definitiv: es ist möglich, daß man später einmal Gräben, die heute als selbständige betrachtet werden, vereinigen oder umgekehrt einen heute als einheitlich angesehenen Graben in zwei oder mehr Gräben trennen wird. Es ist auch durchaus nicht ausgeschlossen, daß man noch neue Gräben findet; alles dies hängt von künftigen Lotungen ab.

Die Nero-Tiefe mißt 9636 m, der höchste Punkt auf der nahen Insel Guam 388 m, die Differenz zwischen der größten Höhe und der größten Tiefe beläuft sich demnach auf 10 024 m. Die größte bekannte Tiefe im Kermadecgraben mißt 9427 m, der höchste Punkt auf der nahen Insel Raoul 525 m; Differenz = 9952 m. Die Tuscarora-Tiefe hat 8513 m, der höchste Berg in Japan, der Fuji-no-yama (Fujiyama), 3780 m; Differenz zwischen der größten Höhe und der größten Tiefe 12 293 m. Endlich im Atacamagraben unter 26° südl. Breite haben wir eine Tiefe von 7635 m und auf dem Festlande Südamerikas den Gipfel des Llullailaco mit ungefähr 6000 m Höhe; hier beträgt also die Höhendifferenz ungefähr 14 200 m. Außerdem gibt es hier mehrere andere Gipfel, die sich über 6000 m erheben, so daß die Höhendifferenz in dieser Gegend sicher die größten Beträge erreicht.

Die Horizontalabmessungen der Gräben sind relativ zu den Dimensionen großer ozeanischer Senkungen klein, aber relativ zu den Dimensionen der Landformen bedeutend. Im Mariannengraben umschließt die 6000 m-Isobathe ein Gebiet von ungefähr 900 km Länge und 120 km Breite. Dementsprechend kann dieses Gebiet auf 100 000 bis 120 000 qkm geschätzt werden. Das ist mehr als das Gebiet Galiziens.

Eine andere von den Gräben ganz verschiedene Bodenform sind die rundlichen Kessel. Ihr bevorzugtes Gebiet befindet sich im australasiatischen Meere zwischen den Sunda-Inseln, den Molukken und Philippinen; hier befinden sich die Kessel von Celebes, Sulu, Banda neben den länglichen Senken von Flores und den Molukken; nicht weit davon liegt der Kessel im nördlichen Teile des südchinesischen Meeres. Ähnliche Kessel finden sich im europäischen Mittelmeer, im Mexikanischen Golf und anderswo, vielleicht ist die wenig ausgedehnte, aber sehr tiefe Romanche-Tiefe im Atlantischen Ozean hierher zu zählen. — Im Mittel sind die Kessel bedeutend seichter als die großen ozeanischen Becken: während im Pazifischen Ozean die 5000 m-Isobathe ungefähr 40 Mill. Quadratkilometer, also nicht viel weniger als Asien, umfaßt, haben nur zwei Kessel, nämlich die Celebes-See und die Flores-See, Tiefen über 5000 m, dabei von sehr geringer Ausdehnung. Die größten Tiefen erreichen etwa 5100 m.

Die unterseeischen Böschungen sind überhaupt sehr sanft, so sanft, daß nach der Berechnung Krümmels die Oberfläche des Meeresbodens nur ungefähr um $^1/_{330000}$ größer ist, als ihre Projek-

tion auf das Geoid. Gewiß ist das keine genaue Zahl, aber eine rohe Schätzung genügt vollständig, um eine Vorstellung von der außerordentlichen Sanftheit der Böschungen zu geben. Im Nordatlantischen Ozean beträgt das mittlere Gefälle der Böschungen ungefähr $^1/_{124}$. Für andere Ozeane konnte Krümmel wegen Mangels an Daten keine solche Schätzung unternehmen. Der Böschungswinkel im Mariannengraben an der steileren Landseite (unterseeischer Mariannenrücken) in südöstlicher Richtung von der Insel Guam beläuft sich auf 2,5° zwischen den Isobathen von 1000 und 5000 m — auf 7° zwischen den Isobathen von 5000 und 7000 m. Der gegenüberliegende Abhang hat bis zur 6000 m-Isobathe einen mittleren Neigungswinkel von 4,5°, darüber hinaus aber fällt der Neigungswinkel auf 7′ bis 8′.

Es gibt jedoch keine Regel ohne Ausnahme. Hie und da befinden sich sehr steile Abhänge, nur sind sie seltener als auf dem Lande. Ebenso steil wie die Abhänge der Landvulkane sind die unterseeischen Abhänge vulkanischer Inseln. Der Böschungswinkel des unterseeischen Sockels der Insel St. Helena erreicht z. B. 38 bis 40° und der Insel St. Paul stellenweise sogar 62°*). Die Böschungswinkel der Koralleninseln sind ebenfalls groß. Dietrich findet folgende mittlere Werte:

zwischen dem oberen Rande des Riffs und der Tiefe 300 m	$i = 17^0\,22'$
„ 2500 und 3000 m Tiefe	$i = 11^0\,36'$
„ 3000 „ 4500 „ „ (am Fuß)**) .	$i = 7^0$.

Steil sind ferner isolierte unterseeische Kuppen und Rücken, wahre Seeberge, wahrscheinlich vulkanischer Natur, die die Meeresoberfläche gar nicht erreichen und infolgedessen nur zufällig durch Lotungen entdeckt werden. Steile Böschungen sind gelegentlich auch an den Sockeln der Kontinentalküsten gefunden worden. Westwärts von den britischen, französischen und iberischen Küstenbänken findet E. Hull aus zahlreichen Messungen einen durchschnittlichen Winkel von 13 bis 14°. In 48° 10′ nördl. Breite findet er 21°, vor Kap Ortegal in 44° 5′ nördl. Breite — 18°, vor Kap Toriñana in 43° 4′ nördl. Breite sogar 36°. Da, wo die französischen

*) Der Böschungswinkel des Fuji-no-yama, der als sehr steiler Berg gilt, erreicht in der Nähe des Gipfels 35°, zwischen 2400 und 1500 m Höhe 24° und am Fuße nur 13°.

**) i bezeichnet den Böschungswinkel.

Telegraphenkabel von Brest nach New York in 48° 30′ nördl. Breite die Tiefsee am Nordrande des Biskayagolfes erreichen, sind von der Küstenbank mehrere isolierte Inselberge abgelöst: an ihren Flanken finden sich Böschungen von 30 bis 41°. Es ist weiter bekannt, daß die südliche unterseeische Böschung der Insel Kuba stellenweise bis zu 35° 30′ erreicht. Wir könnten noch weitere Beispiele hierfür anführen, aber die gegebenen mögen genügen.

§ 2. Chemische Zusammensetzung des Meerwassers.

Das Meerwasser ist bitter-salzig, seine Reaktion ist alkalisch, die Salzmenge, die man nach Abdampfen des Meerwassers als trockenen Rückstand erhält, beträgt selten 4 Proz. des Gewichtes, meist nur 3,5 Proz., in einigen Nebenmeeren aber viel weniger. Es ist eine verdünnte Salzlösung und als solche hat sie dieselben Eigenschaften wie die übrigen verdünnten Lösungen: die Gefriertemperatur des Meerwassers ist niedriger und der Dampfdruck geringer als beim reinen Wasser, während der osmotische Druck, die elektrische Leitfähigkeit, die innere Reibung und die Oberflächenspannung größer sind.

Von den 80 Elementen, die der modernen Chemie bekannt sind, hat man im Meerwasser — sei es frei oder in Verbindungen oder in Abscheidungen der Meeresorganismen — 32 nachweisen können. Es sind dies: Kohlenstoff in Kohlensäure aus verschiedenen Karbonaten, Chlor, Brom, Jod, Fluor, Phosphor, Schwefel, Silizium und Bor. Von den Metallen: Eisen, Nickel, Kobalt, Zink, Blei, Kupfer, Mangan, Aluminium, Magnesium, Kalzium, Strontium, Baryum, Natrium, Kalium, Arsen, Rubidium, Lithium, Cäsium, sogar Silber und Gold. Die meisten der genannten Elemente sind in so kleinen Quantitäten vorhanden, daß bloß eine peinlich genaue chemische Analyse dieselben zu entdecken vermag, während Chlor, Brom, Schwefel, Natrium, Kalium, Kalzium und Magnesium in größeren Quantitäten vorkommen.

Da das Meerwasser eine verdünnte Lösung ist, so zerfallen die Salze größtenteils in ihre Ionen, und zwar in elektrisch-negative Anionen: Chlor, Brom, Schwefelsäurerest (SO_4) und Kohlensäurerest (CO_3) und in elektrisch-positive Kationen: Natrium, Kalzium, Kalium, Magnesium (von minder wichtigen wird abgesehen). Jedoch heben elektrische Ladungen der Kationen und Anionen

einander auf, so daß sich das Meerwasser nach außen hin elektrisch neutral verhält. Die elektrolytische Dissoziation ist nicht vollständig: zahlreiche Ionen sind zu Molekeln vereinigt. Wenn wir uns auf die soeben aufgezählten Elemente beschränken, so haben wir Molekeln von 4 Sulfaten, 4 Chloriden und 4 Bromiden, zusammen Molekeln von 12 Salzen. Die Quantitäten derselben können wir nicht genau angeben, wir haben aber guten Grund anzunehmen, daß sie gering sind. Erst beim Eindampfen und mit wachsender Konzentration schwindet die Dissoziation, es bilden sich Salze in immer größeren Mengen; endlich scheiden sie sich ab in einer von Druck, Temperatur und anderen Bedingungen abhängigen Ordnung. Angesichts dessen entspricht die übliche Redeweise, daß in einem Liter Wasser so und so viel Gramm, sagen wir Chlornatrium, aufgelöst sind, nicht streng den tatsächlichen Verhältnissen; es ist besser, die Ionenzahlen anzugeben, wie es K. Natterer, Chemiker der österreichischen „Pola“-Expedition, zuerst getan hat. Aus seinen 34 Einzelanalysen, die sich alle auf das östliche Mittelmeer beziehen, hat Krümmel folgende Zahlen abgeleitet:

Tabelle I.

Auf 100 000 *Cl*-Atome entfallen im Mittelmeerwasser Atome und Atomgruppen:

	Na	*Mg*	*Ca*	*K*	SO_4	CO_3	*Br*
Im Mittel . .	84 926	10 186	1925	1819	5155	204	138
„ Maximum .	85 523	10 288	1991	2039	5202	208	151
„ Minimum .	84 702	9890	1874	1597	5025	198	101

Auf Grund der Analysen Dittmars hat Krümmel folgende mittlere Zahlen für das Ozeanwasser abgeleitet:

Tabelle II.

Auf 100 000 *Cl*-Atome entfallen im Ozeanwasser Atome und Atomgruppen:

	Na	*Mg*	*Ca*	*K*	SO_4	CO_3	*Br*
Im Mittel . .	85 334	9933	1922	1818	5132	226	151

Die Zusammensetzung des Seewassers, ausgedrückt durch die Verhältniszahlen der einzelnen Komponenten, ist auffallend gleich-

mäßig. Nur in den Flußmündungen, ferner in beinahe abgeschlossenen, mit dem Weltmeere durch enge Kanäle kommunizierenden Meeren, wie dem Schwarzen oder dem Asowschen Meere, findet man größere Abweichungen von dieser Regel.

Nehmen wir die sogenannten internationalen Atomgewichte*), nämlich: $Cl = 35{,}45$, $Na = 23{,}05$, $Mg = 24{,}36$, $Ca = 40{,}1$, $K = 39{,}15$, $S = 32{,}06$, $O = 16{,}00$, $C = 12{,}00$, $Br = 79{,}96$, folglich $SO_4 = 96{,}06$, $CO_3 = 60{,}00$ und multiplizieren die Zahlen der zweiten Tabelle mit den Atomgewichten, so erhalten wir folgende Massenverhältnisse: in den Ozeanen kommen auf 3545 Masseneinheiten des Chlors (Cl):

1966,9	Masseneinheiten	Na,	493,0	Masseneinheiten	SO_4,
242,0	„	Mg,	13,6	„	CO_3,
77,1	„	Ca,	12,1	„	Br,
71,2	„	K,			

zusammen, Chlor inbegriffen, 6420,9 Masseneinheiten; und das Verhältnis der Masse aller Komponenten zur Masse des Chlors berechnet sich zu

$$\frac{6420{,}9}{3545} = 1{,}811.$$

Dies ist der sog. Chlorkoeffizient von Forchhammer.

Gewöhnlich enthält 1 kg Meerwasser ungefähr 35 g anderer Körper. Nehmen wir rund 35 g an, dann werden wir auf Grund obiger Zahlen nach leichter Rechnung finden, daß von den 35 g auf die einzelnen Komponenten folgende Gewichte entfallen:

Tabelle III.

Chlor (Cl)	19,324 g
Natrium (Na)	10,722 „
Magnesium (Mg)	1,319 „
Kalzium (Ca)	0,420 „
Kalium (K)	0,379 „
Schwefelsäurerest (SO_4) . .	2,687 „
Kohlensäurerest (CO_3) . . .	0,074 „
Brom (Br)	0,066 „
Zusammen	34,991 g

Die unerhebliche Differenz erklärt sich aus dem Abrunden der Zahlen.

*) Ich vermute, daß Krümmel dieselben Atomgewichte verwendet hat.

Da die Verhältnisse unter den Massen der einzelnen Komponenten nahezu konstant sind, so kann man aus der absoluten Menge der einen Körper die absoluten Mengen anderer — vor allem die Summe aller aufgelösten Körper — oder den sogenannten Salzgehalt berechnen. Die bequemste und sicherste Grundlage der Rechnung bietet diejenige Komponente, deren Menge am größten ist, d. i. das Chlor. Die Menge des Chlors kann mit Hilfe der Titration mit Silbernitrat rasch und leicht bestimmt werden. Sobald der Chlorgehalt von 1 kg Meerwasser bekannt ist, kann man den Salzgehalt durch Multiplikation mit dem Chlorkoeffizienten erhalten. Soeben haben wir für diesen Koeffizienten die Zahl 1,811 gefunden; aber es ist besser, sich der empirischen Formel von M. Knudsen zu bedienen. Sie stützt sich auf speziell zu diesem Zwecke ausgeführte zahlreiche Analysen und lautet:

$$\sigma = 0{,}030 + 1{,}805\, Cl, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

wo σ den Salzgehalt in Grammen pro Kilogramm Meerwasser bedeutet. Natürlich muß der Chlorgehalt ebenfalls in Grammen pro Kilogramm Meerwasser ausgedrückt sein. Die Formel Knudsens gibt einen von Null verschiedenen Wert für $Cl = 0$, weil in den hier in Betracht kommenden natürlichen Wässern, wo $Cl = 0$ werden kann, wie in Flußmündungen, zwar stets ein minimaler Salzgehalt vorkommt, aber kein Chlorid vorhanden ist, also bei der Titration auch nicht reagiert, so unter anderem kohlensaurer Kalk. Eine Interpolationsformel von der Form $y = bx$ wäre nur dann angezeigt, wenn man das destillierte Wasser als einen speziellen Fall des Seewassers betrachten dürfte; eben das aber ist nicht zulässig. — Zweitens gibt die Formel 1 den Salzgehalt an, aber mit einer Beschränkung. Um gewissen Zweifeln und Schwierigkeiten, welche bei der Analyse des Meerwassers auftreten, vorzubeugen, denkt man sich nach dem Vorschlag von S. P. L. Sörensen und M. Knudsen, daß alles Brom durch eine äquivalente Menge Chlor ersetzt, alles Karbonat in Oxyd umgewandelt ist und alle organischen Stoffe verbrannt sind. Dank dieser Definition erhält man etwas kleinere Salzgehalte als diejenigen, die früher angegeben wurden, aber die Differenz ist ganz unerheblich: sie beträgt weniger als 0,14‰.

Vergleichen wir jetzt das Meerwasser mit dem Flußwasser. Die Quantität der im Flußwasser gelösten Salze ist sehr verschieden, sie wechselt nicht bloß von Fluß zu Fluß, sondern variiert

auch mit der Jahreszeit usw. Wir können aber mit J. Roth annehmen, daß das Flußwasser durchschnittlich 0,167 g fester Substanz (in chemischer Lösung) pro Kilogramm Wasser enthält, das ist ungefähr 210 mal so wenig als das Meerwasser. Außerdem ist die prozentuale Zusammensetzung ganz verschieden. Ebenfalls mit J. Roth können wir annehmen, daß durchschnittlich in 100 g Salz den verschiedenen Salzen folgende Anteile zukommen:

den Karbonaten	60,1 Proz.
„ Sulfaten	9,9 „
„ Chloriden	5,2 „
„ anderen Substanzen . .	24,8 „

Die absoluten Mengen der Karbonate im Meer- und Flußwasser sind wenig voneinander verschieden. Nach den Daten J. Roths enthält 1 kg Flußwasser durchschnittlich etwa 100 mg Karbonate in Lösung.

Nach Tabelle III enthält 1 kg Meerwasser 74 mg des Radikals (CO_3); die entsprechende Menge von kohlensaurem Kalk $(CaCO_3)$ wiegt 123 mg. Die zwei Zahlen 100 und 123 mg sind wenig voneinander verschieden, und wer weiß, ob auf Grund eines reicheren Materials, als dasjenige, über welches J. Roth verfügte, nicht ein größerer Karbonatgehalt im Flußwasser herauskäme. Immerhin kann man, so weit es sich um Karbonate handelt, von einer großen Ähnlichkeit zwischen Meerwasser einerseits und Flußwasser andererseits sprechen.

Ganz anders verhalten sich die Dinge, wenn man die Werte für den Chlorgehalt miteinander vergleicht, 1 kg Meerwasser enthält 19 324 mg Chlor und 1 kg Flußwasser nur ungefähr 5,3 mg Chlor, d. h. das Meerwasser ist etwa 3600 mal so reich an Chlor wie das Flußwasser.

Aus diesem Gegensatz darf man nicht etwa darauf schließen, daß die Salze nicht durch die Flüsse in das Meer gebracht wurden. Gewiß kann man nicht behaupten, daß alles Salz, das im Meerwasser aufgelöst ist, vom Flußwasser herstammt, denn niemand weiß, wie die Ozeane sich gebildet haben, welche Salzmengen ursprünglich darin aufgelöst waren, aber man kann bestimmt behaupten, daß ein großer Teil der festen Stoffe, die sich jetzt in Lösung befinden, durch die Flüsse vom Festland hineingetragen wurde. Jahraus jahrein bringen die Flüsse Salze ins Meer. Diese Salze müssen im Meere bleiben, denn verdampfen kann nur reines Wasser.

Die Zusammensetzung des Meerwassers erklärt sich vollständig aus der verschiedenen Löslichkeit der Karbonate und der Chloride, indem erste schwer, letztere leicht löslich sind*). Trotz der geringen absoluten Menge der Karbonate im Meerwasser sind die Ozeane mit denselben gesättigt. Das wird bewiesen durch die Existenz von Kalkgesteinen im Meere und durch die Leichtigkeit, mit welcher die Karbonate beim Verdampfen ausgeschieden werden. Eines der ersten Salze, welche gefällt werden, ist der kohlensaure Kalk. Übrigens bringen die Flüsse so viel Karbonate ins Meer, daß etwa 50 000 Jahre ausreichen, um den ganzen gegenwärtig vorhandenen Vorrat von Karbonaten zu erneuern. Die Sättigung muß also bereits seit unvordenklichen Zeiten eingetreten sein und es muß ein nahezu stationärer Zustand bestehen: einerseits bringen die Flüsse jahraus jahrein neue Mengen von Karbonaten, andererseits verbrauchen die Meeresorganismen diese Salze, um sich daraus Gehäuse und Skelette zu bauen.

Demgegenüber führen die Flüsse nur wenige Chloride dem Meere zu, aber es sind Salze, die von den Organismen so gut wie gar nicht verbraucht werden: die Zufuhr der Chloride ist sicher größer als die Abgabe. Andererseits ist die Löslichkeit dieser Salze groß; die Ozeane sind noch weit von der Sättigung entfernt, und die Konzentration nimmt immer noch zu. Das Weltmeer kann noch zehnmal so viel Natrium aufnehmen, als es gegenwärtig enthält.

Wir glauben also, daß gegenwärtig der Gehalt an Natriumchlorid und anderen Chloriden im Weltmeer zunimmt, aber es ist eine äußerst langsame Zunahme. Nach der Berechnung Fritsches schaffen die Flüsse jährlich ungefähr 30 600 cbkm Wasser ins Meer. Das Weltmeer hat ein Volumen von etwa 1330 Mill. Kubikkilometer (vergl. § 1), aber die Dichte des Meerwassers ist wegen des Salzgehaltes und der Kompression in größeren Tiefen größer als die Dichte des Flußwassers. Das mittlere Dichteverhältnis muß man auf nicht weniger als 1,04 veranschlagen und bei der Schätzung der Massenverhältnisse mit 1,04 multiplizieren. Auf diese Weise werden wir finden, daß die Masse des Flußwassers, welches in einem Jahre dem Meere zugeführt wird, nur etwa $^1/_{45200}$ der Masse des Weltmeeres beträgt. Aber ein jedes Kilogramm Meerwasser

*) Von der Abhängigkeit der Löslichkeit der Karbonate vom Kohlensäuregehalte wird weiter unten die Rede sein.

enthält 31,02 g Chloride, während 1 kg Flußwasser nach J. Roth im Mittel nur $0{,}167 \times 0{,}052 = 0{,}0087$ g Chloride enthält. Das Verhältnis 31,02 : 0,0087 ist aber 3565; folglich bringen die Flüsse in einem Jahre nur $\frac{1}{45\,200 \times 3565} = \frac{1}{161\,138\,000}$, sagen wir rund ein Einhundertsechzigmilliontel der Chloride, die schon im Weltmeer gelöst sind.

Sehr belehrend ist das Beispiel der Salzseen, natürlich nicht derjenigen, die vom Meere abgeschnürt wurden, sondern derjenigen, die weit vom Meere in abflußlosen Wüsten entstanden sind. Im Vergleich zu den Ozeanen sind sie jung, und viele von ihnen enthalten außer etwas Regenwasser kein anderes Wasser, als dasjenige, welches ihnen von Flüssen und Bächen zugeführt oder aus den Gesteinen der Seewanne ausgelaugt wird. Die chemische Zusammensetzung der Salzseen ist sehr verschieden: es gibt Boraxseen (in *Tibet* und im *Great-Basin*), Natronseen*) (in der *Libyschen Wüste*, in der *Nevada* usw.), im Toten Meer ist Chlormagnesium der Hauptbestandteil des Salzgehaltes; in der Mehrzahl der Seen jedoch, ebenso wie im Meere überwiegt Kochsalz (Natriumchlorid) über alle anderen Salze.

Nach den älteren Untersuchungen (1849) von J. Usiglio, der diese Prozesse bei einer Temperatur von 40° an Mittelmeerwasser beobachtete, fällt bei der Verdampfung zuerst, sobald das Volum des Wassers auf 53,3 Proz. reduziert wird, das Ferrioxyd (Fe_2O_3) und ein Teil des Kalziumkarbonats aus. Bei weiterer Reduktion auf ein Fünftel des ursprünglichen Volums fällt der Rest des Kalziumkarbonats aus und es erscheint Gips (Kalziumsulfat). Chlornatrium (Natriumchlorid) tritt im Niederschlag nicht eher auf, als bis neun Zehntel des Wassers verdampft sind. Man kann aber aus diesen Beobachtungen keine weitgehenden Schlüsse ziehen, denn die späteren Untersuchungen van't Hoffs haben gezeigt, daß die Ausscheidung der Salze aus dem Meerwasser ein sehr komplizierter Prozeß ist. Die Reihenfolge, in welcher die Salze aus der Lösung ausfallen, hängt nicht nur ab von der Temperatur, sondern auch von den quantitativen Verhältnissen, in denen die einzelnen Lösungsgenossen in den jeweiligen Abscheidungsphasen zueinander stehen. Die Untersuchungen van't Hoffs enthalten die

---

*) Die Natronseen enthalten mehr Natriumkarbonat als Natriumchlorid.

Aufklärung der Bedingungen, unter welchen Salzlager, speziell die Salzlager von Staßfurt, gebildet wurden. Sie sind in einer Reihe von Abhandlungen in den „Sitzungsberichten der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin" publiziert worden.

§ 3. Die Dichte des Meerwassers.

Das Meerwasser ist dichter als reines Wasser, und zwar aus zwei Gründen. Erstens sind die gelösten Salze dichter als Wasser; es hat nämlich das Natriumchlorid die Dichte 2,17, das Kaliumchlorid 1,99, das Magnesiumchlorid 2,18, das Magnesiumsulfat 2,65, das Kalziumsulfat 2,97, das Kalziumkarbonat 2,72. — Zweitens tritt bei der Lösung der Salze eine Volumkontraktion ein. Nehmen wir z. B. 96 g destilliertes Wasser von 4^0 C und 4 g Natriumchlorid. Das Volum des Wassers ist 96 ccm, das Volum des Salzes 1,85 ccm. Das Volum der Lösung ist aber nicht 97,85 ccm, sondern nur 97,18 ccm und die Dichte nicht 1,022 sondern 1,029. — Die Volumkontraktion ist für verschiedene Salze verschieden, da aber das Kochsalz mehr als drei Viertel des gesamten Salzgehaltes im Meerwasser ausmacht, ist seine Volumkontraktion maßgebend, so daß obiges Beispiel eine ziemlich gute Vorstellung von den tatsächlich obwaltenden Verhältnissen gibt.

Außer vom Salzgehalte hängt die Dichte des Meerwassers noch von der Temperatur ab, d. h. sie ist eine Funktion zweier unabhängiger Variabeln.

Es gibt zahlreiche empirische Formeln, welche diese Abhängigkeit ausdrücken. Meist sind sie ziemlich kompliziert und nicht besonders bequem. Deswegen werden wir hier eine Formel Knudsens anführen, welche nur für die Temperatur 0^0 gilt — folglich nur ein Argument: den Salzgehalt enthält. Ist ϱ_0 die Dichte des Wassers bei 0_0 und S der Salzgehalt in Grammen pro Kilogramm Wasser, so lautet die Formel:

$$\varrho_0 = 1 - 93 \cdot 10^{-6} + 8149\, S \cdot 10^{-7} - 482\, S^2 \cdot 10^{-9} + 68\, S^3 \cdot 10^{-10}. \quad 2$$

Der Salzgehalt steht aber in einem nahezu konstanten Verhältnis (vergl. vorigen Abschnitt) zum Chlorgehalt, und man kann deshalb statt S den Chlorgehalt Cl als unabhängige Variable einführen. Man erhält dann:

$$\varrho_0 = 1 - 69 \cdot 10^{-6} + 14708\, Cl \cdot 10^{-7} - 1570\, Cl^2 \cdot 10^{-9} + 398\, Cl^3 \cdot 10^{-10}. \quad . \; . \; . \; . \; 3$$

Für andere Temperaturen geben wir eine Tabelle. Sie wurde berechnet teils auf Grund der Formel 2, teils auf Grund der Tabelle auf S. 232 und 233 der Ozeanographie Krümmels, die ihrerseits auf den Tabellen Knudsens beruht. Dabei wurden die letzten Dezimalen abgerundet.

Tabelle IV.

Dichte des destillierten Wassers und des Meerwassers.

Temperatur in °C	Destilliertes Wasser 0	Salzgehalt in Grammen pro Kilogramm Wasser 10	20	30	35	40
— 2	(0,99969)	1,00792	1,01605	1,02415	1,02821	1,03233
0	0,99987	1,00801	1,01607	1,02410	1,02813	1,03222
5	0,99999	1,00796	1,01586	1,02374	1,02770	1,03172
10	0,99973	1,00756	1,01533	1,02308	1,02698	1,03093
15	0,99913	1,00684	1,01450	1,02215	1,02599	1,02990
20	0,99823	1,00585	1,01342	1,02098	1,02478	1,02865
25	0,99708	1,00461	1,01211	1,01959	1,02336	1,02720
30	0,99568	1,00314	1,01057	1,01800	1,02175	1,02555
33	0,99473	1,00216	1,00955	1,01696	1,02069	1,02448
17,5	0,99871	1,00638	1,01399	1,02159	1,02541	1,02930

Als Einheit wurde, wie üblich, die Dichte des destillierten Wassers bei 4° C genommen. Die Dichte des destillierten Wassers für — 2° C ist eingeklammert, weil — 2° unterhalb des Gefrierpunktes liegt; es ist die Dichte des unterkühlten Wassers. In der letzten Zeile wurde gesondert die Dichte bei 17,5° angegeben, weil in der deutschen, russischen und skandinavischen ozeanographischen Literatur diese Temperatur (= 14° R.) als normal angenommen wird und die Aräometer der erwähnten Länder dieser Temperatur angepaßt sind. Mit Hilfe der Tabelle IV kann man durch Interpolation die Dichte finden, wenn Temperatur und Salzgehalt — oder den Salzgehalt, wenn Dichte und Temperatur — oder die Temperatur, wenn Dichte und Salzgehalt gegeben sind.

Destilliertes Wasser hat das Maximum der Dichte bei 3,98° C; salziges Wasser hat das Maximum der Dichte bei um so niedrigeren Temperaturen, je höher der Salzgehalt ist. Speziell das Meerwasser erreicht das Dichtemaximum bei folgenden Temperaturen:

Tabelle V.

Salzgehalt in Grammen pro Kilogramm Wasser	Temperatur in ° C	Maximale Dichte
0	3,98	1,00000
10	1,86	0818
20	— 0,31	1607
30	— 2,47	2415
35	— 3,52	2822
40	— 4,54	3232

Dazu muß bemerkt werden, daß außer der ersten, für reines Wasser gültigen Zahl diese Zahlen nicht direkt experimentell bestimmt, sondern berechnet worden sind; nämlich die Temperaturen von Knudsen und die Dichten von Krümmel.

Die Dichte ist nichts anderes als das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, bezogen auf das Gewicht des destillierten Wassers bei 4° C. Zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes bedient man sich der Aräometer. Bei deutschen, russischen und skandinavischen Aräometern wurde nicht das Gewicht des reinen Wassers bei 4°, sondern bei 17,5° als Norm gewählt, außerdem sind sie bei 17,5° C geeicht worden. Praktische Rücksichten waren hierfür maßgebend, da man eine Temperatur als Norm haben wollte, die sich wenig von den in Oberflächengewässern häufigsten Temperaturen unterscheidet. Ein solches Aräometer, in ein Meerwasser von 17,5° C getaucht, gibt direkt das spezifische Gewicht, bezogen auf das Gewicht des destillierten Wassers bei 17,5° C. Um daraus das spezifische Gewicht, bezogen auf destilliertes Wasser bei 4° — d. h. die Dichte des Meerwassers — zu erhalten, muß man mit 0,99871 (der Dichte des destillierten Wassers bei 17,5°) multiplizieren. Hat man z. B. 1,02 abgelesen, so multipliziert man dies mit 0,99871 und erhält 1,01868 als Dichte des Meerwassers bei 17,5° C. Anf Grund der Tabelle IV wird man dann den Salzgehalt 26,17 und mit Hilfe dieses Salzgehaltes die Dichte bei irgendeiner anderen Temperatur finden. In Laboratorien werden vielfach Aräometer gebraucht, bei denen das Gewicht des destillierten Wassers bei 4° C als Norm dient, die aber für die Temperatur 15° C geeicht sind. Diese Aräometer, in ein Meerwasser von 15° C Temperatur getaucht, geben direkt dessen Dichte bei 15° an. Englische Aräometer sind meist für 15,56° C (= 60° F.) geeicht, aber ebenfalls auf destilliertes

Wasser von 4° C bezogen; sie geben ebenfalls direkt die Dichte an, aber nicht bei 15°, sondern bei 15,56° C. Andere englische Aräometer sind nicht nur für 15,56° C geeicht, sondern auch auf destilliertes Wasser bei 15,56° C bezogen. Offenbar verhalten sie sich ebenso wie die deutschen bezw. russischen und skandinavischen Aräometer, welche die Temperatur 17,5° C gleichzeitig als Normal- und als Eichtemperatur haben. — Taucht man aber das Aräometer in Wasser von einer anderen Temperatur als der Eichtemperatur, so muß man in der Regel gewisse Reduktionen ausführen. Denken wir uns z. B., daß ein Aräometer, das für 17,5° C und für die Normaltemperatur 17,5° C geeicht wurde, in Wasser von 25° C getaucht wird und daß man 1,02 abliest, so fragt es sich, wie groß ist das spez. Gewicht dieses Wassers bei 17,5°, bezogen auf 17,5°? Zuerst berechnen wir, wie oben, die Dichte des Meerwassers und erhalten 1,01868 als Dichte bei 25°. Mit Hilfe der Tabelle IV finden wir, daß dies Wasser vom Salzgehalt 28,78 ist, welches bei 17,5° die Dichte 1,02066 hat; aber die Dichte des destillierten Wassers bei 17,5° ist 0,99871; folglich ist das spez. Gewicht unseres Wassers bei 17,5° und auf die Normaltemperatur 17,5° bezogen, oder, wie man dies gewöhnlich bezeichnet,

$$S_{17,5}^{17,5} = \frac{1,02066}{0,99871} = 1,02198.$$

Mit einem Aräometer, das bei 15° C geeicht und auf 4° C bezogen ist, fällt die erste Reduktion, das ist die Multiplikation mit der Dichte des destillierten Wassers bei 15° C weg, die zweite Reduktion bleibt — mutatis mutandis — bestehen. Wie man sieht, kann die Rechnung zuweilen ziemlich umständlich sein. Es existieren aber spezielle Tafeln von Knudsen*), welche diese Rechnung ungemein erleichtern. Es kommt oft vor, daß man genötigt ist, von einer Normaltemperatur zu einer anderen überzugehen. Es sei z. B. das spez. Gewicht bei 15,56° auf die Normaltemperatur 4° C bezogen, also $S_4^{15,56}$ gegeben, und es wird $S_{17,5}^{17,5}$ — also das spez. Gewicht bei 17,5° und auf die Normaltemperatur 17,5° bezogen — gesucht. $S_4^{15,56}$ ist zugleich die Dichte bei 15,56°, mit dieser Dichte geht man in die Tabelle III ein und findet die zugehörige Dichte bei 17,5°, sagen wir $\varrho_{17,5}$. Diese Dichte, durch die Dichte

*) Knudsen, Hydrographische Tabellen. Kopenhagen und Hamburg 1901.

des destillierten Wassers bei 17,5°, d. h. durch 0,99871 dividiert, gibt die gesuchte Dichte, d. h.

$$S_{17,5}^{17,5} = \frac{\varrho_{17,5}}{0,99871}$$

usw. usw.

Hat man das spez. Gewicht bei 17,5°, bezogen auf 17,5°, d. h. $S_{17,5}^{17,5}$, so kann man den Salzgehalt σ mit Hilfe einer empirischen Formel leicht bestimmen.

Es ist nämlich in Grammen

$$\sigma = k\,(S_{17,5}^{17,5} - 1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad 4$$

wo k einen Faktor bezeichnet, der aus der nachfolgenden Tabelle interpoliert werden kann.

Tabelle VI.

Werte des Faktors *k*.

Für $\sigma = 2$	5	10	15	20	25	30	35	40
1274	1295	1302	1305	1308	1309	1309	1309	1308

Da σ gesucht wird, muß man sich der Näherungsmethode bedienen. Es sei z. B. $S_{17,5}^{17,5} = 1{,}01$. Man setzt zunächst $k = 1300$ und findet $\sigma = 13$; diesem Werte entspricht aber nach Tabelle VI $k = 1303{,}8$, worauf die Formel 4 $\sigma = 13{,}038$ ergibt. Das ist auch eine hinreichende Annäherung: man kann für σ diesen letzten Wert oder rund 13,04 g Salz pro Kilogramm Wasser nehmen.

§ 4. Andere Eigenschaften des Meerwassers. Gefrier- und Siedepunkt. Wärmekapazität. Wärmeleitfähigkeit. Kompressibilität.

Der Gefrierpunkt ist um so niedriger, je höher der Salzgehalt*); der Siedepunkt liegt bei höherem Salzgehalt etwas höher, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht.

*) Weiteres darüber siehe im dreizehnten Kapitel.

Tabelle VII.

Salzgehalt	Gefrierpunkt	Siedepunkt
0	0,00°	100,00°
10	— 0,53°	100,16°
20	— 1,07°	100,31°
30	— 1,63°	100,47°
35	— 1,91°	100,56°
40	— 2,20°	100,64°

Da der Salzgehalt des Meerwassers in den Ozeanen ungefähr 35‰ beträgt, so ist sein Gefrierpunkt — 1,91° und sein Siedepunkt 100,56° C. Die Dichte beim Erstarren beträgt 1,02821, wie man leicht aus Tabelle IV berechnen kann. Gleichzeitig sieht man aus den Tabellen V und VII, daß die Temperatur der größten Dichte unterhalb des Gefrierpunktes liegt, so daß das ozeanische Wasser nur im unterkühlten Zustande seine größte Dichte erreichen kann. Der Dampfdruck des Meerwassers ist niedriger als der entsprechende Dampfdruck des reinen Wassers. Infolgedessen ist der Siedepunkt höher als beim reinen Wasser, ferner geht das Verdampfen des Meerwassers langsamer vor sich als das des reinen.

Man weiß, daß hohe Temperatur*), niedriger Druck, Sonnenschein und Wind dem Verdampfen günstig sind; die ganze Verdampfungsfrage ist jedoch noch nicht aufgeklärt. Es fehlt nicht an Beobachtungsmaterial, insbesondere bezüglich der Verdampfung des Süßwassers, aber es gibt bisher keine befriedigende Verdampfungstheorie.

Nach den Beobachtungen E. Mazelles verdampfen jährlich zu Triest im Schatten 50 cm Meerwasser ($S = 37{,}3‰$) und 61,7 cm Süßwasser; das Verhältnis dieser Zahlen ist 8 : 100. Ein noch kleineres Verhältnis hat Roudaire gefunden, nämlich 62 : 100. — Nach 7jährigen Beobachtungen Okadas verdampfen zu Azino in Japan 119,4 cm Meerwasser und 125,6 cm Süßwasser. Hier hat das Verhältnis der Salzwasserverdampfung zur Süßwasserverdampfung den Wert 95 : 100, was mit dem von Dieulafait aus Beobachtungen an der südfranzösischen Küste und zu Constantine in Algerien berechneten Verhältnis 96,5 : 100 übereinstimmt. Ebenso stark voneinander abweichend sind Schätzungen des absoluten Betrages der Verdampfung in den Meeren. Während Dieulafait

*) Bei 30° C ist die Verdampfung viermal so groß als bei 1° C.

die Verdampfung im Mittelmeere auf 1,7 m während der sieben Monate vom 1. Mai bis 1. Dezember, und Haughton die jährliche Verdampfung in äquatorialen Meeren auf 2,5 m schätzt, gibt Blanford für die ostindischen Gewässer nur 0,9 m im Jahre an.

Sicher ist die Wärmekapazität des Meerwassers ebenso wie die Wärmekapazität anderer Körper eine Funktion der Temperatur. Leider ist die Abhängigkeit der Wärmekapazität von der Temperatur noch nicht erforscht; wir können die Wärmekapazität bloß bei einer Temperatur, nämlich 17,5° C, angeben.

Tabelle VIII.

Salzgehalt	Wärmekapazität in Grammkalorien pro g
10‰	0,968
20 „	0,951
30 „	0,939
35 „	0,932
40 „	0,926

Zum Vergleich führen wir die Wärmekapazität einiger in der Natur weit verbreiteten Körper in denselben Einheiten an.

Die Wärmekapazität beträgt für: trockene Luft 0,237, Quarz 0,191, Blei 0,032. Die Wärmeleitfähigkeit des Meerwassers ist ebenfalls ein wenig kleiner als die Leitfähigkeit des Süßwassers, sie beträgt in C. G. S.-Einheiten ungefähr 0,0012, d. h. ein Dreißigstel desselben Koeffizienten für Eisen. Die thermometrische Wärmeleitfähigkeit, d.h. derselbe Koeffizient durch Wärmekapazität und Dichte dividiert, hat ebenfalls einen von 0,0012 wenig verschiedenen Wert, da Wärmekapazität und Dichte von Eins wenig verschieden sind. Der thermometrische Koeffizient ist ungefähr hundertfünfzigmal so klein wie der entsprechende Koeffizient für Eisen.

Der Koeffizient der inneren Reibung für Meerwasser (vom Salzgehalt 35‰) ist nach den Versuchen E. Ruppins um 5 Proz. größer als derselbe Koeffizient für Süßwasser; aber sein Verhalten ist dem Verhalten jenes Koeffizienten ganz gleich: er nimmt auch rasch ab, wenn die Temperatur zunimmt. Der Koeffizient der inneren Reibung für Süßwasser kann durch die Formel*):

$$\frac{\eta}{1 + 0{,}03368\,t + 0{,}000221\,t^2}$$

*) E. G. Coker und S. B. Clement, On the variation of the critical velocity . . . Phil. Trans. R. Soc. London, Bd. 201 A (1903), S. 61.

ausgedrückt werden. Dabei bezeichnet t die Temperatur in ^{0} C und η eine Konstante, deren Wert in C. G. S.-Einheiten ungefähr 0,018 beträgt. Leider ist dieser Wert nicht genauer bekannt; mehr als drei Dezimalen können wir nicht benutzen, da die vierte ganz unsicher ist.

Die Kompressibilität des Meerwassers ist ebenso wie die anderer Flüssigkeiten unbedeutend, in großen Tiefen jedoch, wo der Druck nach Hunderten von Atmosphären zu zählen ist, nicht ohne Einfluß auf die Dichte. Gewöhnliches ozeanisches Meerwasser von $35^0/_{00}$ Salzgehalt hat die Dichte 1,028 (bei dem Druck einer Atmosphäre und 0^0 C 1,02813) und Quecksilber hat die Dichte 13,596. Infolgedessen ist der Druck von $\frac{0,76 \times 13,596}{1,028} = 10,05$ m Meerwasser dem Atmosphärendruck äquivalent, und am Boden der „*Nero*"-Tiefe muß demnach der Druck ungefähr 960 Atmosphären betragen. Es scheint, daß der Kompressibilitätskoeffizient des Seewassers etwas kleiner ist als der entsprechende des Süßwassers. Nach den Untersuchungen Amagats nimmt letzterer mit wachsender Temperatur etwas ab. Wichtiger ist die Abnahme mit wachsendem Druck: während bei 0^0 C zwischen 1 und 25 Atmosphären der Kompressibilitätskoeffizient des Süßwassers sich durch die Zahl*) 0,0000525 ausdrückt, hat er zwischen 900 und 1000 Atmosphären nur noch den Wert 0,0000389. Wegen der Schwierigkeit, welcher die experimentelle Bestimmung dieses Koeffizienten begegnet, darf man sich nicht wundern, daß verschiedene Beobachter (die übrigens mit Wasser von verschiedenem Salzgehalte gearbeitet haben) für den Kompressibilitätskoeffizienten des Meerwassers Zahlen zwischen 0,0000413 und 0,0000491 pro Atmosphäre gefunden haben. Infolge des Druckes muß die Dichte in großen Tiefen größer sein als an der Oberfläche. Nehmen wir z. B. den Koeffizient 0,000042 pro Atmosphäre oder besser 0,0000042 pro Meter Seewasser, so wird in der Tiefe von p-Metern die Dichte ungefähr im Verhältnis $(1 + 0,0000042\, p)$ größer sein. Also Wasser von 1,028 Dichte an der Oberfläche muß in einer Tiefe von 5000 m ($p = 5000$) ungefähr die Dichte 1,050 haben.

§ 5. Die Farbe des Meerwassers.

Eine dünne Schicht reinen, d. h. ungetrübten Meer- oder Seewassers ist durchsichtig und farblos, aber das Licht, welches eine

*) Ebenfalls nach Amagat.

mehrere Meter dicke Wasserschicht durchsetzt hat, ist deutlich blau. Das rührt daher, daß Wasser hauptsächlich rote und gelbe Strahlen, viel schwächer jedoch blaue und violette absorbiert. Eine mehrere hundert Meter dicke Schicht noch so reinen Wassers läßt so wenig Licht durch, daß in großen Tiefen, wenigstens für ein Menschenauge, ewige Finsternis herrschen muß. — Die Absorption der roten und gelben Strahlen macht das Blau zur natürlichen Farbe des Meeres und der Seen; die Färbung rührt von denjenigen Strahlen her, die bis zu einer gewissen Tiefe gelangten, dort reflektiert und wieder an die Oberfläche zurückgesandt wurden. Je größer die Tiefe, in welcher das Licht reflektiert wurde, desto länger der im Wasser zurückgelegte Weg, desto gründlicher die Reinigung des Lichtes von roten, gelben und grünen Strahlen, desto reiner das Blau der nach oben reflektierten Strahlen. Infolgedessen erscheinen tiefe, sehr klare Wassermassen intensiv blau. Wenn aber das Wasser trübe ist, so ist der Bruchteil von Strahlen, welche nach einem kurzen Weg im Wasser von kleinen Körpern reflektiert wurden, größer, demnach also auch der Anteil nicht absorbierter roter, gelber und grüner Strahlen. Infolgedessen erscheint uns das getrübte Wasser grünlich oder grün. Mit einem Wort: die Farbe der Meere und Seen hängt von der Reinheit des Wassers ab. Reines, klares Wasser, d. h. Wasser, in welchem nur wenige anorganische und organische Körperchen suspendiert sind, erscheint uns blau; trübes Wasser, d. h. solches, in welchem viele kleine mineralische Teilchen oder Organismen (Plankton) schwimmen, erscheint uns grün, schmutziggrün, gelblich, je nach Quantität und Färbung der trübenden Massen. Großer Salzgehalt wirkt nur indirekt im Sinne der Begünstigung der blauen Färbung, indem anorganische Trübung in salzigem Wasser schneller zu Boden sinkt (vergl. zwölftes Kapitel, § 8) und ein starker Salzgehalt auch dem organischen Leben hinderlich wird. Diese letzte Bemerkung bezieht sich insbesondere auf Salzseen von starker Konzentration, deren Wasser beinahe frei von Trübung ist. Es ist indes möglich, daß noch *andere Faktoren* die intensiv blaue Färbung der Salzseen von starker Konzentration und überhaupt die Farbe des Wassers bedingen.

Ähnlich dem Einfluß des Salzgehaltes und ebenfalls indirekt ist die Wirkung der Temperatur. Im warmen Wasser ist die Reibung geringer als im kalten, und die anorganische Trübung sinkt rascher; gleichzeitig sind warme Gewässer weniger reich an Organismen als

kalte. Das ist wahrscheinlich der Hauptgrund, warum warme tropische und äquatoriale Meere häufiger blau aussehen, als die kalten polaren.

An den Flußmündungen, wo der Fluß beständig getrübtes Wasser zuführt, an den Küsten, wo die Brandung Gesteinsteilchen dem Lande entreißt, in seichten Gewässern, wo der Wogengang die Sedimente am Meeresboden aufwühlt, nimmt Wasser eine schmutziggrüne Färbung an. Weit vom Lande, über großen Tiefen, im ruhigen Zustande erscheint das Wasser häufiger blau.

An dieser Stelle wollen wir gleich erwähnen, daß die Brechungsindices für Salzwasser größer sind als für Süßwasser.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Salzwasser ist beinahe dieselbe wie im Süßwasser: sie beträgt ungefähr 1450 m pro Sek. In großen Tiefen muß sie, trotz der Zunahme der Dichte, wegen der geringeren Kompressibilität größer sein.

§ 6. Gase im Meerwasser.

Das Meerwasser enthält Luft, aber wegen seiner größeren Absorptionsfähigkeit für Sauerstoff als für Stickstoff in anderer Zusammensetzung als die Atmosphäre. Ebenso wie in der Atmosphäre bilden die Gase keine chemische Verbindung sondern ein Gasgemisch.

Die Quantität eines Gases, welche das Wasser bei gegebenem Salzgehalt und gegebener Temperatur absorbieren kann, ist bei weitem nicht identisch mit der Quantität, welche das Wasser tatsächlich enthält. Es gibt gesättigtes, ungesättigtes und übersättigtes Wasser. Zuerst wollen wir der Frage nähertreten, wieviel Sauerstoff bzw. Stickstoff Wasser überhaupt absorbieren kann. Auf Grund der von Dr. Fox gelieferten Daten gibt Krümmel (l. c. S. 296) zwei Tabellen, die hier im Auszug wiedergegeben werden. (Siehe nächste Seite.)

Die Gasmengen sind überall in Kubikzentimetern gegeben, wobei man sich vorstellt, daß die Temperatur des Gases 0° und der Druck eine Atmosphäre (760 mm Quecksilber) beträgt. Ferner sind die Absorptionskoeffizienten in der Voraussetzung berechnet, daß das Wasser sich unter dem Druck einer Atmosphäre Luft von gewöhnlicher Zusammensetzung (21 Raumteile Sauerstoff, 79 Raumteile Stickstoff) befindet. Unter dem Druck einer Atmosphäre reinen Sauerstoffs würden alle Absorptionskoeffizienten für Sauerstoff ent-

sprechend größer sein, z. B. für Süßwasser bei 0° 48,98 ccm statt 10,29 ccm. — Unter gleichen Bedingungen, d. h. bei 760 mm Druck reinen Stickstoffs und 0° würde der Absorptionskoeffizient des Süßwassers 23,50 ccm statt 18,56 ccm betragen usw. Die Zahlen beider Tabellen können sofort in Gewichte umgewandelt werden. Bei 0° und 760 mm Druck wiegt ein Kubikzentimeter Sauerstoff 1,4292 Milligramm und ein Kubikzentimeter Stickstoff 1,2542 Milligramm. Multipliziert man die Zahlen der Tabelle IX mit 1,4292 und die Zahlen der Tabelle X mit 1,2542, so erhält man alles in Milligrammen.

Tabelle IX.

Sauerstoff.

(Gasmenge in ccm pro Liter Wasser.)

Temperatur in °C	Salzgehalt in Grammen pro Kilogramm Wasser					
	0	10	20	30	35	40
— 2	10,88	10,18	9,50	8,82	8,47	8,12
0	10,29	9,65	9,01	8,36	8,03	7,71
5	9,03	8,48	7,94	7,40	7,13	6,86
10	8,02	7,56	7,10	6,63	6,40	6,17
15	7,22	6,83	6,43	6,04	5,84	5,64
20	6,57	6,22	5,88	5,53	5,35	5,18
25	6,04	5,72	5,40	5,08	4,93	4,77
30	5,57	5,27	4,96	4,65	4,50	4,35

Tabelle X.

Stickstoff.

(Gasmenge in ccm pro Liter Wasser.)

Temperatur in °C	Salzgehalt in Grammen pro Kilogramm Wasser					
	0	10	20	30	35	40
— 2	19,45	18,18	16,90	15,63	15,00	14,36
0	18,56	17,37	16,18	14,99	14,40	13,80
5	16,60	15,60	14,59	13,59	13,08	12,58
10	14,97	14,13	13,27	12,43	12,00	11,57
15	13,63	12,91	12,20	11,48	11,12	10,76
20	12,54	11,93	11,32	10,71	10,40	10,09
25	11,66	11,13	10,59	10,05	9,78	9,51
30	10,94	10,46	9,98	9,50	9,26	9,02

Jetzt sehen wir ein, warum — wie im vorigen Abschnitt gesagt wurde — warme und salzhaltige Gewässer ärmer sind an Organismen als kalte und weniger salzige. Die Tabelle IX zeigt uns, daß warmes und stark salziges Wasser weniger von dem für Organismen so notwendigen Sauerstoff absorbieren kann als kaltes und salzärmeres. Gleichzeitig sehen wir, daß das Verhältnis zwischen Sauerstoff- und Stickstoffgehalt sich um so günstiger für den Sauerstoff gestaltet, je kälter und je weniger salzig das Wasser ist.

Wenden wir uns jetzt der zweiten Frage zu: wieviel Sauerstoff und Stickstoff das Meerwasser denn tatsächlich enthält. Wir werden zuerst die Verhältnisse beim Stickstoff besprechen. In Wasserproben aus verschiedenen Tiefen findet man sehr oft annähernd genau so viel Stickstoff, wie zur vollständigen Sättigung bei gegebener Temperatur und Salzgehalt nötig ist; aber es gibt auch Fälle, in denen das Wasser übersättigt oder ungesättigt ist. Die Ursachen der Übersättigung können verschiedene sein. Erstens kann es geschehen, daß kaltes Wasser in Berührung mit Luft zunächst mit Stickstoff gesättigt und erst nachträglich erwärmt wurde. Wenn ferner zwei gesättigte Wassermengen von demselben Salzgehalte, aber verschiedener Temperatur, sich miteinander mischen, so wird das Gemisch etwas übersättigt sein. Nehmen wir z. B. einen Liter Wasser vom Salzgehalt 35‰ und 15° C Temperatur und einen zweiten ebenfalls vom Salzgehalt 35‰ und 25° C Temperatur, beide mit Stickstoff gesättigt. Nach Tabelle X enthält der erste 11,13 ccm und der zweite 9,78 ccm (wir erinnern daran, daß die Gasvolumina auf 0° C und 760 mm reduziert sind). Das Gemisch muß demnach 20,91 ccm Stickstoff enthalten. Nun wissen wir zwar aus Tabelle VIII, daß die Wärmekapazität des Wassers von 35‰ Salzgehalt bei 17,5° C — 0,932 Grammkalorien pro Gramm beträgt, aber wir wissen nicht genau, wie sie mit der Temperatur variiert. Wir können nur sagen, daß es wahrscheinlich keine lineare, aber doch eine langsam mit der Temperatur variierende Funktion ist. Wir gründen diese Meinung darauf, daß die Wärmekapazität des destillierten Wassers zwischen 0° und 40° nach Regnault*) nur um 0,003 Grammkalorien zunimmt. Aber eine Überschlagsrechnung zeigt, daß die Temperatur des Gemisches von der arithmetischen Mitteltemperatur, d. h. von 20° C, höchstens um ein oder zwei Hundertstel Grad C abweichen kann. Ebenso ist die Dichte keine

*) Die Angaben anderer Autoren weichen ziemlich bedeutend hiervon ab.

lineare Funktion der Temperatur; infolgedessen wird das Volum des Gemisches 2 Liter nicht erreichen, es werden ungefähr 2 ccm fehlen. Wir werden jedoch annehmen, daß die Temperatur des Gemisches 20° und das Volum 2 Liter beträgt. Nach Tabelle IX braucht man zur Sättigung von 2 Liter Wasser vom Salzgehalt 35‰ bei 20° C genau 20,80 ccm Stickstoff. Statt dessen bekommt man 20,91 ccm und das Wasser ist etwas übersättigt. Bei einer genauen Rechnung hätten wir eine etwas größere Übersättigung gefunden.

Drittens wird sich bei höherem Druck gesättigtes Wasser bei niedrigerem als übersättigt erweisen. Viertens gibt es gewisse Bakterien, welche Ammoniak, andere, welche Nitrite oder Nitrate zersetzen und stellenweise einen Überschuß an Stickstoff erzeugen können.

Demgegenüber wird Wasser, welches bei höherer Temperatur oder niedrigerem Druck gesättigt wurde, bei niedrigerer Temperatur bzw. höherem Druck ungesättigt erscheinen. Ebenso können gewisse, auf Meerespflanzen lebende Bakterien, welche Stickstoff verbrauchen, stellenweise ein Defizit dieses Gases erzeugen.

Der Überschuß bezw. das Defizit an Stickstoff kann eine Zeitlang bestehen, wenn das Gas sich durch Diffusion ausbreitet. Die Diffusion ist ein langsamer, in ähnlicher Weise wie die Wärmeleitung asymptotisch verlaufender Prozeß.

Nach den Beobachtungen W. E. Adenays sind 75 Tage nötig, damit eine Meerwasserschicht von 1,9 m Dicke sich bis zum Boden mit Stickstoff sättige. Nach den Beobachtungen Regnards und Hüfners geht die Diffusion des Sauerstoffs noch langsamer vor sich, aber man muß gestehen, daß vieles in diesen Beobachtungen noch recht dunkel erscheint. Man ist selbst nicht ganz sicher, ob die Beobachtungen Adenays einerseits und die Regnards andererseits miteinander vergleichbar sind.

Jedenfalls aber ist die Diffusion der Gase im Meerwasser ein langsamer Prozeß und man darf es als ganz natürlich ansehen, daß hie und da kleine Überschüsse bzw. Defizite an Stickstoff auftreten. Im allgemeinen aber kann man sagen, daß das Meer mit Stickstoff nahezu gesättigt ist.

Nicht nur durch Diffusion, sondern auch durch Konvektion verbreiten sich Gase im Meere. Vertikale wie horizontale Strömungen führen im Wasser auch Gase mit, die darin enthalten sind. Mit dem Wasser sinken die Gase auf den Meeresboden oder steigen

zur Oberfläche empor; mit dem Wasser wandern sie von einem Ende der Ozeane zum anderen; mit dem Wasser gehen sie Mischungen ein usw. Außer der gewöhnlichen Konvektion, d. h. außer dem Transporte der Gase mit dem Wasser, in dem sie gelöst sind, spielt warscheinlich eine gewisse Rolle noch die Konvektion durch untersinkende kleine feste Körper, denen die Gase in der Gestalt äußerst kleiner Häutchen anhaften, ferner die Konvektion durch Organismen usw.

Im Gegensatz zum chemisch so trägen Stickstoff ist der Sauerstoff chemisch sehr aktiv. Er geht verschiedene Verbindungen ein und wird von den im Meere lebenden Organismen beständig verbraucht. Infolgedessen sind Sauerstoffdefizite viel häufiger als Stickstoffdefizite. Wasser aus der Tiefe ist regelmäßig sauerstoffarm; seine relative Sättigung hängt hauptsächlich von der Intensität der vertikalen Zirkulation ab. Wo das Oberflächenwasser infolge geringen Salzgehaltes selbst im Winter keine genügende Dichte erreicht und deshalb nicht auf den Meeresboden sinken kann, wo gleichzeitig unterseeische Schwellen horizontale Strömungen ausschließen, kann das Defizit des Sauerstoffs unter gewissen Bedingungen sich bis zur vollständigen Abwesenheit steigern. In diesem Zustande befinden sich die Tiefen des Schwarzen Meeres, die keinen Sauerstoff, wohl aber Schwefelwasserstoff (H_2S) enthalten. Ähnliche Verhältnisse trifft man in gewissen norwegischen Fjorden *(Mofjord)* an.

Kleine Quantitäten von Schwefelwasserstoff finden sich in Küstengewässern, insbesondere in und nahe von Flußmündungen, ferner in Pfützen, welche von der Flut am Gestade zurückgelassen werden. Ohne Zweifel rührt dieser Schwefelwasserstoff von verwesenden toten Tier- und Pflanzenorganismen her. Im Schwarzen Meer*) findet man Schwefelwasserstoff in allen Wasserproben aus Tiefen von über 100 Faden (185 m); Wasser aus geringeren Tiefen ist auch schon zuweilen vergiftet. Von 200 Faden (370 m) ab bis zum Meeresboden konstatiert man eine stetige Zunahme des Schwefelwasserstoffgehaltes; in 2666 m Tiefe steigert sich der Gehalt bis 6,55 ccm pro Liter Wasser. Ob dieser Schwefelwasserstoff von der Verwesung toter Tier- und Pflanzenorganismen, oder, wie einige meinen, von Schwefelquellen am Meeresboden herrührt, ist für uns

*) Man vergl.: Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, 1893, S. 420.

gleichgültig. Ebenso können wir absehen von der Frage, ob und welche Rolle Bakterien bei der Erzeugung des pontischen Schwefelwasserstoffes spielen. Für uns ist die Frage wichtig, warum das Gas nicht reduziert wird. Die Ursache ist nicht so sehr in einer besonderen Intensität der Schwefelwasserstoff erzeugenden Prozesse als im Mangel an Ventilation zu suchen. Der Mangel an Ventilation ist wiederum durch die Schwäche der vertikalen und horizontalen Zirkulation bedingt. Das Oberflächenwasser im Schwarzen Meer ist wenig salzig und von geringer Dichte. Zahlreiche große Flüsse, vor allem der wasserreichste unter allen europäischen Flüssen, die Donau, ergießen ihr Wasser in das Schwarze Meer. Infolgedessen bleibt der Salzgehalt des Oberflächenwassers — trotz ziemlich starker Verdunstung — niedrig, nämlich nur ungefähr 18‰, so daß selbst im Winter die Dichte dieses Wassers der Dichte des Tiefenwassers mit einem Salzgehalte von 22,5 Proz. nicht gleichkommen kann und kein Wasseraustausch zwischen der Oberfläche und dem Meeresboden zustande kommt. — Andererseits ist das Schwarze Meer nur durch die schmale und seichte Dardanellenstraße und den noch schmäleren und ebenfalls seichteren Bosporus mit dem Mittelmeer verbunden. Im Bosporus entführt der Oberstrom das leichte Wasser des Schwarzen Meeres nach der Marmara, der Unterstrom fließt in entgegengesetzter Richtung und bringt dichteres und salzigeres Wasser der Marmara in das Schwarze Meer. Diese Strömungen jedoch, eingeengt in einen schmalen und seichten Kanal, sind zu schwach, um eine starke Horizontalzirkulation in den Tiefen des Schwarzen Meeres hervorzurufen.

Eine intensive Zirkulation, insbesondere eine intensive Vertikalzirkulation, würde das Tiefenwasser mit seinem Schwefelwasserstoff rasch an die Oberfläche befördern, wo es in Berührung mit dem Sauerstoff der Luft bald reduziert werden würde. Da indessen die Zirkulation im allgemeinen schwach ist und speziell die vertikale vielleicht ganz fehlt, so kann der Schwefelwasserstoff nur durch Diffusion an die Oberfläche gelangen. Eigentlich gestalten sich die Verhältnisse so, daß von oben her der Sauerstoff und von unten her der Schwefelwasserstoff diffundieren: die Reduktion des Schwefelwasserstoffs kommt in mittleren Schichten zustande. Infolgedessen nimmt der Gehalt an freiem Schwefelwasserstoff von unten nach oben ab und der Gehalt an freiem Sauerstoff zu. An der Oberfläche und unmittelbar darunter gibt es keinen H_2S und am Meeresboden (in großen Tiefen) keinen oder so gut wie keinen O.

Ob dieser Prozeß stationär ist oder mit der Zeit variiert, wissen wir nicht. Es ist möglich, daß der gesamte Vorrat an H_2S im Schwarzen Meer zunimmt, aber die entgegengesetzte Hypothese ist ebenso berechtigt. Wir haben keine Anhaltspunkte für die jährliche Schwefelwasserstoffproduktion und -abgabe. Jedenfalls ändert sich der Vorrat an H_2S mit einer „geologischen“ Geschwindigkeit, und solange nur mit einem Menschenalter vergleichbare Zeitspannen in Frage kommen, kann der ganze Prozeß als stationär angesehen werden.

Während Sauerstoffdefizite sehr oft, insbesondere im Tiefenwasser, beobachtet werden, sind Sauerstoffüberschüsse sehr selten. Sie kommen aus denselben Ursachen wie die Stickstoffüberschüsse zustande. Übersättigt ist demnach Wasser, welches bei niedrigerer Temperatur oder höherem Druck als dem augenblicklich bestehenden gesättigt wurde. Auch durch Mischung (vergl. oben) kann eine Übersättigung zustande kommen. Endlich kann die Übersättigung von der Anwesenheit eines reichen „Phytoplankton“ (winziger schwimmender Pflanzenorganismen) herrühren, indem Pflanzen tagsüber den Kohlenstoff aus der Kohlensäure assimilieren, nachts aber Sauerstoff ausatmen.

Das Wasser enthält ein wenig Ammoniak, zuweilen, wie Schloesing behauptet, 0,4 bis 0,5 mg pro Liter, gewöhnlich aber noch bedeutend weniger; es enthält auch Spuren von Nitraten und Nitriten. Im Tiefenwasser des östlichen Mittelmeers hat Natterer Spuren von Kohlenwasserstoffen (wahrscheinlich Sumpfgas) nachgewiesen.

§ 7. Kohlensäure im Meerwasser.

Die Kohlensäure tritt im Meerwasser in ihren Verbindungen: Karbonaten und Bikarbonaten, ferner als freies Gas auf. Wir werden uns zuerst der letzteren Art des Vorkommens zuwenden. Die Kohlensäureabsorption hängt von der Temperatur und vom Salzgehalte ab. In der nachstehenden Tabelle haben wir die Daten, welche sich auf Meerwasser vom Salzgehalt 35,19‰ beziehen, der Abhandlung A. Kroghs*), die Daten für das destillierte Wasser den Tabellen Landolt und Börnsteins**) entnommen. Die Gasmengen sind in Litern Gas pro Liter Wasser angegeben, wobei natürlich das

*) A. Krogh, On the Tension of Carbonic Acid. Meddelelser om Grönland, Bd. 26 (1904), S. 356.

**) Landolt und Börnstein, Tabellen, S. 601—602. III. Ausg. Berlin 1905.

Gasvolum auf 0° C reduziert worden ist. Es ist aber wohl zu beachten, daß im Gegensatz zu den Tabellen IX und X die Absorption auf den Druck einer Atmosphäre (760 mm Quecksilber) reinen Kohlendioxyds bezogen ist. Um die Daten der Tabelle XI in Gewichtseinheiten umzuwandeln, braucht man nur mit dem Gewicht eines Liters Kohlendioxyd bei 0° und 760 mm Druck, d. h. mit 1,965 g, zu multiplizieren.

Tabelle XI.

Löslichkeit des Kohlendioxyds (CO_2).

Temperatur	Gasmenge in 1 l Meerwasser vom Salzgehalt 35,19‰	Gasmenge in 1 l destillierten Wassers
0°	1,41 Liter	1,713 Liter
1	1,35 „	1,646 „
2	1,30 „	1,584 „
3	1,25 „	1,527 „
4	1,21 „	1,473 „
5	1,17 „	1,424 „
6	1,13 „	1,377 „
7	1,095 „	1,331 „
8	1,06 „	1,282 „
9	1,025 „	1,237 „
10	0,99 „	1,194 „
11	0,96 „	1,154 „
12	0,93 „	1,117 „
13	0,90 „	1,083 „
14	0,875 „	1,050 „
15	0,85 „	1,019 „
16	0,82 „	0,985 „
17	0,80 „	0,956 „
18	0,775 „	0,928 „
19	0,75 „	0,902 „
20	0,73 „	0,878 „
21	0,71 „	0,854 „
22	0,69 „	0,829 „
23	0,675 „	0,804 „
24	0,66 „	0,781 „
25	—	0,759 „
26	—	0,738 „
27	—	0,718 „
28	—	0,699 „
29	—	0,682 „
30	—	0,665 „

Ein Blick auf die Tabelle zeigt, daß der Absorptionskoeffizient des destillierten Wassers zum Absorptionskoeffizienten des Meerwassers von 35,19‰ Salzgehalt sich bei allen Temperaturen ungefähr wie 1,2 zu 1 verhält. Nach den Untersuchungen A. Hambergs hat das Verhältnis des Absorptionskoeffizienten für 17,8‰ Salzgehalt zum Absorptionskoeffizienten bei 35,2‰ ungefähr den Wert 1,1 und für 26‰ Salzgehalt im Vergleich zu 35,2‰ den Wert 1,05. Also umgekehrt verhalten sich die Absorptionskoeffizienten bei 17,8‰, 26,6‰ und 35,2‰ Salzgehalt zum Absorptionskoeffzienten für 0‰ Salzgehalt wie die Zahlen: 0,917, 0,875, 0,833 zu Eins, d. h. das genannte Verhältnis nimmt um 0,042 ab, wenn der Salzgehalt um 8,6 bis 8,8, im Mittel um 8,7‰ zunimmt. Das gibt uns ein Mittel, die Absorptionskoeffizienten für alle zwischenliegenden Salzgehalte mit hinreichender Genauigkeit zu interpolieren.

Der Druck des atmosphärischen Kohlendioxyds beträgt nur ungefähr 0,0003 Atmosphären, wobei verschiedene Bestimmungen zwischen 0,000258 und 0,000343 Atmosphären schwanken. Es scheint, daß der CO_2-Gehalt über dem Lande durchschnittlich größer ist als über dem Meere, woraus man schließen muß, daß gegenwärtig Kohlensäure vom Meere absorbiert wird.

Da der Partialdruck des Kohlendioxyds über dem Meere nur 0,0003 einer Atmosphäre beträgt, so ist die zur Sättigung eines Liters Meerwasser bei einer gegebenen Temperatur notwendige Gasmenge immer nur 0,0003 der in der Tabelle XI angegebenen. So sind z. B. bei 3,8° C (das ist die mittlere Temperatur des Weltmeeres) zur Sättigung eines Liters Meerwasser nur $1{,}22 \times 0{,}0003$ l = 0,366 ccm — in Gewichtseinheiten 0,72 mg — Kohlensäuregas erforderlich. Natürlich ist der tatsächliche Gehalt vom Sättigungsgehalte verschieden, denn das Wasser kann einmal gesättigt, ein anderes Mal übersättigt oder ungesättigt sein. Immerhin ist der tatsächliche Gehalt von derselben Größenordnung wie der Sättigungsgehalt.

Bedeutend größer, durchschnittlich 50 ccm im Liter Wasser, ist der Gehalt an gebundener Kohlensäure, d. h. derjenigen, welche als Bestandteil der im Wasser gelösten Karbonate und Bikarbonate auftritt. Die Löslichkeit der Bikarbonate ist direkt vom Gehalte an freier Kohlensäure abhängig.

Bei 16° C löst nach Schloesing*) destilliertes, kein Kohlen-

*) Schloesing, Sur la dissolution du carbonate de chaux par l'acide carbonique. C. R. Bd. 74 (1872), S. 1552—1556 und Bd. 75 (1872), S. 70—73.

säuregas enthaltendes Wasser 13,1 mg Kalziumkarbonat: $CaCO_3$, die nahezu 5,8 mg CO_2 enthalten, wenn aber das Wasser Kohlensäure enthält, so wird noch viel Kalziumbikarbonat: $Ca(HCO_3)_2$ gelöst. Die Experimente Schloesings umfaßten das Intervall von 0,0005 bis nahezu einer ganzen Atmosphäre Druck reiner Kohlensäure, sie ergaben ein ziemlich einfaches Gesetz: die Menge des gelösten Bikarbonats, das übrigens nur in Lösung existiert, ist proportional der Potenz 0,37886 des Kohlensäuredruckes.

Aus den Experimenten A. Kroghs*) darf man auf ein ähnliches Verhalten des Meerwassers schließen, doch sind die Verhältnisse bei einer so komplizierten Lösung wie das Meerwasser auch in dieser Hinsicht komplizierter als beim destillierten Wasser. Doch weiß man, daß innerhalb gewisser Grenzen bei konstantem Druck die Alkalinität eines Wassers von gegebenem Salzgehalt konstant bleibt. „Alkalinität" heißt diejenige Menge Kohlendioxyd CO_2, welche ausreicht, um alle Basen in normale Karbonate zu verwandeln. Bezeichnet man die Alkalinität mit α, die Menge CO_2 in normalen Karbonaten mit N und in Bikarbonaten durch B, so ist offenbar, da Bikarbonate doppelt so viel Kohlendioxyd als Karbonate enthalten:

$$\alpha = N + {}^1/_2 B \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Diese Formel gibt uns ein Mittel an die Hand, zu berechnen, wie die gesamte gebundene CO_2-Menge sich unter die Karbonate und Bikarbonate verteilt. Um ein Beispiel zu geben, werden wir einige Daten von A. Hamberg**) anführen. Sie beziehen sich auf 0,00027 Atmosphären, welchen Druck Hamberg für den mittleren Kohlensäuredruck auf dem Meere hält. Die Kohlensäuremengen sind wie überall in Kubikzentimetern pro Liter Wasser gegeben. Die Menge freier Kohlensäure ist mit F, die gesamte Kohlensäuremenge mit T bezeichnet; folglich ist $T = F + N + B$.

Natürlich ist derjenige Teil der Tabelle XII, der sich auf den Salzgehalt 35,13‰, also auf ozeanisches Wasser bezieht, am wichtigsten. Das übrige jedoch lehrt uns, daß mit abnehmendem Salzgehalte die Menge des freien Gases zwar zu-, die Menge des gebundenen dagegen abnimmt, so daß der gesamte CO_2-Vorrat kleiner wird. Ferner lehrt uns die Tabelle XII, daß mit zu-

---

*) A. Krogh, On the Tension of Carbonic Acid. in natural Waters. Meddelelser om Grönland, Bd. 26 (1904), S. 332—434.

**) Zitiert nach A. Krogh, S. 354.

nehmender Temperatur ein Teil des freien Gases entweicht. Wenn aber die Quantität des freien Gases abnimmt, so zerfällt ein Teil der Bikarbonate in normale Karbonate und freie Kohlensäure, die ebenfalls entweicht.

Tabelle XII.

Temperatur	$\sigma = 35{,}13‰$ $\alpha = 26{,}96$				$\sigma = 26{,}58‰$ $\alpha = 20{,}26$				$\sigma = 17{,}78‰$ $\alpha = 13{,}47$			
	F	N	B	T	F	N	B	T	F	N	B	T
0°	0,38	5,07	43,78	49,23	0,40	3,52	33,48	37,40	0,42	1,38	24,18	25,98
10°	0,26	7,06	39,80	47,12	0,27	4,49	31,54	36,30	0,29	2,31	22,32	24,92
20°	0,21	9,64	36,64	44,49	0,22	5,51	29,50	35,23	0,23	2,94	21,06	24,23

Für sehr kleine Drucke ist die Alkalinität konstant, über 0,0003 Atmosphären hinaus versagt die Hypothese der Konstanz der Alkalinität, sie führt zu ganz inkohärenten Resultaten. Offenbar gestalten sich die Verhältnisse komplizierter; aber wie sie sich gestalten, wissen wir nicht. Demzufolge wissen wir auch nicht, wie bei höheren Drucken die Kohlensäure sich unter die Karbonate und Bikarbonate verteilt, wir können nur die gesamten, in diesen wie in jenen Salzen gebundenen Kohlensäuremengen nach A. Krogh*) angeben. Sie beziehen sich alle auf dieselbe Temperatur von 15° C und auf Wasser vom Salzgehalt 35,19‰ und der Alkalinität 22,72 ccm. Die Gasmengen sind in Kubikzentimetern pro Liter Wasser angegeben.

Tabelle XIII.

Partialdruck von CO_2 in Atmosphären	F Freie CO_2	$N+B$ Gebundene CO_2	T Gesamtmenge von freier und gebundener CO_2
0,000070	0,0595 ccm	33,39 ccm	33,45 ccm
0,000115	0,0975 „	36,59 „	36,69 „
0,000150	0,1275 „	37,66 „	37,79 „
0,000295	0,2505 „	40,73 „	40,98 „
0,000540	0,4585 „	43,32 „	43,78 „
0,001390	1,180 „	44,96 „	46,14 „
0,002950	2,520 „	46,24 „	48,76 „
0,035200	29,90 „	53,46 „	83,36 „

*) a. a. O. S. 358.

Man sieht aus obigen Tabellen, daß gesättigte Lösungen um so mehr freie und gebundene Kohlensäure enthalten, je höher der Druck ist. Die Menge der freien Kohlensäure ist natürlich dem Drucke direkt proportional, die Menge der gebundenen wächst viel langsamer als der Druck, und das Gesetz der Zunahme ist nicht leicht übersehbar. Die Karbonate, in denen die gebundene Kohlensäure auftritt, sind in erster Linie das Kalziumkarbonat und -bikarbonat. A. Krogh vermutet*), daß bei Drucken von über 0,0003 Atmosphären die Kohlensäure irgendeine schwächere Säure aus ihren Verbindungen verdrängt.

§ 8. Der Salzgehalt des Meerwassers.

Gut bekannt ist eigentlich nur der Salzgehalt des Oberflächenwassers, ihm gelten deshalb auch die nächsten Ausführungen.

Die Erfahrung lehrt, daß der Salzgehalt des Oberflächenwassers in der Mitte eines Meeres den Salzgehalt der Küstengewässer übertrifft, insbesondere, wenn mehrere wasserreiche Flüsse an der betreffenden Küste münden.

Weiter hängt der Salzgehalt von der Verdampfung ab: die Verdampfung erhöht den Salzgehalt, Niederschläge drücken ihn herunter. Deswegen ist der Salzgehalt im regenreichen äquatorialen Kalmengürtel geringer als in den trockenen Tropenzonen. Auch die Eisbildung erhöht den Salzgehalt, während die Schmelze im entgegengesetzten Sinne wirkt.

Diffusion, Strömungen — vertikale wie horizontale — und Wellengang gleichen die Salzgehaltunterschiede aus. In offenen Ozeanen schwankt der Salzgehalt innerhalb enger Grenzen, z. B. im Atlantischen Ozean zwischen 34,5 und 37,6‰. Anders verhalten sich nur durch Meerengen mit dem Ozean kommunizierende Binnenmeere. Im Mittelmeer, in der Straße von Gibraltar, beträgt der Salzgehalt 36,5—37‰, zwischen den Balearen, Sardinien und Korsika 37—38‰, zwischen Malta und Kreta über 38‰, zwischen Cypern und der syrischen Küste 39—39,5‰. Im Schwarzen Meer haben wir dagegen einen Salzgehalt von 18—18,5‰ und an der Mündung der Donau, sowie im Asowschen Meer kaum die Hälfte davon. Im nördlichen Teil des Roten Meeres geht der Salzgehalt

*) a. a. O. S. 369.

über 40‰ hinaus, im Golf von Akaba erreicht er 40—40,6‰ und im Golf von Suez sogar 41—43‰; hier aber wird der Salzgehalt durch den Zufluß des Wassers der Bitterseen, welche vom Suezkanal durchquert werden, beeinflußt. In Europa ist die Nordsee weniger salzig als der Ozean, die Ostsee noch süßer als das Schwarze Meer. Zwischen der Insel Rügen und der Insel Ösel beträgt der Salzgehalt 7—8‰, zwischen den Ålandsinseln und den finnischen Schären 6—7‰, im innersten Winkel des Bottnischen Meerbusens bei Haparanda und des Finnischen bei Kronstadt 2‰ und darunter; bei Kronstadt ist das Wasser sogar zuweilen trinkbar. Im Nordatlantischen Ozean befindet sich das salzigste Wasser beiderseits des Tropenkreises zwischen 17 und 30° nördl. Breite und zwischen den Kanarischen Inseln und 55° westl. Länge von Greenwich erreicht das Maximum 37,9‰. Im äquatorialen Gürtel ist das Wasser weniger salzig: an der afrikanischen Küste, wo der SW.-Monsun weht, geht der Salzgehalt auf 34,5‰ herunter. Im Südatlantischen Ozean ist der Salzgehalt am größten an der amerikanischen Küste zwischen 12° und 21° südl. Breite, hier erreicht er 37,6‰. Im Indischen Ozean befindet sich ein Maximum des Salzgehaltes an den Meerengen von Bab-el-Mandeb und Hormus, welche in das Rote Meer bzw. in den Persischen Golf führen: es beträgt 36,5‰, ein zweites Maximum mit einem Salzgehalte von 36,4‰ befindet sich zwischen 75° und 110° östl. Länge und 25° und 33° südl. Breite, das Minimum befindet sich westlich der Sundainseln (unterhalb 35‰), wo zwischen der Insel Sumatra und 90° östl. Länge der Salzgehalt bis auf 34‰ fällt. — Im Nordpacifischen Ozean ist das Oberflächenwasser wenig salzig: das Maximum östlich von Japan geht nirgends über 35,9‰ hinaus, im Südpacifischen Ozean haben wir ein absolutes Maximum mit 36,9‰ unter 20° südl. Breite, drei sekundäre Maxima (über 36‰) befinden sich: eines östlich von den Samoa-Inseln, ein zweites unter dem Äquator zwischen 160° und 170° östl. Länge, ein drittes um Neukaledonien und südlich dieser Insel.

Wir führen jetzt den mittleren Salzgehalt der Oberflächengewässer (nach Krümmel, S. 333, aber abgerundet) an:

Atlantischer Ozean	35,4‰
Indischer „	34,8 „
Pacifischer „	34,9 „
Ozeane =	35,0‰

Arktisches Mittelmeer	25,5‰ (?)
Australasiatisches „	33,9 „
Amerikanisches „	36,0 „
Europäisches Mittelmeer samt dem Marmara- und dem Schwarzen Meer	34,9 „
Hudson-Bai	26,0 „ (?)
Ostsee	7,8 „
Rotes Meer	38,8 „
Persischer Meerbusen	36,7 „
Mittelmeere =	30,0‰
Beringsmeer	30,3‰
Ochotskisches Meer	30,9 „
Japanisches „	34,1 „
Ostchinesisches „	32,1 „
Andamanisches „	31,5 „
Kalifornischer Meerbusen	35,5 „
Nordsee	34,2 „
Britisches Randmeer	34,8 „
Laurentisches „	30,5 „
Tasmanisches „	35,5 „
Randmeere =	31,9‰
Nebenmeere =	30,4 „
Weltmeer =	34,5 „

Zu demselben mittleren Salzgehalt von 34,5‰ für die Meeresoberfläche gelangte Krümmel auch mittels Berechnung für die einzelnen Fünfgradzonen.

Es ist schwer, etwas Bestimmtes von der vertikalen Verteilung des Salzgehaltes in den großen Ozeanen zu sagen. In großen Tiefen ist der Salzgehalt so gleichmäßig, daß wirkliche Differenzen sehr oft innerhalb der Beobachtungsfehler liegen. Viele ältere Salzgehaltsbestimmungen sind unbrauchbar, weil die Wasserproben mit undichten Apparaten geschöpft wurden. Ganz zuverlässige Bestimmungen sind nicht besonders zahlreich, doch kann man behaupten, daß vielleicht mit Ausnahme des Nordatlantischen Ozeans, von 2000—3000 m Tiefe angefangen, überall ein nahezu konstanter Salzgehalt von 34,8‰ herrscht. Oberflächendifferenzen verschwinden schon in 400—500 m, zuweilen in etwas größerer Tiefe. Der mittlere Salzgehalt in den großen Ozeanen übertrifft nicht 34,7 bis 34,8‰, und zwar hauptsächlich deswegen, weil der größte unter

den Ozeanen — der Pacifische — verhältnismäßig salzarm ist. Von den beiden übrigen Ozeanen ist der Atlantische etwas salzreicher als der Indische; aber alle diese Differenzen sind geringfügig.

Etwas mehr kann man vom Salzgehalte des Tiefenwassers in kleinen Meeren sagen, teils weil die Differenzen an sich etwas größer sind, folglich leichter entdeckt werden können, teils weil einige kleine Meere, nämlich die europäischen, besser erforscht sind. Das Arktische Meer wurde von Nansen und Scott Hansen während der bekannten Fram-Expedition erforscht. An der Oberfläche befindet sich Wasser vom Salzgehalt 21‰: es sind die amerikanischen und sibirischen Flüsse, ferner die Eisschmelze, welche dieses Salzwasser so verdünnen. Die Zunahme des Salzgehaltes mit der Tiefe geschieht anfangs äußerst rasch — schon in 40 m findet man 33,26‰ — dann wird sie langsamer.

In	250 m	Tiefe	beträgt	der	Salzgehalt	34,97‰,
„	450 „	„	„	„	„	35,07 „
„	2000 „	„	„	„	„	35,08 „
„	2500 „	„	„	„	„	35,19 „
„	3000 „	„	„	„	„	35,12 „

Die letzten beiden Daten beziehen sich eigentlich nur auf eine einzige Station. Die Temperatur in 3000 m Tiefe beträgt — 0,83° C. Die Verteilung des Salzgehaltes im Karischen Meer ist ziemlich ähnlich, das Oberflächenwasser noch weniger salzig (19‰).

Wir haben schon den geringen Salzgehalt des Oberflächenwassers in der Ostsee — insbesondere in dessen östlichem Teile — hervorgehoben, doch befindet sich unter dem starkverdünnten Oberflächenwasser, insbesondere in einzelnen Vertiefungen, ein anderes, etwas salzreicheres Wasser. Für die Ostsee sind die starken jahreszeitlichen Schwankungen des Salzgehaltes, besonders in den nach der Nordsee führenden Meeresstraßen, bezeichnend. Bald treiben die Winde Wasser aus der Nord- in die Ostsee, bald in umgekehrter Richtung. Zu den vom Winde erzeugten Triften gesellen sich Kompensationsströme, es entstehen wechselnde und sehr verwickelte Zustände, die sich nicht in einigen Worten beschreiben lassen.

Durch die Gibraltarstraße strömt oben das Wasser vom Atlantischen Ozean zum Mittelmeer. An der Oberfläche beträgt der Salzgehalt 36,35‰, noch in 25 m Tiefe fand Makarow 36,56‰, aber schon in 50 m 37‰, in 100 m 38,07‰, in 200 m 38,30‰,

in 400 m 38,46‰. Diese letzten Proben wurden schon der unteren Strömung, welche aus dem Mittelmeer nach dem Atlantischen Ozean gerichtet ist, entnommen. Im westlichen Mittelmeer ist das Oberflächenwasser im allgemeinen weniger salzig als in der Tiefe, so beträgt z. B. der Salzgehalt nahe bei Monaco an der Oberfläche 37,7‰, in 300 m Tiefe 37,9‰, unterhalb 500 m 38,4‰. Im östlichen Mittelmeer, zwischen Kreta und Cypern, fand J. Luksch im September 1892 einen um 0,2 bis 0,4‰ größeren Salzgehalt an der Oberfläche als am Meeresgrunde. Hier also, weit von der Gibraltarstraße und von den Dardanellen, gewinnt die Konzentration durch Verdunstung die Oberhand über den Zufluß weniger salzigen Wassers aus dem Ozean und aus dem Mamarameer. Da jedoch die Beobachtung von J. Luksch aus dem Spätsommer herrührt, d. h. aus einer Jahreszeit, in welcher der Einfluß der Verdunstung seine Kulmination erreicht, so kann sie nicht als maßgebend angesehen werden. Eine Untersuchung der Zustände in anderen Jahreszeiten, besonders im Winter, wäre deshalb erwünscht.

Nach J. Spindler lagert in dem Marmarameer ganz oben eine elf oder etwas mehr Meter dicke Schicht Wasser mit einem Salzgehalt von 22 bis 25‰. Das ist das durch den Zufluß aus dem Schwarzen Meer verdünnte Wasser, welches dann durch die Dardanellen nach dem Ägäischen Meer abfließt. Von 11 m Tiefe bis zu 25 m nimmt der Salzgehalt um 3,5‰ zu; in größeren Tiefen geschieht die Zunahme nicht so rasch, doch steigert sich der Salzgehalt bis zu 38,1‰ in 200 bis 300 m Tiefe. An der tiefsten Stelle hat Spindler am Meeresboden 38,4‰ gefunden, obgleich die Zunahme des Salzgehaltes unterhalb des Horizontes von 200 bis 300 m ganz unmerklich wird. Das starksalzige Wasser der Marmaratiefen kann durch den seichten Bosporus nicht in das Schwarze Meer gelangen; es gelangt dorthin nur Wasser aus den oberen Schichten des Marmarameeres. Nach Wrangel und Spindler hat man in der zentralen Gegend des Schwarzen Meeres von der Oberfläche ab bis zu 40—45 m Tiefe ein Wasser vom Salzgehalt 18,3‰, weiter nach unten zu wächst der Salzgehalt und erreicht in 90 m 19,7‰, in 180 m 21,4‰, in 350 m 22‰; von 900 m bis zum Boden (ca. 2000 m) ist der Salzgehalt beinahe konstant, er beträgt 22,4 bis 22,5‰, d. i. nahezu ebensoviel wie für die obere Schicht des Marmarameeres. Im seichten Asowschen Meere kann man keinen wesentlichen Unterschied zwischen der Oberfläche und dem Wasser in tieferen Schichten konstatieren; überall ist das

Wasser stark verdünnt (Salzgehalt 10,6 bis 10,7‰), besonders an der Mündung des Donflusses. In der Meerenge von Kertsch strömt oben bis zu etwa 5 m Tiefe das Wasser des Asowschen Meeres (Salzgehalt ungefähr 10‰) nach dem Schwarzen Meere, darunter fließt in entgegengesetzter Richtung das pontische Wasser mit einem Salzgehalt 16 bis 17‰.

Im Roten Meere ist alles Wasser salzig; auch eine Zunahme des Salzgehaltes von oben nach unten ist vorhanden, im Golf von Akaba z. B. erreichte der Salzgehalt in der Tiefe 42,2‰.

Wir führen jetzt die Tabelle Krümmels (l. c. S. 361) an. Sie bezieht sich nur auf die kleineren Meere und enthält den mittleren Salzgehalt des ganzen Meeres sowie (behufs Vergleichung) den Salzgehalt des Oberflächenwassers, der übrigens schon in der Tabelle auf S. 284 angegeben wurde. Die großen Ozeane sind nicht mit aufgenommen worden aus Gründen, die oben dargelegt wurden.

Mittlere Salzgehalte.

Mittelmeere.

	Oberfläche	Volum
Arktisches	25,5‰	34,8‰
Australasiatisches	33,9 „	34,0 „
Europäisches Mittelmeer samt Marmara- und Schwarzem Meer	34,9 „	36,1 „
Ostsee	7,8 „	10,0 „
Hudson-Bai	(26 ?) „	(30 ?) „
Rotes Meer	38,8 „	39,0 „
Persischer Golf	36,7 „	37,0 „
Mittelmeere im Mittel	30,0‰	35,1‰

Randmeere.

	Oberfläche	Volum
Beringsmeer	30,3‰	32,0‰
Ochotskisches	30,9 „	33,5 „
Japanisches	34,1 „	34,0 „
Ostchinesisches	32,1 „	34,0 „
Andamanisches	31,5 „	33,0 „
Golf von Kalifornien	35,5 „	35,5 „
Nordsee	34,2 „	35,0 „
Britisches Randmeer	34,8 „	35,0 „
Laurentisches „	30,5 „	33,0 „
Tasmanisches „	35,5 „	35,5 „
Randmeere im Mittel	31,9‰	33,0‰

Bildet man den Mittelwert aus allen Volumsalzgehalten, sowohl der Mittel- als der Randmeere, natürlich mit Berücksichtigung der Volumina selbst, so findet man als neues Mittel 34,7‰, also dieselbe Zahl, die oben durch approximative Schätzung für die großen Ozeane gefunden wurde. Somit kann man die Zahl 34,7‰ als mittleren Salzgehalt des Weltmeeres bezeichnen. Freilich ist sie etwas unsicher; es haftet ihr eine Unsicherheit von wenigstens ± 0,2‰ an.

Wir haben gesehen, daß stärker salziges Wasser oft auf weniger salzigem schwimmt. Das ist ganz in der Ordnung, da die Dichte nicht nur vom Salzgehalte, sondern auch von der Temperatur abhängt. Die Ausdehnung des Meerwassers ist (vergl. Tabelle IV) selbst etwas größer als diejenige des destillierten und es kann daher leicht geschehen, daß stärker salzhaltiges aber wärmeres Wasser leichter ist als ein mehr verdünntes aber kälteres.

Es lohnt sich, an dieser Stelle das sogenannte „Soretsche Phänomen" zu erwähnen. — Aus den Experimenten C. Ludwigs (1856) und Ch. Sorets (1881) folgt, daß eine Wassersäule nur bei gleichmäßiger Temperatur einen gleichmäßigen Salzgehalt beibehalten kann. Herrscht aber keine Isothermie*), so wandern die gelösten Salze in der Richtung des Temperaturgefälles, und die Wassersäule bleibt nicht mehr isohalin. Nach van't Hoff beruht dies auf den mit Temperaturunterschieden auftretenden Differenzen im osmotischen Druck. Die Konzentration strebt dadurch einem stationären Zustande zu, in dem sie sich umgekehrt wie die absolute Temperatur verhält. Das ist (nach Krümmel) nun vielleicht in den südhemisphärischen Meeren der Fall. Nach Nernst würden bei der erheblichen Dissoziation der Meeressalze verschiedene Ionen verschieden stark diffundieren.

§ 9. Die Fortpflanzung der Wärme.

Die von der Sonne zugestrahlte Wärme kommt vor allem der Oberflächenschicht zugute, in tiefere Schichten gelangen immer geringere Wärmemengen. — E. Aschkinass hat die Absorption der Strahlen verschiedener Wellenlänge gemessen. Auf Grund dieser Messungen und des von Langley gegebenen Gesetzes der Energieverteilung im Sonnenspektrum berechnet W. Schmidt**),

*) Vergl. Krümmel, a. a. O. S. 344.

**) W. Schmidt, Absorption der Sonnenstrahlung im Wasser. Meteor. Zeitschrift, Bd. XXV, S. 321—323.

daß von 1000 Energieeinheiten bei vertikalem Einfallen der Strahlen folgende Energiemengen bis zu folgenden Tiefen eindringen:

bis 0,01 mm	. . . 993,7	Energieeinheiten
0,1 „	. . . 952,1	„
1,0 „	. . . 859,4	„
1 cm	 780,2	„
10 „	 549,3	„
1 m	 358,1	„
10 „	 181,5	„
100 „	 13,9	„

Ultrarote Strahlen werden beinahe gänzlich in der Oberflächenschicht absorbiert. Die Absorption der sichtbaren Strahlen ist schwächer und erst von 10 cm Tiefe ab merklich. Bis zu 100 m dringt nur $^1/_{70}$ der Energie; es gelangen zu dieser Tiefe nur Strahlen von kürzester Wellenlänge.

Wegen seiner großen Wärmekapazität dauert die Erwärmung sowie die Abkühlung des Wassers sehr lange; sehr langsam geht auch die Fortpflanzung der Wärme durch Leitung und innere Strahlung vor sich. Wir vereinigen diese Prozesse, denn obgleich man in der Theorie Leitung, welche unmittelbar nur auf unendlich kurze Entfernungen, von innerer Strahlung, welche auf endliche Entfernungen wirken soll, zuweilen unterscheidet, so lassen sich doch die Wirkungen beider Prozesse in der Praxis nicht voneinander trennen. Die Wärmeleitung des Wassers ist zwanzig-, dreißig- usw. mal so klein wie die Wärmeleitung der Gesteine und hundertmal so klein wie die Wärmeleitung der Metalle. Es ist also ganz natürlich, wenn die Ausgleichung der Temperatur durch Leitung unvergleichlich langsamer fortschreitet als die Ausgleichung vermittels Konvektion. Man darf aber nicht glauben, daß die Wärmeleitung immer eine ganz untergeordnete Rolle spielt; es gibt im Gegenteil Fälle, in denen sie zu einer relativen Bedeutung gelangt. Solch ein Fall tritt ein bei Erwärmung von oben her: infolge der Verdunstung stellt sich eine vertikale Konvektion in den oberen Schichten ein, die aber nicht besonders tief hinabreicht; dort wo sie aufhört, kommt einerseits die Wärmeleitung, andererseits die direkte Sonnenstrahlung zur Geltung.

Die Verdunstung verschluckt große Wärmequantitäten: um eine 1 cm dicke Wasserschicht in Dampf zu verwandeln, sind

ungefähr 580 Grammkalorien nötig. Haughton schätzt die jährliche Verdampfung in äquatorialen Meeren auf 250 cm*), wozu 145 000 Grammkalorien pro Quadratzentimeter erforderlich wären. Wir werden diese Zahl mit der von der Sonne gelieferten Energie vergleichen.

Legen wir der Rechnung 2,25 Grammkalorien pro Minute und Quadratzentimeter als Wert der „Solarkonstante"**) zugrunde, so erhalten wir, da ein Jahr ungefähr 525 950 Minuten enthält, 1 183 380 Grammkalorien für ein ganzes Jahr. Aber soviel Wärme hätte nur eine stets zu den Sonnenstrahlen normale Fläche pro Quadratzentimeter erhalten. Wegen des Wechsels von Tag und Nacht, wegen des schrägen Einfallens der Sonnenstrahlen reduziert sich diese Wärmequantität, selbst unter dem Äquator, auf weniger als ein Drittel; man muß nämlich für den Äquator mit dem Faktor 0,30532 multiplizieren***). Nach ausgeführter Multiplikation erhalten wir etwas mehr als 360 000 Grammkalorien pro Quadratzentimeter. Aber davon geht der größere Teil durch Absorption in der Atmosphäre, durch Reflexion an den Wolken usw. für die Erdoberfläche verloren. Wieviel davon die Erdoberfläche an einem gegebenen Orte tatsächlich erreicht, läßt sich nicht allgemein sagen, da dies nämlich von den so mannigfachen klimatischen Bedingungen abhängt. Als Beispiel der Wirkung der Absorption und anderer Faktoren wollen wir anführen, daß in Warschau nur etwa 21 Proz. und in Montpellier weniger als 27 Proz. der von der Sonne ausgesandten Strahlungsenergie den Erdboden tatsächlich erreichen. Nehmen wir beispielsweise 25 Proz. an, so werden selbst unter dem Äquator nur 90 000 Grammkalorien pro Quadratzentimeter disponibel; aber außer der direkten kommt noch die diffuse Strahlung in betracht. Diese letztere schätzen wir mit Abbot und Fowle†) auf 19 Proz. der totalen Sonnenstrahlung, d. h. auf ca. 69 000 Grammkalorien. Somit werden wir unter dem Äquator 159 000 Grammkalorien zur Verfügung haben, was 14 000 Grammkalorien mehr

*) Vergl. dieses Kapitel § 4.

**) Bezüglich der „Solarkonstante" vergl. dreizehntes Kapitel, § 4.

***) Chr. Wiener, Über die Stärke der Bestrahlung usw. . . . Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg. 22 (1877), S. 341—368, speziell S. 363.

†) Abbot und Fowle, Annals of the Astroph. Observ. of the Smithsonian Institute, Bd. II (1908), S. 162 und an anderen Orten.

ausmacht, als nötig ist, um den von **Haughton** geforderten Betrag zu decken. — Um die 54000 Grammkalorien, welche die Schätzung **Blanfords** verlangt, zu decken, würde natürlich dieselbe Wärmequantität um so mehr ausreichen.

Infolge der Verdunstung wächst der Salzgehalt, mit ihm sollte die Dichte zunehmen, aber die gleichzeitige Temperaturzunahme beeinflußt die Dichte im entgegengesetzten Sinne. Nehmen wir z. B. ein Wasser an vom Salzgehalt 35‰ und 17,5° Temperatur mit der Dichte 1,02541, nehmen wir weiter an, daß der Salzgehalt um 0,2‰ zugenommen hat, so wird die Dichte dieses Wassers unter oder über der ursprünglichen Dichte 1,02541 liegen, je nachdem die gleichzeitige Temperaturzunahme mehr oder weniger als 0,62° C beträgt, d. h. je nachdem die neue Temperatur oberhalb, bzw. unterhalb 18,12° C liegt. Die Erfahrung lehrt, daß die Konzentration infolge Verdunstung gewöhnlich bald die Oberhand über die Temperatur gewinnt. Im entgegengesetzten Falle würde man oft warmes und stark salziges Wasser über einem kälteren und einige Promille weniger salzigem Wasser beobachten. Das geschieht aber selten: wo das Oberflächenwasser salziger ist als das darunterliegende, beträgt die Salzgehaltdifferenz nur Bruchteile eines Promille. Offenbar muß man zugeben, daß das Oberflächenwasser, in dem die Konzentration am raschesten fortschreitet, bald sinkt, um einem aus etwas tieferen Schichten stammenden Wasser Platz zu machen.

Das Absinken beginnt schon bei äußerst geringen Dichteüberschüssen, infolgedessen geschieht es nicht plötzlich und in großen Massen, sondern allmählich und in winzigen Strömen, vielleicht tropfenweise. Das Wasser sinkt so langsam, daß die Temperatur und der Salzgehalt (dieser letzte durch Diffusion) sich unterwegs mit der Temperatur und dem Salzgehalt der Umgebung ausgleichen können. So entsteht eine vertikale Zirkulation, welche je nach den lokalen und den augenblicklichen Bedingungen mehr oder weniger tief, kaum je aber tiefer als bis zu einigen 10 oder 20 m hinabreicht. Die während der Tagesstunden durch Verdunstung erzeugte Zirkulation führt Wärme von oben nach unten. In der Nacht entsteht wieder eine vertikale Zirkulation, aber aus einem anderen Grunde: jetzt kühlt sich das Oberflächenwasser infolge der Ausstrahlung ab, es wird dichter und sinkt herunter, während wärmeres Wasser von unten aufsteigt. Die nächtliche Zirkulation befördert die Wärme von unten nach oben. Was soeben von der

Zirkulation in den Tages- und Nachtstunden gesagt wurde, kann auf die Zirkulation in der warmen und kalten Jahreszeit übertragen werden, nur reicht die jährliche Zirkulation tiefer als die tägliche, wenn die Jahreszeiten stark ausgeprägt sind.

Der Einfluß des Regens ist diametral entgegengesetzt demjenigen der Verdunstung: der Regen verdünnt das Wasser und bedingt in der Mehrzahl der Fälle eine Temperaturabnahme. Die Verdünnung überwiegt gewöhnlich den Einfluß der Temperaturabnahme: das vom Regen verdünnte Wasser bleibt an der Oberfläche, erst Verdunstung und Diffusion verwischen die Differenzen zwischen dem Oberflächenwasser und den tieferen Schichten. Auf diese Weise gibt der Regen nur selten Anlaß zu einer vertikalen Zirkulation.

Die Meeresströmungen besorgen die Wärmekonvektion hauptsächlich in horizontaler Richtung. An solchen Stellen, wo sie eine vertikale Komponente haben, tragen sie auch zum Ausgleich der Temperaturdifferenzen in vertikaler Richtung bei. Auf die Meeresströmungen werden wir im elften Kapitel zurückkommen.

Auch der Wellengang hat einen Anteil an dem Ausgleich der Temperaturdifferenzen, insbesondere in seichtem Küstenwasser, wo starke Wellen das Wasser bis zum Grunde durchmischen.

Das Meer tauscht mit der Atmosphäre Wärme aus; bald geschieht dieser Ausgleich zugunsten des Meeres, bald zugunsten der Luft. Wegen des enormen Unterschiedes in der Wärmekapazität — die Wärmekapazität des Wassers pro Raumeinheit verhält sich zur Wärmekapazität der Luft wie 3200 zu 1 — müssen sehr große Luftmassen ihre Wärme an das Meer abgeben, bis eine merkliche Steigerung der Meerestemperatur eintritt, während umgekehrt das Meer leicht große Luftmassen erwärmen kann. Der endgültige jährliche Ausgleich gestaltet sich aber in der Regel zugunsten der Atmosphäre, d. h. es ist das Meer, welches im jährlichen Ausgleich einen Teil seiner Wärme zugunsten der Atmosphäre abgibt, denn die Jahrestemperatur des Oberflächenwassers ist in der Regel etwas höher als die der überlagernden Luftschicht. Die Differenz ist gering, durchschnittlich nur 0,2 bis 0,3° C; es gibt selbst negative Differenzen, denen man aber bedeutendere positive Differenzen gegenüberstellen kann. Im Gebiete des Golfstromes im Nordatlantischen Ozean zwischen 40 und 50° nördl. Br. ist die Jahrestemperatur des Oberflächenwassers 1,4° C höher als die der darüberlagernden Luftschicht.

Im Vergleich zu der Wärme, welche von der Sonne, also von oben her, ist die Wärmemenge, welche aus dem Erdinnern, d. h. von unten kommt, verschwindend klein: sie beträgt nur etliche 52 Grammkalorien pro Quadratzentimeter im Jahre. Sie spielt so gut wie keine Rolle im Wärmehaushalt des Meeres. Bei einigen Temperaturmessungen in arktischen Meeren hat man in großen Tiefen eine schwache Zunahme der Temperatur von oben nach unten konstatiert. Ob das auf Rechnung der aus dem Erdinnern kommenden Wärme gesetzt werden kann, mag dahingestellt bleiben. Man fand z. B. in 2900 m Tiefe — 0,81⁰ und auf dem Meeresgrunde in 3800 m Tiefe -- 0,69⁰, oder an einer anderen Stelle in 2624 m Tiefe — 1,6⁰ und am Meeresgrunde in 3173 m Tiefe — 1,5⁰. Die Temperaturzunahme betrug im ersten Falle nur 0,12⁰ auf 900 m und im zweiten 0,10⁰ auf 549 m. Wenn diese Temperaturzunahme nicht auf einem Instrumentalfehler beruht, so ist sie vom theoretischen Standpunkte aus vollkommen zulässig. Bei einer gleichzeitigen Salzgehaltzunahme nach unten könnte das Gleichgewicht sehr leicht erhalten bleiben.

§ 10. Die Temperatur der Oberflächengewässer.

Nach Krümmel*) haben die Oberflächengewässer des Atlantischen Ozeans eine mittlere Temperatur von 16,9⁰ C, des Indischen von 17,0⁰, des Pacifischen von 19,1⁰. Derselbe Forscher schätzt die mittlere Temperatur der Oberfläche aller Ozeane und Meere zwischen 80⁰ südl. Breite und dem Nordpol auf 17,4⁰. Es wurde schon im vorigen Abschnitte gesagt, daß die Jahrestemperatur des Oberflächenwassers in der Regel die Temperatur der angrenzenden Luftschicht übertrifft; gleichzeitig übertrifft sie aber nicht nur um Bruchteile eines Grades, sondern um volle 3⁰ die mittlere Jahrestemperatur der Luft über den Kontinenten im Meeresniveau (die bekanntlich durch Reduktion der wirklich beobachteten Temperaturen auf das Meeresniveau erhalten wird), welche nach J. Hann sich nur auf 14,35⁰ C beläuft. Endlich ist die mittlere Jahrestemperatur der Oberflächengewässer bedeutend höher als die mittleren Temperaturen der ganzen Wassermassen einzelner Ozeane. Krümmel**) schätzt die mittlere Temperatur des ganzen Atlantischen Ozeans auf 4,0⁰, des Indischen auf 3,8⁰,

*) A. a. O. S. 401.

**) A. a. O. S. 495.

des Pacifischen auf 3,7° und die mittlere Temperatur des ganzen Weltmeers auf **3,8°**. Die Differenz: 17,4 — 3,8 = 13,6° ist sehr bedeutend.

Das wärmste Oberflächenwasser mit einer Jahrestemperatur von 28 bis 29° C findet sich im Roten Meer und an der Südwestküste Zentralamerikas im Pacifischen Ozean, aber beide Maxima bedecken keine großen Gebiete. Ein sehr bedeutendes, von der Isotherme 28° umgebenes Gebiet zieht sich längs des Äquators vom Indischen Ozean über das Australasiatische Inselmeer zum Pacifischen Ozean hin, es reicht von 60 bis zu 175° östl. Länge. Das kälteste Oberflächenwasser, mit einer Temperatur von — 1,7°, findet sich im Arktischen und Antarktischen Meer.

Es lohnt sich nicht, die geographische Verteilung der Temperaturen und deren jahreszeitliche Fluktuationen zu beschreiben. Karten geben davon eine viel bessere Vorstellung als die genaueste Beschreibung, aber einige charakteristische Merkmale müssen hervorgehoben werden: 1. Die Jahresisothermen in höheren Breiten der Südhemisphäre laufen den Breitenkreisen nahezu parallel, was sich durch die Monotonie klimatischer Bedingungen in diesen beinahe ausschließlich vom Meere bedeckten Gebieten genügend erklärt, doch biegt die Isotherme 0° im Südatlantischen Ozean nach Norden um und überschreitet den 60. Breitenkreis. In diesem Gebiet muß demnach der Abfluß des kalten antarktischen Wassers nach dem Äquator am stärksten sein. 2. Die großen Äquatorialströmungen sind von Osten nach Westen gerichtet; an den Ostküsten der Kontinente breiten sie sich fächerartig aus und biegen polwärts ab. Infolgedessen entfernen sich auf der Westseite der Ozeane die Isothermen vom Äquator und nähern sich den Polen: insbesondere ist die Westseite der Südsee bedeutend wärmer als ihre Ostseite. 3. Die mittlere Temperatur der Oberflächengewässer in den Ozeanen und Meeren der Nordhemisphäre ist erheblich größer als dieselbe Temperatur auf der Südhemisphäre: Die erste beläuft sich auf 19,2° C, während die zweite nur 16,0° erreicht. Die Ursache liegt auf der Hand: Die Ozeane der Südhemisphäre sind gegen den Pol hin vollkommen offen, nichts hindert den Zufluß der kalten antarktischen Gewässer, während der Pacifische Ozean auf der Nordhemisphäre nur durch die enge und seichte Beringstraße mit dem Arktischen Meere kommuniziert. Der Nordatlantische Ozean ist gegen den Arktischen nicht so abgeschlossen, die unterseeischen Rücken zwischen Europa und Grönland einerseits

und zwischen Grönland und Nordamerika andererseits hindern nur den Zutritt des Tiefenwassers. Der Zutritt des kalten Oberflächenwassers ist nicht gehindert, und die sogenannte Labradorströmung ist sehr kalt. Aber dafür herrscht im Nordatlantischen Ozean die mächtigste aller warmen Strömungen: der Golfstrom, welcher auf weite Strecken die Temperatur der Oberfläche um mehr denn 5° C über die Normaltemperatur erhebt*).

Die Amplitude der jahreszeitlichen Temperaturänderungen der Oberflächengewässer ist klein, bedeutend kleiner als die entsprechende Amplitude der Lufttemperaturänderungen. Große Amplituden kommen nur unter gewissen Bedingungen vor, nämlich entweder dort, wo neben einer großen Amplitude der Lufttemperatur eine schwache Konvektion besteht, oder dort, wo zu verschiedenen Jahreszeiten verschieden temperierte Meeresströmungen herrschen. Als Beispiele der ersten Kombination von Ursachen können wir anführen: 1. den seichten Nordwestwinkel des Schwarzen Meeres, wo die Differenz zwischen der Wassertemperatur im wärmsten und im kältesten Monat 24° C beträgt. Der Hafen von Odessa, sowie ein Streifen Küstenwasser in der Nähe dieser Stadt bedecken sich oft mit Eis. 2. In den inneren Buchten des Gelben Meeres beträgt die Amplitude des Wassertemperatur sogar 27°: der Golf von Petschili hat im Juli und August etwas über 26°; er bedeckt sich im Winter mit Eis, das bei — 1° und darunter entsteht. Das sind aber ganz extreme Amplituden; schon eine Amplitude von 14° C, wie in der nördlichen Adria, gilt als groß. — Beispiele großer Temperaturänderungen — infolge der Abwechslung kalter Strömungen mit warmen und umgekehrt — haben wir südlich und südwestlich von der Neufundland-Bank, wo der warme Golfstrom mit dem kalten Labradorstrom abwechselt, ferner südöstlich der Insel Yézo, wo der warme Kuro und der kalte Oya Shiwo gegeneinander ankämpfen usw.

Aber im allgemeinen sind die Amplituden gering: auf Grund der Karte G. Schotts berechnet Krümmel**), daß 74 Proz. der

---

*) Diese Heizung des Nordatlantischen Ozeans vollzieht sich zum Teil auf Kosten der Südhalbkugel, indem infolge der Konfiguration der brasilianischen Küste (K. *San Roque*) ein guter Teil der warmen südhemisphärischen Strömung in das Karibische Meer abgelenkt wird. Von hier aus gelangt sie in den Mexikanischen Busen und weiter in den Golfstrom.

**) A. a. O. S. 412.

Oberfläche des Weltmeeres eine Amplitude*) unterhalb 5⁰ haben, unter diesen haben wieder 24 Proz. eine Amplitude, die nicht einmal 2⁰ erreicht. Die kleinsten Amplituden (unterhalb 1⁰) hat die äquatoriale Zone, speziell ein Gebiet im Pacifischen Ozean, südlich der Hawai-Inseln, ein zweites zwischen den Phönix-Inseln und Neu-Guinea, eine Fortsetzung desselben zieht sich durch das Australasiatische Meer bis nach Celebes und Timor hin, ein drittes solches Gebiet befindet sich im Indischen Ozean westlich Sumatra. Das Gebiet mit einer Amplitude unterhalb 2⁰ befindet sich teils zwischen den Tropenkreisen, teils, wie es scheint, auf der Südhemisphäre, im Indischen und Pacifischen Ozean, südlich des 50. Breitenkreises. Beide Gebiete zeichnen sich durch die Gleichmäßigkeit ihres Klimas aus, nur ist das Klima des ersten Gebietes gleichmäßig warm und das des zweiten gleichmäßig kalt. Eigentlich dürfte man im zweiten Gebiet eine größere Differenz zwischen den Sommer- und Wintertemperaturen erwarten, aber im Sommer kommt hier mehr kaltes Wasser aus dem schmelzenden antarktischen Eise, außerdem treiben zahlreiche Eisberge bis hierhin, und dies alles zusammen drückt die Sommertemperatur herunter.

Die Verspätung der Maxima und Minima der Lufttemperatur auf den Kontinenten in bezug auf die Maxima und Minima der Sonnendeklination ist eine bekannte Tatsache: im westeuropäischen Klima beträgt diese Verspätung ca. einen Monat. Auf dem Meere ist sie noch größer: im Mittelmeer erreicht das Oberflächenwasser sein Temperaturmaximum im August, sein Minimum im Februar, und in den ägyptischen Gewässern erst im März. Im Nordatlantischen Ozean tritt das Maximum im August, in einigen Gebieten im September, ja selbst im Oktober ein; das Minimum fällt auf den Februar und März. Dieselbe Phasenverspätung beobachtet man auch in anderen Meeren. Sie ist zum Teil durch die große Wärmekapazität des Wassers bedingt: Wasser erwärmt sich langsam und kühlt sich langsam ab — zum Teil hängt sie von den Meeresströmungen ab: es tritt z. B. das Maximum erst dann ein, wenn die Strömung das wärmste Wasser zuführt. Wenn nun dieses warme Wasser aus einem entfernten Gebiete kommt, so kann eine geraume Zeit verstreichen, bis es den betreffenden Ort erreicht. Ebenso sind verschiedene Anomalien im jährlichen Temperaturgange haupt-

*) Man darf nicht vergessen, daß hier stets von der Differenz zwischen der Temperatur des wärmsten und kältesten Monats die Rede ist.

sächlich durch den Einfluß der Meeresströmungen bedingt. Die niedrigste Temperatur, die je im Meere beobachtet wurde, betrug — 3,3° (?), sie wurde östlich von Nova Scotia in der kalten Labradorströmung gemessen. Die höchste im offenen Ozean gemessene Wassertemperatur war 32,2° im westäquatorialen Pacifischen Ozean, aber im Roten Meere hat man schon 34,4° und im Persischen Golf in dessen innerstem nördlichen Winkel sogar 35,6° beobachtet.

§ 11. Die Tiefentemperaturen.

Die Temperatur der tieferen Wasserschichten variiert aus verschiedenen Gründen: Die erste Ursache liegt im Stromwechsel. Wo in gewissen Jahreszeiten eine warme Strömung einer kalten oder umgekehrt weicht, wo in gewissen Jahreszeiten kaltes Wasser aus der Tiefe aufsteigt, muß die Temperatur des Wassers nicht nur an der Oberfläche, sondern bis zu jener Tiefe, bis zu welcher die betreffende Strömung reicht, variieren. Aber auch die täglichen und jährlichen Temperaturschwankungen dringen von der Oberfläche in die Tiefe ein, und zwar durch Leitung und Konvektion. Die Rolle der Wärmeleitung ist zweifellos sehr bescheiden; wenn in Gesteinen die Amplitude der jährlichen Temperaturschwankungen schon in einigen Metern, höchstens 30 m Tiefe auf 0,1° herabsinkt, so muß sie in schlecht leitendem Wasser schon in Tiefen, die nur durch Zentimeter ausgedrückt werden können, ganz unmerklich werden. Anders steht die Sache mit dem unmittelbaren Eindringen der Sonnenstrahlen und der vertikalen Konvektion, besonders diese letzte kann sehr wirksam sein.

In der englischen ozeanographischen Literatur ist die Meinung verbreitet, daß die jährlichen Temperaturschwankungen durchschnittlich bis in 150 Faden (ca. 278 m) Tiefe hinabreichen. Nach Krümmel*) gründet sich diese Meinung nicht auf unmittelbare Beobachtung, sondern auf die Betrachtung der Temperaturkurven. G. Schott**) meint, daß in höheren Breiten Temperaturschwankungen bis in 700 bis 800 m Tiefe fühlbar sind. Wichtig, weil auf fünfjährige Beobachtungen in der Nähe Algiers gestützt, ist die Behauptung Aimés, daß im westlichen Mittelmeer die Temperaturschwankungen bis in 300 bis 400 m Tiefe beobachtet werden

*) A. a. O. S. 417.

**) G. Schott, Wissenschaftliche Ergebnisse der „Valdivia"-Expedition, Bd. I, Ozeanographie, S. 148.

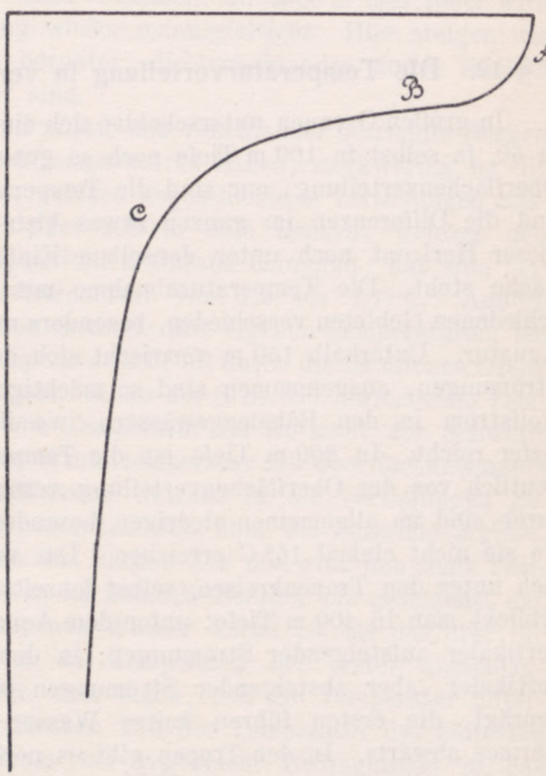
können. Doch kann niemand verbürgen, ob nicht zufällig ein Einfluß von wechselnden Strömungen vorliegt. Andererseits meint J. Hann*), daß diese Schätzungen übertrieben sind und daß speziell im östlichen Mittelmeer jährliche Temperaturschwankungen in 100, vielleicht 110 m Tiefe aufhören. Betreffs der täglichen Temperaturschwankungen akzeptiert J. Hann die übereinstimmenden Resultate der Untersuchungen C. G. Knotts und G. Aimés und fixiert die Tiefe der Schwankungen (im Mittelmeer) auf 20 m. Das Argument, auf welches sich Hann stützt, besteht in Folgendem: Im östlichen Mittelmeer hat das Oberflächenwasser im Winter eine Temperatur von 15 bis 16°, es kann somit nicht tiefer sinken als bis zu dem Horizonte, in welchem diese Temperatur herrscht; die Beobachtungen erweisen nun eine Temperatur von 15 bis 16° in 100 m Tiefe. Von 100 m bis zu etwa 500 m nimmt noch die Temperatur ab, von 500 m ab bis zum Meeresgrunde herrscht eine nahezu konstante Temperatur von 13,6 bis 13,7°. Dieses kältere Wasser rührt nicht von der Meeresoberfläche, sondern von der nördlichen Küste des Mittelmeers und vom Ägäischen Meer her, wo die Wintertemperaturen an der Oberfläche niedriger sind; es kommt mit unteren, langsamen Strömungen in die Tiefen des östlichen Mittelmeerbeckens. Mit einem Wort: die Temperatur dieses Tiefenwassers wird durch Horizontalkonvektion bedingt.

Betrachten wir nun noch die Kurven, welche die vertikale Temperaturverteilung darstellen. Eine typische Kurve (siehe nebenstehende Fig. 26) ist anotherm, d. h. sie stellt eine nach unten stets abnehmende Temperaturverteilung dar. Von der Oberfläche bis zu A geht die Temperaturabnahme sehr langsam vor sich, dann wird sie rascher; bei B hat die Kurve einen Wendepunkt: aus einer nach oben konkaven wird sie zu einer nach oben konvexen; bei C wird die Temperaturabnahme wieder geringer, ja sie nimmt ab bis zum Grunde. Die langsame Temperaturabnahme zwischen der Oberfläche und A erklärt sich durch die hier herrschende energische Vertikalkonvektion, dank welcher die Wärme von der Oberfläche bis zu A relativ rasch befördert wird. Bei einer sehr großen, sagen wir unendlich großen, Geschwindigkeit der Konvektion wäre die obere Schicht absolut isotherm, d. h. die Temperatur wäre von

*) J. Hann, Das Problem der vertikalen Temperaturverteilung im östlichen Mittelmeer. Meteorol. Zeitschr., Bd XXV (1908), S. 215 bis 219 und 323 bis 325.

der Oberfläche bis zum A-Horizonte absolut gleichförmig. Unterhalb B sieht unsere Kurve so aus, wie die Temperaturkurve, welche den Temperaturzustand in einer unendlich ausgedehnten, durch Leitung von oben her erwärmten Platte darstellt, sie hat nämlich dasselbe Aussehen wie die Temperaturkurve im Anfangsstadium, solange die Wärme noch nicht sehr tief eingedrungen ist. Aber aus sehr gewichtigen Gründen müssen wir den thermischen Zustand der Ozeane als durchschnittlich stationär betrachten. Wie ist nun der stationäre Zustand mit einer Temperaturverteilung, welche der Erwärmung, also einem variablen Zustand entspricht, zu vereinen? Sehr einfach: man braucht nur anzunehmen, daß zwischen B und dem Meeresboden eine langsame horizontale Strömung existiert, welche immer frisches, vormals kaltes, Wasser, das erst erwärmt werden muß, zuführt. Deswegen sieht die Temperaturverteilung so aus wie die ersten Stadien der Erwärmung in einem unbeweglichen Körper, obgleich die Temperaturen, die Geschwindigkeiten, kurz alles stationär bleibt. Somit erklärt sich die vertikale Temperaturverteilung durch dieselben unteren Strömungen, deren Existenz durch zahlreiche andere Belege erwiesen ist.

Fig. 26.



Wenn wir an dieser Stelle nur von der Kombination der Wärmeleitung mit der horizontalen Konvektion gesprochen haben, so wollten wir keineswegs die direkte Einwirkung der Sonnen-

strahlen verneinen. Wir wissen zwar, daß diese Einwirkung (vergl. § 9) mit der Tiefe rasch abnimmt, aber die Wirkung der Wärmeleitung ist auch schwach, so daß jene neben dieser nicht ohne weiteres vernachlässigt werden darf. Wir konnten die Wirkung der Strahlung temporär außer acht lassen, da sie sich nicht im entgegengesetzten Sinne der Wirkung der Wärmeleitung, sondern im gleichen Sinne bemerkbar macht.

§ 12. Die Temperaturverteilung in verschiedenen Tiefen.

In großen Ozeanen unterscheidet sich die Temperaturverteilung in 50, ja selbst in 100 m Tiefe noch so gut wie gar nicht von der Oberflächenverteilung, nur sind die Temperaturen etwas niedriger und die Differenzen im ganzen etwas kleiner. Es ist klar, daß dieser Horizont noch unter denselben Einflüssen, wie die Oberfläche steht. Die Temperaturabnahme mit der Tiefe ist in verschiedenen Gebieten verschieden, besonders rasch ist sie unter dem Äquator. Unterhalb 150 m verwischt sich der Einfluß der oberen Strömungen, ausgenommen sind so mächtige Strömungen wie der Golfstrom in den Bahamagewässern, wo ihr Einfluß bedeutend tiefer reicht. In 200 m Tiefe ist die Temperaturverteilung schon deutlich von der Oberflächenverteilung verschieden: die Temperaturen sind im allgemeinen niedriger, besonders unter dem Äquator, wo sie nicht einmal 15° C erreichen. Das wärmste Wasser findet sich unter den Tropenkreisen, selbst jenseits derselben. Dasselbe erblickt man in 400 m Tiefe: unter dem Äquator wird der Einfluß vertikaler aufsteigender Strömungen, in den Tropen der Einfluß vertikaler, aber absteigender Strömungen immer deutlicher ausgeprägt, die ersten führen kaltes Wasser hinauf, die zweiten warmes abwärts. In den Tropen gibt es noch — wenn auch wenig ausgedehnte — Gebiete, wo die Temperatur 14°, im Golfstrom nahe der Nordküste Floridas ein Gebiet, wo sie 18° übertrifft. In 600 und 800 m Tiefe ist die Temperaturverteilung noch der Oberflächenverteilung ähnlich, aber die Temperaturen werden immer mehr einförmig. Noch einförmiger sind sie in 1000 m Tiefe, wo übrigens der Einfluß der unteren Strömungen deutlich hervortritt. Die Temperaturen sind so weit ausgeglichen, daß z. B. im Pacifischen Ozean vom 55° südl. Breite bis zu den Kurilen und Aleuten die Temperatur sich zwischen 3 und 7° hält. Je tiefer, desto gleichmäßiger die Temperatur: in 2000 m Tiefe herrscht eine Temperatur von

2 bis 3° C im ganzen Pacifischen Ozean, ferner im Indischen, soweit derselbe der Südhemisphäre angehört, endlich im südwestlichen Atlantischen Ozean; im übrigen Atlantik herrscht in diesem Horizonte eine Temperatur von über 3° C. In 3000 m Tiefe schwanken die Temperaturen im Pacifischen Ozean nur zwischen 1,6 und 2,2°, in gewissen Gebieten aber läßt sich schon der Einfluß unterseeischer Rücken und Schwellen erkennen. In 4000 m und tiefer wird die Temperaturverteilung wieder mannigfaltiger. Hier steigen wir schon in Vertiefungen herunter, die voneinander durch Rücken und Schwellen getrennt sind.

Es versteht sich von selbst, daß voneinander getrennte Becken und Mulden verschiedene Temperaturen haben; merkwürdig ist die Isothermie des Wassers, welches abgeschlossene Vertiefungen ausfüllt: das große, meist über 5000 m tiefe Becken, welches den größten Teil des Nordpacifischen Ozeans einnimmt, hat eine beinahe konstante Wassertemperatur von 1,6 bis 1,7° C. Andere Becken und Mulden haben ebenfalls ihre eigenen Temperaturen, bei kleineren wird die Temperatur sehr oft durch die im offenen Ozean im Horizonte der niedrigsten Stelle der Schwelle herrschende Temperatur geregelt. Wo die Temperatur im Horizont der Schwelle unterhalb der niedrigsten Wintertemperatur des Oberflächenwassers liegt, ist das kälteste Wasser, welches in die Vertiefungen gelangen kann, dasjenige, welches sich über die Schwelle ergießt. Dieses Wasser füllt dann das Becken aus und gibt ihm seine Temperatur. Wo aber, wie es in höheren Breiten oft geschieht, das von der Oberfläche kommende Wasser kälter ist als das über die Schwelle gelangende, ist die Temperatur des ersten ausschlaggebend. Überhaupt kann man sagen, daß die Temperatur unterseeisch abgeschlossener Becken von der Temperatur des kältesten Wassers abhängt, welches bei gegebenen Bedingungen in das Becken gelangt.

Im äquatorialen Gebiete, in mittleren Breiten, herrscht die anotherme Temperaturverteilung; eine andere Temperaturverteilung wird nur selten und als eine vorübergehende Erscheinung angetroffen. In polaren Meeren ist die mesotherme Temperaturverteilung verbreitet: unten befindet sich kaltes und salziges Wasser, in der Mitte ebenfalls salziges aber wärmeres Wasser aus nicht so hohen Breiten, oben wieder kaltes aber verdünntes und infolgedessen leichteres Wasser, vom schmelzenden Eis oder aus kalten Flüssen herstammend. Im allgemeinen sind die Polargewässer kalt;

oft hat nur die mittlere Schicht eine Temperatur von über 0°, während unten und oben Temperaturen unter 0° herrschen.

In Rand- und Mittelmeeren sind die Verhältnisse ziemlich verwickelt. Es ist hier nicht der Ort, sie zu beschreiben, wir werden nur dem europäischen Mittelmeer ein paar Worte widmen. Das Mittelmeer kommuniziert mit dem Atlantischen Ozean durch die enge und relativ seichte Gibraltarstraße (Krümmel gibt die Tiefe der Schwelle auf nur 229 m an). Oben fließt leichteres, salzärmeres Wasser aus dem Atlantischen Ozean in das Mittelmeer, unten, von etwa 180 m Tiefe ab, strömt das schwerere, stärker salzige Wasser aus dem Mittelmeer in den Ozean. Der Salzgehalt beträgt 36,6‰ an der Oberfläche und 39,4‰ im Horizont der Schwelle. Daraus ersehen wir, daß das atlantische Wasser sich nur an der Oberfläche des Mittelmeeres ausbreiten kann.

Übrigens macht sich sein Einfluß auf die Temperaturen nur im westlichen Teil des Meeres fühlbar. Das atlantische Wasser ist verhältnismäßig kalt. Da es aber auf der Oberfläche bleibt, so erwärmt es sich mit der Zeit. Die Tiefen sind mit Wasser von nahezu konstanter Temperatur erfüllt. In den Tiefen des westlichen Mittelmeerbeckens herrscht eine Temperatur von 12,8°, im Tyrrhenischen Meer von 13,2°, im Gebiete der Syrten von 13,3°, im Ionischen Meer von 13,5°, um Kreta und Cypern von 13,7°, an den tiefsten Stellen — bei 4400 und 4080 m — hat man 13,5° gemessen.

Von der Temperaturschichtung im östlichen Mittelmeere und von der Herkunft des Tiefenwassers haben wir schon im vorigen Paragraphen gesprochen.

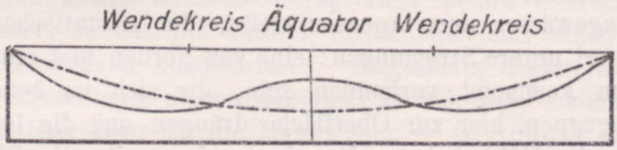
Das Ägäische Meer zerfällt in einige kleine Becken. Jedes von ihnen hat seine eigene Tiefentemperatur, doch sind dieselben nicht besonders stark voneinander verschieden. In dem Marmarameer herrscht von 220—350 m Tiefe bis zum Boden die Temperatur 14,2°; ohne Zweifel ist dieses Becken mit Winterwasser aus dem Ägäischen Meer gefüllt. Im Schwarzen Meer herrscht von etlichen 200 m bis zum Boden eine Temperatur von 8—9°. Dem Salzgehalt nach ist es klar, daß die Tiefen des Schwarzen Meeres mit Wasser aus dem Marmarameer, aber nicht mit Wasser aus den Tiefen dieses Meeres, sondern aus einer höheren Schicht gefüllt sind. Dieses Wasser kommt mit der unteren Strömung durch den Bosporus und wird im Schwarzen Meere im Wege der Diffusion mit dem hiesigen salzärmeren Oberflächenwasser verdünnt. Die Oberflächenschicht

im Schwarzen Meer hat ihr eigenes thermisches „régime“ und ihre eigene Vertikalzirkulation: im Sommer wird sie stark erhitzt, im Winter stark abgekühlt; wegen ihres geringen Salzgehaltes bleibt sie jedoch immer zu leicht, um bis zum Boden zu sinken, sie hält sich auf der Oberfläche des salzigeren Wassers auf. Dank diesen Umständen entsteht hier im Sommer eine dichotherme Temperaturschichtung; das kälteste Wasser befindet sich in einer unbedeutenden Tiefe, darüber und darunter ist die Temperatur höher. Am häufigsten hat diese kälteste Schicht 6,5° C.

§ 13. Das kalte Wasser der ozeanischen Tiefen.

Die ozeanischen Tiefen bilden eine Welt für sich, eine kalte und dunkle Welt. Unterhalb des Horizontes von 1000 m Tiefe ist die Wassertemperatur niedrig und äußerst monoton; die Abhängigkeit von der geographischen Breite läßt sich kaum noch verspüren. Im allgemeinen ist die Temperatur im äquatorialen Gebiete etwas höher, aber das kalte Wasser dringt hier näher an die Oberfläche als in mittleren Breiten. Schematisch kann man die Isothermobathen in folgender Weise darstellen:

Fig. 27.



Die ausgezogene Linie (Fig. 27) stellt die wahre Gestalt der Isothermenflächen dar, die punktierte die hypothetische, nämlich diejenige, die man nach der Temperaturverteilung an der Oberfläche erwarten könnte.

Die Masse des kalten Tiefenwassers überwiegt so stark die Masse des wärmeren Oberflächenwassers, daß die Mitteltemperatur des Weltmeeres nur 3,8° C beträgt. Die mittlere Temperatur des Tiefenwassers wird etwas verschieden ausfallen, je nachdem man diesen oder jenen Horizont als obere Grenze des Tiefenwassers wählt. Da aber im großen nordpacifischen und in anderen Becken die Temperatur des größten Teiles des Wassers unterhalb 2° C liegt, so werden wir gewiß keine zu niedrige Zahl angeben, wenn wir 2° C als Mitteltemperatur der Tiefengewässer festhalten. Es

fragt sich nun, woher kommt diese Menge kalten Wassers. Wir müssen antworten: „Aus den polaren Meeren“.

So gleichförmig die Tiefentemperaturen auch sind, so ist doch von einer wirklichen Isothermie keine Rede. In einem und demselben Niveau existieren kleine Temperaturdifferenzen, ebenso existieren Differenzen im Salzgehalte, die sich im allgemeinen mit den Temperaturdifferenzen nicht kompensieren. Es existieren folglich kleine Druckdifferenzen in demselben Niveau und es müssen Strömungen, wenn auch sehr langsame, vorhanden sein. Es versteht sich von selbst, daß solche tief unter der Oberfläche versteckte und dabei sehr langsame Strömungen sich nicht leicht wahrnehmen lassen. Bis vor kurzem besaß man auch kein Mittel zum direkten Nachweis dieser Strömungen, die mit dem Apparate von G. P. Bidder erzielten Resultate sind dem Schreiber dieser Zeilen leider bisher unbekannt.

Wir nehmen an, daß außer den sichtbaren und bekannten Strömungen in den Oberflächenschichten noch andere, unvergleichlich langsamere in tieferen Schichten existieren. Speziell müssen langsame untere, von den Polen nach dem Äquator gerichtete Strömungen vorhanden sein. Nach den Karten G. Schotts nimmt in der Tiefe die Dichte von den Polen nach dem Äquator zu ab, folglich existiert ein äquatorwärts gerichteter Druckgradient, welcher die Tiefengewässer zum Äquator treibt. Im Atlantischen Ozean müssen zwei untere Strömungen: eine von Norden und eine zweite von Süden kommend vorhanden sein, die sich im äquatorialen Gürtel begegnen, hier zur Oberfläche drängen und die Isothermobathen in die Höhe heben. Da aber andererseits die Oberfläche eine hohe Temperatur besitzt, so stellt sich im Resultate ein Zusammendrängen der Isothermen ein. Das warme und wegen Regenreichtum stark verdünnte Oberflächenwasser kann nicht in die Tiefe sinken, um dem Nachdringen kalten Wassers aus der Tiefe entgegenzuwirken, es fließt in der Oberflächenschicht mit den warmen oberen Strömungen ab, um dann als Golfstrom auf der nördlichen und als brasilische Strömung auf der südlichen Hemisphäre nach höheren Breiten zu gelangen. In den Tropengürteln oder richtiger um den 30. Breitenkreis auf beiden Halbkugeln beobachtet man die entgegengesetzte Erscheinung. Hier sind die Isothermen nach unten ausgebogen und gleichzeitig auseinander gezerrt. Das erklärt sich durch die starke Verdunstung in diesen durch hohe Temperatur und große Trockenheit ausgezeichneten Gebieten: ein

Teil des Oberflächenwassers wird so salzig und dicht, daß es sinkt und auf diese Weise die Isothermen herunterdrückt. Im Indischen Ozean muß der Zufluß des kalten Wassers einseitig sein, nur aus den antarktischen Meeren strömt hier das Tiefenwasser dem Äquator zu. Im Pacifischen Ozean können wieder zwei untere, äquatorwärts gerichtete Strömungen vorhanden sein, aber diejenige, die ihren Ursprung in den arktischen Meeren nimmt und durch die enge und seichte Beringstraße kommt, muß bedeutend schwächer als die aus den überall offenen antarktischen Meeren herkommende sein.

Die Mächtigkeit der unteren Strömungen ist bedeutend größer als diejenige der oberen: sie mißt einige Kilometer, während die andere durchschnittlich auf 150 m beschränkt ist. — Bei einer Kompensation der oberen Strömungen durch die unteren müßte die Geschwindigkeit der letzteren im Mittel ungefähr dreißigmal so klein sein wie die Geschwindigkeit der ersteren. Die mittlere Geschwindigkeit der oberen Strömungen können wir auf nicht mehr als ein Viertel Seemeile pro Stunde, d. h. ungefähr 13 cm pro Sekunde schätzen. Daraus ergäbe sich für die unteren Strömungen eine mittlere Geschwindigkeit von ungefähr 4 mm pro Sekunde. Aber die oberen Strömungen kompensieren sich größtenteils untereinander, speziell werden warme, vom Äquator nach höheren Breiten fließende Strömungen gewiß teilweise durch kalte polare Oberströmungen kompensiert, so daß die unteren Strömungen nur einen Teil der oberen Strömungen kompensieren. Angesichts dessen müssen die unteren Strömungen nicht dreißigmal so langsam, sondern unvergleichlich langsamer als die oberen sein. — G. Schott meint, daß ein Tropfen Wasser, welcher an der Oberfläche unter günstigen Bedingungen in 90 Tagen vom Äquator bis zu 30° Breite gelangen kann, ungefähr 150 Jahre braucht, um den Rückweg mit den unteren Strömungen zurückzulegen. Er schätzt somit die Geschwindigkeit der unteren Strömungen auf etwa 0,7 mm pro Sekunde. Auch diese Geschwindigkeit halten wir noch für zu groß.

Man kann die Temperaturverteilung in der Tiefe als Ausgangspunkt für eine Geschwindigkeitsschätzung benutzen, was vom Schreiber dieser Zeilen auch versucht wurde. Als Grundlage hat der Verfasser eine Gleichung Poissons*) genommen, welche die Wärmefortpflanzung in einer Flüssigkeit unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Leitung und der Konvektion ausdrückt; als

*) Poisson, Traité de mécanique Bd. II (Paris 1833), S. 677.

Beobachtungsmaterial dienten einige von Thoulet*) zusammengestellte Daten über die Temperaturverhältnisse im Golf von Biscaya und südwestlich davon im offenen Ozean. Es lohnt sich nicht, die Einzelheiten der Rechnung an dieser Stelle wiederzugeben; es genügt, das Resultat anzuführen. Für Tiefen zwischen 2 und 3 km ergab sich eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 11,3 m pro Jahr, was ungefähr 0,0036 mm pro Sekunde entspricht. Die Bedeutung dieser Schätzung wird erstens durch die lokale Beschränktheit des Materials, zweitens durch den Umstand herabgesetzt, daß die Gleichung Poissons die Wirkung der Sonnenstrahlung außer acht läßt. Indes sind alle in die Gleichung aufgenommenen Größen hier, d. i. in 2 bis 3 km Tiefe, so klein, daß die Wirkung der direkten Sonnenstrahlung, obwohl an und für sich ganz verschwindend, doch mit den anderen Größen vergleichbar ist. Angesichts dessen darf man die oben angeführte Zahl nur in bezug auf die Größenordnung als maßgebend betrachten.

Achtes Kapitel.

Wellen.

§ 1. Allgemeines. Kapillarwellen. Hydrodynamische Gleichungen.

Bei der Wellenbewegung pflanzen sich gewisse Formen fort, während die Flüssigkeitsteilchen um ihre Gleichgewichtslagen oszillieren: immer kann man um die Gleichgewichtslage eine geschlossene, im Verhältnis zu den Dimensionen des Flüssigkeitsbehälters kleine Fläche beschreiben, innerhalb welcher das Flüssigkeitsteilchen trotz aller Oszillationen bleibt. Wenn aber keine solche Flächen beschrieben werden können, wenn die Flüssigkeitsteilchen sich beliebig weit von ihrer Gleichgewichtslage entfernen können, dann sagen wir, daß Strömungen vorhanden sind.

Man kann die Wellen auf verschiedene Arten klassifizieren, man kann z. B. freie und erzwungene Wellen unterscheiden. Im

*) Thoulet, Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert I prince de Monaco. Fasc. XIX (1905).

ersten Fall dauert die einmal erregte Bewegung nur dank der Trägheit fort, sie wird nur durch die Eigenschaften des Mediums und durch die Schwerkraft geregelt. Im zweiten Fall wird die Bewegung von äußeren Kräften beständig beeinflußt und geändert. Als Beispiel von Wellen der ersten Kategorie können wir die Schallwellen, der zweiten die Gezeiten anführen.

Man kann die Klassifikation auch von einem anderen Standpunkt aus vornehmen, nämlich mit Rücksicht auf die Natur der Kräfte, welche die Teilchen in der Nähe ihrer Gleichgewichtslagen zurückhalten. In elastischen Körpern sind das innere Molekularkräfte — die entsprechenden Wellen bezeichnen wir als elastische, im Wasser ist das die Schwerkraft — infolgedessen heißen die Wasserwellen gravitationale usw.

Die ersten Runzeln, welche der eben sich erhebende Wind auf der Wasseroberfläche erzeugt, heißen „Kapillarwellen“, weil die Kapillarkräfte bei ihrer Bildung eine wichtige Rolle spielen. Bekannterweise existiert in der Oberfläche einer Flüssigkeit eine gewisse Spannung, die vom Standpunkte der Molekulartheorie aus folgendermaßen erklärt werden kann. Die fühlbare Wirkung der Molekularkräfte erstreckt sich auf sehr geringe Entfernungen. Wenn ein Teilchen sich einigermaßen weit entfernt von der Oberfläche der Flüssigkeit befindet, so heben die in verschiedenen Richtungen wirkenden Molekularkräfte einander auf, wenn aber ein Teilchen dicht an der Oberfläche liegt, so finden die von unten wirkenden Kräfte keine entsprechende Gegenwirkung von oben her und es bleibt eine resultierende Kraft übrig: die Oberflächenspannung. Dank dieser Spannung bildet die Oberflächenschicht eine Art Häutchen, welches besondere physikalische Eigenschaften besitzt und sich durch eine stärkere Kohäsion vor der übrigen Flüssigkeit auszeichnet. Ein geschickter Experimentator kann selbst ein Sandkorn oder eine Nadel in solcher Weise auf die Wasseroberfläche legen, daß diese Gegenstände nicht untersinken. Wie gesagt, spielen die Kapillarkräfte eine wichtige Rolle bei der Bildung der ersten kleinen Wellen; es scheint, daß der Wind eine gewisse Minimalgeschwindigkeit haben muß, um Kapillarwellen zu erzeugen. Nach Kelvin*) erzeugt ein Kahn erst dann Runzeln, wenn seine Geschwindigkeit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kapillarwellen übertrifft, welche sich unter gewöhnlichen Bedin-

*) Lord Kelvin, Philosoph. Mag. Ser. VI, Bd. II, Nr. 7 (1901), S. 4.

gungen auf ungefähr 23 cm pro Sekunde beläuft. Die Geschwindigkeit des Windes muß auch wenigstens diese Grenze übertreffen. So interessant die Kapillarwellen auch für einen Physiker sind, so wenig Interesse bieten sie für einen Geophysiker. Für uns sind verschiedene Arten der Gravitationswellen, wie die oszillatorischen, die Übertragungs-, die stehenden Wellen und die Gezeiten interessant. Bevor wir aber zu diesen Wellen übergehen, wollen wir uns mit den hydrodynamischen Gleichungen für eine reibungslose Flüssigkeit bekannt machen.

Es gibt zwei Arten hydrodynamischer Gleichungen: die erste führt den Namen Eulers, die zweite den Lagranges, obgleich auch die zweite Art schon Euler bekannt war. Sie sind einander äquivalent, aber je nach der Art der Aufgabe ist die erste oder die zweite Form bequemer. — Bezüglich der Ableitung der Gleichungen verweisen wir den Leser auf die Handbücher der Mechanik oder auf spezielle Handbücher der Hydrodynamik; hier wird es genügen, die Gleichungen anzugeben und ihre Bedeutung zu erläutern.

Die Gleichungen Eulers erster Art lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ 1$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+u\frac{\partial \varrho}{\partial x}+v\frac{\partial \varrho}{\partial y}+w\frac{\partial \varrho}{\partial z}+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.\quad .\ 2$$

In diesen Gleichungen bezeichnen u, v, w die drei rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit in einem gegebenen Raumpunkte, ϱ bedeutet die Dichte, p den Druck in demselben Punkte; endlich sind X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kräfte, welche in demselben Punkte auf die Flüssigkeit wirken. Die Gleichungen 1 heißen Bewegungsgleichungen, die Gleichung 2 heißt Kontinuitätsgleichung. Da die Gleichungen 1 und 2 die Bewegung in einem gegebenen Punkte ausdrücken, so ist klar, daß zu verschiedenen Zeitmomenten t_1 und t_2 die Symbole u, v, w Geschwindigkeitskomponenten verschiedener Flüssigkeitsteilchen bezeichnen. Dasselbe bezieht sich auch auf die Dichte ϱ

und den Druck p; sie gehören nicht denselben Flüssigkeitsteilchen, sondern einem bestimmten Punkte an.

Sämtliche Größen: u, v, w, ϱ und p sind unbekannte Funktionen von x, y, z und t; nur die Kraftkomponenten X, Y, Z sind gegeben. Folglich haben wir fünf Unbekannte und nur vier Gleichungen. Als fünfte Gleichung kann man die allgemeine thermodynamische Beziehung nehmen, welche aussagt, daß die Dichte Funktion von Temperatur und Druck ist und schreiben:

$$\varrho = f(p\,T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Aber auf diese Weise kommt eine neue Funktion — die Temperatur T — hinzu, und es ist notwendig, entweder eine neue sechste Beziehung zwischen T und anderen Variabeln aufzustellen oder aber vorauszusetzen, daß T gegeben ist. Glücklicherweise kann man in vielen Problemen, die sich auf das Wasser beziehen, wegen der schwachen Ausdehnbarkeit dieser Flüssigkeit einfach $\varrho = 1$ setzen. Dann wird Gleichung 3 ganz überflüssig und Gleichung 2 reduziert sich auf:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2'$$

Ferner kann man noch den Umstand ausnutzen, daß die einzige Kraft, welche in geophysischen Problemen in Betracht kommt, nämlich die Schwerkraft, ein Potential besitzt. Bezeichnet man dieses Potential mit W, so kann man

$$X = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

setzen und die Gleichungen 1 durch

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1'$$

. . . .

ersetzen.

Die Eulerschen Gleichungen zweiter Art oder die sogenannten Lagrangeschen Gleichungen beschreiben die Bewegung eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0 \\
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0 \\
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0
\end{aligned}\right\} \quad 4$$

und die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\varrho \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \varrho_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5$$

Hier, d. h. in den Gleichungen 4 und 5, bedeuten X, Y, Z wie vorhin die Kraftkomponenten, x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t, a, b, c die Koordinaten desselben Teilchens zu einer als Beginn gewählten Zeit t_0, ϱ ist die Dichte des Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t und ϱ_0 zur Zeit t_0, p ist der Druck, welchem das Teilchen zur Zeit t ausgesetzt ist. In den Gleichungen zweiter Form treten a, b, c und t als unabhängige Variabeln auf, die Unbekannten sind wieder fünf an der Zahl, nämlich x, y, z, ϱ und p, und alles, was soeben von der ungenügenden Anzahl der Gleichungen gelegentlich der ersten Eulerschen Form gesagt wurde, bleibt auch hier gültig. Statt der Anfangskoordinaten a, b, c kann man irgendwelche anderen, jedes einzelne Flüssigkeitsteilchen eindeutig bestimmende Größen als unabhängige Variabeln nehmen. Wenn z. B. ξ, η, ζ solche neue unabhängige Variabeln sind, so werden die Bewegungsgleichungen 4 nach der Transformation dieselbe Form beibehalten, nur muß man ξ, η, ζ statt a, b, c schreiben. Die Gleichung 5 erleidet eine mehr durchgreifende Änderung. Bezeichnet man die Hessesche Determinante der Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$ . . . . usw., welche in Gleichung 5 steht, mit A, eine ähnliche Determinante der Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ . . . . usw. mit B, endlich die Hessesche Determinante der Differentialquotienten: $\frac{\partial \xi}{\partial a}$, $\frac{\partial \eta}{\partial a}$ . . . . usw. mit C, so ist nach den Fundamentalsätzen der Determinantentheorie

$$A = BC.$$

Ersetzt man in Gleichung 5 die Determinante A durch das Determinantenprodukt BC und benutzt den Umstand, daß die Determinante C als Funktion von a, b, c oder von ξ, η, ζ darstellbar ist, so kann man die Kontinuitätsgleichung 5 in der Form schreiben:

$$\varrho B f(\xi, \eta, \zeta) = \varrho_0.$$

Mit den obenerwähnten, für Wasser zulässigen Annahmen $\varrho = \varrho_0 = 1$ und $X = \frac{\partial W}{\partial x}, \ldots$ usw. verwandeln sich die Gleichungen 4 in:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad \ldots \; 4'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und die Gleichung 5 in:

$$f(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = 1, \quad \ldots\ldots \; 5'$$

wobei $f(\xi, \eta, \zeta) = C$ den Wert der Hesseschen Determinanten der Differentialquotienten $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \eta}{\partial a} \ldots$ usw. bezeichnet. Es ist klar, daß $f(\xi, \eta, \zeta) = C$ von der Zeit unabhängig ist.

§ 2. Die Trochoidalwellen Gerstners.

Gerstner hat seine Theorie bereits 1802 geschrieben, aber — in den Abhandlungen der Akademie zu Prag veröffentlicht — blieb sie lange Zeit unbekannt. Erst als 1862 Rankine die Trochoidalwellen zum zweitenmal entdeckte, hat man sich der Abhandlung Gerstners erinnert und zog sie aus der Vergessenheit. Wir können die Theorie Gerstners in ihrer ursprünglichen Gestalt nicht darstellen, denn seine Analyse geht besondere, in der Hydrodynamik nicht übliche Wege. Er wendet keine analytischen, sondern nur rein geometrische Methoden an: er stellt keine Bewegungsgleichungen auf. Seine Beweise sind streng und sehr elegant, aber die ungewöhnliche Methode läßt keine gedrungene Darstellung der Entwicklungen zu. Deswegen werden wir die Theorie Gerstners nicht nach seiner Methode, sondern auf Grund der hydrodynamischen Gleichungen zweiter Art darstellen. Speziell werden wir die Gleichungen 4′ und 5′ zum Ausgangspunkt unserer Untersuchung machen, indem wir zur Kennzeichnung der Teilchen nicht die Anfangskoordinaten a, b, c, sondern die Koordinaten im Zustand vollkommener Ruhe verwenden.

Denken wir uns einen unendlich ausgedehnten Ozean. Wir nehmen rechtwinklige kartesische Koordinaten, setzen die Ebene $z = 0$ identisch der Oberfläche des Ozeans im Zustand der Ruhe und richten die positive z-Achse senkrecht nach unten, so daß z nichts anderes als die Tiefe bedeutet. Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, daß die Bewegung in allen zur xz-Ebene parallelen Ebenen die gleiche ist. Folglich haben die Wellen die Gestalt gerader, zur y-Achse paralleler Wälle. Die Bewegung ist von y unabhängig oder, wie man gewöhnlich sagt, zweidimensional.

Die augenblicklichen Koordinaten eines Teilchens bezeichnen wir mit x, y, z, die Koordinaten desselben Teilchens im Zustand der Ruhe mit ξ, η, ζ. Somit sind x, y, z Funktionen von ξ, η, ζ und t. Da aber dank den obigen Annahmen:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \quad y = \eta, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

so reduzieren sich die Gleichungen 4′ und 5′ auf:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\partial (W-p)}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{\partial (W-p)}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 6$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{f(\xi, \zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots 7$$

Wir setzen jetzt

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi - A e^{-m\zeta} \sin m(\xi - Vt) \\ z &= \zeta - A e^{-m\zeta} \cos m(\xi - Vt) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots 8$$

worin m und V gewisse, vorläufig noch unbestimmte, Konstanten bezeichnen, und substituieren dies zuerst in Gleichung 7. Wir erhalten sofort:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \xi} = 1 - m^2 A^2 e^{-2m\zeta} \quad \ldots\ldots 7'$$

Damit ist die Gleichung 7 befriedigt, denn die Funktion $f(\xi, \zeta)$ ist nicht näher bestimmt, man weiß nur, daß sie die Zeit nicht enthalten soll. Andererseits überzeugt man sich leicht, daß — nach Substitution der Werte 8 — die Gleichungen 6 die Gestalt:

$$\frac{dF}{\partial \xi} = \frac{\partial (W-p)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial (W-p)}{\partial \zeta}$$

annehmen. Folglich haben sie ein gemeinsames Integral:

$$F = W - p,$$

wobei

$$F = \text{const.} - m V^2 A e^{-m\zeta} \cos m(\xi - Vt) + {}^1/_2 A^2 m V^2 e^{-2m\zeta}.$$

In unserem Falle sind jedoch die Niveauflächen zur z-Ebene parallel

$$W = \text{const.} + g z,$$

worin g die Schwerebeschleunigung bezeichnet. Unter Berücksichtigung dieser letzten Gleichung und der zweiten Gleichung 8 können wir die Integralgleichung in der Gestalt schreiben:

$$p = C + g\zeta - (g - m V^2) A e^{-m\zeta} \cos m(\xi - Vt) + {}^1/_2 A^2 m V^2 e^{-2m\zeta}. \quad 9$$

Wir werden des weiteren mit Gerstner annehmen, daß der Druck in der Oberfläche der Flüssigkeit einen konstanten Wert hat. Die Oberfläche ist natürlich beweglich, aber sie setzt sich aus denselben Flüssigkeitsteilchen zusammen, aus denen sie im Zustande der Ruhe besteht.

Da im Ruhezustand die Oberfläche mit der Ebene $\zeta = 0$ identisch ist, so lautet ihre Gleichung während der Bewegung ebenfalls $\zeta = 0$ und Gleichung 9 reduziert sich in der Oberfläche auf:

$$p_0 = C - (g - m V^2) A \cos m(\xi - Vt) + {}^1/_2 A^2 m V^2.$$

Da p_0 konstant ist, kann diese letzte Gleichung nur unter der Bedingung erfüllt sein, daß

$$g = m V^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

Sie reduziert sich dann auf:

$$p_0 = {}^1/_2 A^2 m V^2 + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

Ferner zeigt uns ein Blick auf Gleichung 9, daß bei Erfüllung der Bedingung 10 nicht bloß die Fläche $\zeta = 0$, sondern alle Flächen $\zeta = \text{const.}$ Flächen konstanten Druckes sind, mit anderen Worten: „der Druck p ist nur Funktion des Parameters ζ" und drückt sich durch die Formel aus:

$$p = C + g\zeta + {}^1/_2 A^2 m V^2 e^{-2m\zeta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

Das ist das charakteristische Merkmal der Trochoidalwellen.

Betrachten wir jetzt die kinematischen Eigenschaften der Bewegung, welche durch die Gleichungen 8 gegeben werden. Es folgt aus diesen Gleichungen sofort:

$$(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2 = A^2 e^{-2m\zeta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

was bedeutet, daß das Flüssigkeitsteilchen einen Kreis mit dem Radius

$$r = Ae^{-m\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14$$

beschreibt. Der Meeresgrund kann sich erst in unendlicher Tiefe, wo der Radius des Kreises zu Null wird, befinden; in der Oberfläche hat der Radius den Wert A und die Wellenhöhe, d. i. der senkrechte Abstand von der Sohle des Wellentales bis zum Wellenkamme, ist $2A$. Die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Teilchen ihre Kreise durchlaufen, ist

$$mV = \frac{g}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

und V ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Daß V eine Geschwindigkeit ist, sieht man bereits aus den Dimensionen, daß es die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bedeutet, zeigt die folgende Überlegung. Erteilt man dem Argumente der Kreisfunktionen einen bestimmten Wert, d. i. setzt man

$$\xi - Vt = \text{const.},$$

so erhält man eine bestimmte Phase der Bewegung. Um dieselbe Phase nach der Zeit dt zu erhalten, muß man um $d\xi = Vdt$ fortschreiten. Somit ist

$$V = \frac{d\xi}{dt}$$

die Geschwindigkeit, mit welcher sich alle Phasen der Bewegung, somit die Wellen selbst fortpflanzen. — Die lineare Geschwindigkeit, mit welcher ein Teilchen seinen Kreis durchläuft, ist:

$$\frac{g}{V} r = A \frac{g}{V} e^{-\frac{g}{V^2}\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

Sie nimmt, wie zu erwarten war, mit der Tiefe ab. Die allen Teilchen gemeinsame Periode der Bewegung, die wir mit T bezeichnen wollen, ist:

$$T = \frac{2\pi}{mV} = 2\pi \frac{V}{g}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

denn man kann sich sofort überzeugen, daß, wenn t um T zunimmt, die Teilchen in ihre frühere Lage zurückkehren. Endlich ist die Länge der Welle, die wir mit λ bezeichnen wollen:

$$\lambda = \frac{2\pi}{m} = 2\pi \frac{V^2}{g}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18$$

denn z nimmt wieder denselben Wert an, wenn ξ um λ zunimmt. Aus den Formeln 17 und 18 folgt:

$$\lambda = VT, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19$$

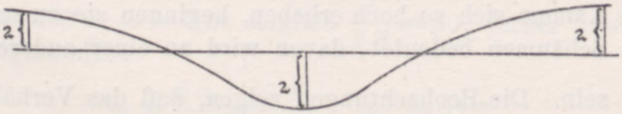
was auch der Fall sein muß. Diese letzte Beziehung, die aussagt, daß die Wellenlänge gleich ist dem Produkte aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle und ihrer Periode, gilt ganz allgemein; sie ist für jede Wellenbewegung fundamental. Endlich wollen wir noch bemerken, daß, wenn die positive x-Achse von links nach rechts gerichtet und

$$A > 0, \quad V > 0$$

ist, die Wellen sich von links nach rechts fortpflanzen und die Flüssigkeitsteilchen ihre Kreise in der Richtung des Uhrzeigers durchlaufen.

Betrachten wir nun noch die Gestalt der Wellen. Denken wir uns, daß wir mit den Wellen fortschreiten, so erscheinen uns die Wellen unbeweglich, aber die Flüssigkeit strömt unter ihnen in einer der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen entgegengesetzten Richtung. Die Teilchen beschreiben Kreise um ihre Ruhelagen, diese letzten aber bewegen sich relativ zum Beobachter mit der konstanten horizontalen Geschwindigkeit — V. Die Kurven, welche infolge der Kombination dieser beiden Bewegungen entstehen, heißen „Trochoiden“ (daher der Name der Trochoidalwellen). Sie sind periodisch, wobei ein einer Periode, d. h. der Wellenlänge entsprechendes Kurvenstück folgendermaßen aussieht:

Fig. 28.



Je größer die Tiefe, desto flacher die Trochoide, indem der Radius des Kreises bei gleichbleibender Wellenlänge mit der Tiefe abnimmt. Am höchsten ist diejenige Trochoide, welche von den Oberflächenteilchen beschrieben wird, indem der Radius des Kreises hier sein Maximum erreicht.

Die Zykloide ist ein Grenzfall der Trochoide: für sie ist der Abstand zwischen zwei in gleicher Phase befindlichen Punkten dem Umfange des Kreises gleich. Nehmen wir nun an, daß die Wellen zykloidal sind, womit wir sagen wollen, daß der Vertikal-

schnitt der Oberfläche eine Zykloide darstellt, so gilt die Beziehung:

$$\lambda = 2\pi A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20$$

oder nach Gleichung 18:

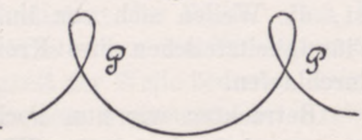
$$A = \frac{V^2}{g}.$$

D. h. wenn die halbe Wellenhöhe gleich ist dem Quotienten aus dem Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, dividiert durch die Schwerebeschleunigung, dann ist der Vertikalschnitt der Wellenoberfläche eine Zykloide (Fig. 29). Gleichzeitig verschwindet —

Fig. 29.



Fig. 30.



mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung 10, welche dann $Am = 1$ liefert — die rechte Seite der Gleichung 7′ für $\zeta = 0$ (d. i. in der Oberfläche). Mit

$$A > \frac{\lambda}{2\pi}, \text{ d. h. mit } A > \frac{V^2}{g}$$

hätten wir schon „Epitrochoiden“ erhalten. Das sind Kurven von der in Fig. 30 angegebenen Gestalt.

Es ist klar, daß epitrochoidale Wellen ein Unding sind, da die Stromfäden sich selbst kreuzen müßten. Aber auch zykloidale Wellen können nie zustande kommen. Sie sind zu spitz, und lange bevor die Kämme sich so hoch erheben, beginnen sie zu schäumen. Was das Schäumen bedeutet, davon wird an einer anderen Stelle die Rede sein. Die Beobachtungen zeigen, daß das Verhältnis $\frac{\lambda}{2A}$ (vergl. Gleichung 20) den Wert π nie erreicht; im offenen Meer bleibt es immer einigemal so groß als die Zahl π.

Auf diese Weise haben wir die Theorie Gerstners in allen wesentlichen Zügen erledigt; jetzt lohnt es sich, einige Betrachtungen darüber anzustellen. Wir sehen zunächst, daß die Reibung in der Theorie Gerstners ganz außer acht gelassen wird, weshalb die Energie der Bewegung konstant bleibt und die Wellen andauern. Aber das ist nicht ihr wichtigster Mangel, viel wichtiger ist der, daß der Lösung der Aufgabe eine gewisse Unbe-

stimmtheit anhaftet. Zwei Parameter: A und V oder A und λ bleiben unbestimmt, denn die Bedingung

$$\frac{\lambda}{2A} > \pi$$

legt nur eine Beschränkung auf, beseitigt aber die Unbestimmtheit nicht. Das rührt daher, daß die Theorie Gerstners den Zusammenhang der Wellen mit dem Winde nicht berücksichtigt, somit diejenigen Parameter, welche vom Winde abhängen, willkürlich bleiben müssen. Außerdem zeigt die Beobachtung, daß vom Winde erzeugte Wellen immer von einer Strömung begleitet werden, während bei Gerstner von einer Strömung keine Rede ist.

Am meisten sind noch die Wellen Gerstners der „Dünung" ähnlich, d. i. denjenigen Wellen, welche nach dem Abflauen des Windes hinterbleiben oder ihren Ursprung der Fortpflanzung anderswo erzeugter Wellen verdanken. Natürlich ist die Ähnlichkeit beschränkt, denn die Wellen Gerstners dauern ewig, während die Dünung allmählich erlischt. Beide Wellenarten jedoch: die theoretische sowie die wahre gehören zu den „freien" Wellen. Bei der Anwendung müssen wir natürlich zwei Parameter, etwa die Höhe $2A$ und die Länge λ direkt der Beobachtung entnehmen, denn die Theorie Gerstners gibt bekanntlich keinen Aufschluß über ihre Größe.

Belanglos, wenigstens vom praktischen Standpunkte aus, ist der Einwurf, daß die Gerstnersche Theorie eine unendlich große Tiefe voraussetzt. Um das einzusehen, betrachten wir absichtlich einen ungünstigen Fall, nämlich hohe und gleichzeitig sehr lange Wellen. Es sei $\lambda = 500$ m, $A = 5$ m, folglich $\frac{\lambda}{2A} = 50$, ferner $\zeta = 3000$ m. Daraus ergibt sich:

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6{,}28}{500}, \quad m\zeta = 37{,}7,$$

und der Radius des Kreises, welchen die Teilchen in 3000 m Tiefe beschreiben, bestimmt sich aus Formel 14 zu

$$5\,e^{-37{,}7} = \frac{2{,}1187}{10^{16}} \text{ m} = \text{(ungefähr) } \frac{2{,}12}{10^{13}} \text{ mm}.$$

Das ist eine ganz verschwindende Größe und, wenn der Meeresgrund sich tatsächlich in 3000 m Tiefe befände, könnten wir uns über eine so geringe Abweichung der Theorie von den Tatsachen ruhig hinwegsetzen. Würde sich dagegen der Meeresgrund

in 100 m Tiefe befinden, so hätten wir für r ungefähr 1,5 m erhalten und die Anwendung der Theorie wäre ganz unmöglich.

Deswegen hat man versucht, die Theorie Gerstners auf endliche Tiefe zu erweitern. Es gelang jedoch nicht, strenge Lösungen zu erhalten. Man gelangte nur zu approximativen, die Kontinuitätsbedingung 7 verletzenden Ausdrücken. Wie zu erwarten ist, zeigen diese Ausdrücke, daß die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen im Wasser endlicher Tiefe keine Kreise sind, es sind ellipsenähnliche Kurven mit einer längeren Horizontal- und kürzeren Vertikalachse: das Verhältnis der Vertikalachse zur Horizontalachse nimmt mit der Tiefe ab; am Meeresgrunde selbst schwingen die Teilchen in geradlinigen Bahnen. Es lohnt sich nicht, diese hinkenden Theorien darzustellen, aber eine Beziehung, welche aus ihnen hervorgeht, werden wir anführen. Obgleich dieselbe im allgemeinen Fall keineswegs streng ist, so führt sie doch in einigen speziellen Fällen zu richtigen Schlüssen. Wir meinen nämlich den Ausdruck des Quadrates der Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tangh}\left(2\pi \frac{p}{\lambda}\right), \quad \ldots \ldots \quad 21$$

welcher für $\frac{p}{\lambda} = 0$ und $\frac{p}{\lambda} = \infty$ richtige Werte liefert. Wir bemerken nebenbei, daß p die Tiefe des Wassers bezeichnet. — Setzt man die Wellenlänge endlich und die Tiefe unendlich, so ist $\frac{p}{\lambda} = \infty$ und der entsprechende Wert der hyperbolischen Tangente gleich Eins. Somit reduziert sich der Ausdruck 21 auf:

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi},$$

wie schon in Gerstners Theorie gefunden wurde. Setzt man aber die Tiefe endlich und die Wellenlänge im Verhältnis zur Tiefe sehr groß, so ist $\frac{p}{\lambda}$ sehr klein und es ist erlaubt, statt der hyperbolischen Tangente das erste Glied ihrer Reihenentwicklung, nämlich $2\pi \cdot \frac{p}{\lambda}$, in die Formel 21 einzusetzen. Damit reduziert sich diese Formel auf:

$$V^2 = gp,$$

woraus folgt:

$$V = \sqrt{gp}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 22$$

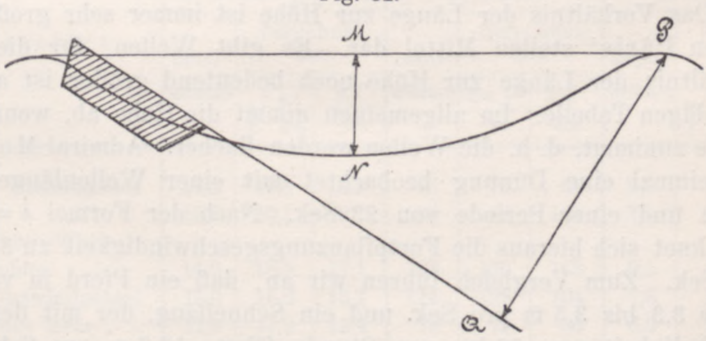
Diese Formel ist wichtig; sie gibt uns die obere Grenze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer Wellen. Je größer (in derselben Tiefe) die Wellenlänge, desto mehr nähert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem obigen Grenzwert. Er wird auch „Geschwindigkeit langer oder unendlich langer Wellen" genannt. Vor allem findet diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit Anwendung auf die Theorie sogenannter Übertragungswellen.

§ 3. Die Meereswellen.

So regelmäßig wie in der Theorie sind die wirklichen Wellen nie. Besonders unregelmäßig sind sie in Küstengewässern, dagegen regelmäßig im offenen Ozean, vor allem dort, wo beständige Winde, wie Passate, Monsune oder die „braven Westwinde" der Südhemisphäre wehen. Dort kann man Wellen beobachten, die wirklich einander ähnlich sind.

In großen Ozeanen erreichen die Wellen größere Dimensionen als in kleinen Meeren, über großen Tiefen größere als im seichten Wasser. Wenn jedoch im offenen Meer erzeugte Wellen in seichte Küstengewässer eintreten, werden sie kürzer, höher und gleichzeitig asymmetrisch. Von der Brandung wird weiter unten die Rede sein, doch dürfen wir schon hier hervorheben, daß dank der Brandung Wellen sich zu einer im offenen Meer nie erreichten Höhe auftürmen können.

Fig. 31.



Die Wellenhöhe wird auf dem offenen Meer gewöhnlich überschätzt. Man schätzt die Höhe über Deck in geneigter Lage und bekommt dadurch doppelt und mehrfach so große Werte.

Betrachten wir z. B. die beigefügte Zeichnung. Der Beobachter wähnt, daß die Welle die Höhe PQ hat, während die wahre

Höhe MN kaum über ein Drittel von PQ beträgt. Freilich sind die Verhältnisse in unserer Zeichnung etwas übertrieben, es genügt aber, wenn die Höhe im Verhältnis 2 : 1 oder 3/2 : 1 überschätzt wird.

In Wirklichkeit übertrifft die Wellenhöhe 10 m nur ganz ausnahmsweise, wie man aus der beigefügten Tabelle von Pâris*) ersieht, welcher ca. 4000 Messungen der Wellenhöhe auf dem offenen Meer ausgeführt hat. Seine Messungen beziehen sich nur auf große Wellen.

Ozean	Mittlere Höhe	Maximale Höhe	Verhältnis Länge : Höhe
Atlantischer Ozean — Gebiet der Passatwinde	1,9 m	6,0 m	35,2
Indischer „ „ „ „	2,8 „	5,0 „	35,3
Südatlantischer Ozean — Westwindgebiet .	4,3 „	7,0 „	31,0
Indischer Ozean „ .	5,3 „	11,5 „	21,5
Chinesisches- und Japanisches Meer . . .	3,2 „	6,5 „	24,6
Westpacifischer Ozean	3,1 „	7,5 „	33,0

Die Höhe von 11,5 m scheint überhaupt die größte sicher verbürgte Wellenhöhe zu sein; vom „*Challenger*“ hat man 7 m, von der „*Novara*“ 11 m gemessen. Die älteren Messungen von *Scoresby* (13 m) und *Abercromby* (14 m) scheinen auf einer Täuschung der oben beschriebenen Art zu beruhen.

Das Verhältnis der Länge zur Höhe ist immer sehr groß, die Zahlen Pâris' stellen Mittel dar. Es gibt Wellen, für die das Verhältnis der Länge zur Höhe noch bedeutend größer ist als in der obigen Tabelle. Im allgemeinen nimmt die Höhe ab, wenn die Länge zunimmt, d. h. die Wellen werden flacher. Admiral Mottez hat einmal eine Dünung beobachtet mit einer Wellenlänge von 824 m und einer Periode von 23 Sek. Nach der Formel $\lambda = VT$ berechnet sich hieraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu 35,8 m pro Sek. Zum Vergleich führen wir an, daß ein Pferd in vollem Trabe 3,3 bis 3,5 m pro Sek. und ein Schnellzug, der mit der Geschwindigkeit von 60 km pro Stunde fährt, 16,7 m pro Sekunde zurücklegt; die elektrische Eisenbahn jedoch kann sich schneller

*) Nach Rottok, Meereswellenbeobachtungen. Annalen der Hydrographie, Bd. XXXI (1903), S. 329 bis 341. Die Abhandlung von Pâris findet sich in der Revue maritime et coloniale, Bd. XXXI (1871).

als die von Mottez beobachtete Dünung fortbewegen. — Die Längen der gewöhnlichen Sturmwellen auf dem offenen Ozean liegen zwischen 60 und 140 m, die durchschnittliche Länge beträgt 90 bis 100 m.

Wir wollen nun die Trochoidalwellen mit den Ergebnissen der Beobachtung vergleichen. Die Gleichungen 17 und 18 geben die Periode und die Wellenlänge an, sobald die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bekannt ist. Wenn ein anderes Element gegeben ist, so kann man aus denselben Gleichungen sofort Formeln ableiten, welche die übrigen beiden Elemente als Funktion des gegebenen liefern. Wenn z. B. die Wellenlänge λ bekannt ist, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V und die Periode T aus den Formeln:

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

berechnen; wenn T gegeben ist, so kann man V und λ aus den Formeln:

$$V = \frac{gT}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{gT^2}{2\pi}$$

berechnen usw. Die folgende Tabelle*) ist ebenfalls nach den Beobachtungen Pâris' zusammengestellt; sie enthält neben den beobachteten die nach den Formeln berechneten Werte.

Meeresgebiet	Geschwindigkeit in Metern pro Sek.			Länge in Metern			Periode in Sekunden		
	beobachtet	berechnet aus $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$	berechnet aus $\frac{gT}{2\pi}$	beobachtet	berechnet aus $\frac{2\pi V^2}{g}$	berechnet aus $\frac{gT^2}{2\pi}$	beobachtet	berechnet aus $\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$	berechnet aus $\frac{2\pi}{g}\cdot V$
Atlantisches Passatgebiet	11,2	10,8	10,5	65	70	61	5,8	6,0	6,2
Indisches „	12,6	13,1	13,7	96	88	104	7,6	7,3	6,9
Südatlantisches Westwindgebiet . . .	14,0	15,5	17,1	133	109	163	9,5	8,6	7,8
Indisches Westwindgebiet	15,0	15,2	13,7	114	125	104	7,6	8,0	8,3
Ostchinesisches Meer . .	11,4	11,9	12,4	79	72	86	6,9	6,6	6,3
Westlicher Stiller Ozean .	12,4	13,6	14,7	102	85	121	8,2	7,5	6,9

Aus der Tabelle ergibt sich eine leidlich gute Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten der Geschwin-

*) Rottok a. a. O. S. 330.

digkeit und der Periode, weniger gute für die Wellenlänge. Wenn man noch bedenkt, daß auch den beobachteten Werten, wegen der Schwierigkeit der Beobachtungen, nicht unbeträchtliche Fehler anhaften, so darf man das Resultat des Vergleiches als für die Trochoidaltheorie nicht ungünstig bezeichnen.

Die Beobachtungen*) lehren, daß mit der Dauer sowie mit der Stärke des Windes — freier Seeraum vorausgesetzt — Höhe, Länge, Geschwindigkeit und Periode zunehmen. Die Höhe wächst am schnellsten, die Länge zuerst langsam, dann aber schneller als die Höhe. So berichtet Pâris, daß bei konstantem Winde von der Geschwindigkeit von 15 m ab sich die Wellenlänge in vier Tagen nahezu verdoppelt, die Höhe dagegen nur um $^1/_6$ zugenommen hatte.

Die Geschwindigkeit ist am wenigsten veränderlich, sie wächst allmählich mit der Dauer und Stärke des Windes und erreicht bald eine konstante Größe.

Bei gleichbleibender Richtung und Stärke des Windes hört nach einer bestimmten Zeit die Zunahme der Wellendimensionen auf, die Wellen bleiben weiterhin unverändert. Sie werden dann von Seeleuten als „ausgewachsene Wellen" bezeichnet.

Nach Vaughan Cornish**) soll die durchschnittliche Höhe ausgewachsener Wellen in engl. Fuß ungefähr die Hälfte der Windgeschwindigkeit in Seemeilen pro Stunde betragen, z. B. bei einem Winde von 52 Seemeilen pro Stunde 26 engl. Fuß. In Metermaß umgerechnet gibt das die Beziehung:

$$h = 0{,}296\,V \text{ oder rund } h = 0{,}3\,V,$$

wo die Höhe der Wellen h in Metern und die Windgeschwindigkeit V in Metern pro Sekunde zu nehmen ist***).

Flaut der Wind ab, so nehmen auch die Dimensionen und die Geschwindigkeit der Wellen ab, am schnellsten die Höhe, langsamer die Länge und die Geschwindigkeit. Wenn der Wind schließ-

---

*) Rottok a. a. O. S. 337.

**) Vaughan Cornish, Observatory, Bd. XXXII (1909), S. 165.

***) Coupvent des Bois gibt die Formel:

$$h = 0{,}68\,V^{2/3}$$

an, aber nach Krümmel können seine Beobachtungen auch durch die viel einfachere Formel:

$$h = 0{,}5\,V$$

dargestellt werden. (Rottok, a. a. O. S. 338.)

lich ganz aufhört und an Stelle der „See“ die durch abgerundete Wellenkuppen charakterisierte „Dünung“ auftritt, so vermindert sich die Höhe weiter in raschem Tempo, während Länge und Geschwindigkeit noch lange Zeit bestehen bleiben. So berichtet Pâris von einer Dünung im südlichen Indischen Ozean, die 60 Stunden lang und auf einer Strecke von 350 Seemeilen Länge und Geschwindigkeit fast unverändert beibehielt, während die Wellenhöhe sich innerhalb dieser Zeit um die Hälfte vermindert hatte.

§ 4. Helmholtzs' Theorie der Wellen.

Während in der Theorie der Trochoidalwellen die Eulerschen Gleichungen zweiter Form, oder die sogenannten Lagrangeschen Gleichungen zum Ausgangspunkt gewählt wurden, wollen wir uns jetzt der ersten Form bedienen, die übrigens in der Mehrzahl hydrodynamischer Aufgaben gebraucht wird. Alle auf die Wellentheorie bezüglichen Aufgaben können wir an dieser Stelle natürlich nicht wiedergeben, wir werden nur für die Helmholtzsche Theorie eine Ausnahme machen, da dieser große Physiker weiter als andere in den Kern der Frage eindrang: er unternahm die Lösung einer Frage, die von anderen oft berührt, aber nie ernstlich in Angriff genommen wurde. Wir meinen die Frage: warum der Wind Wellen erzeugt.

Es scheint, als ob die Reibung des Windes an der Flüssigkeitsoberfläche nur eine Strömung, d. h. ein Fließen in horizontaler Richtung, erzeugen könne. Die größte Geschwindigkeit muß die Oberflächenschicht annehmen; mit zunehmender Tiefe muß die Geschwindigkeit der Strömung abnehmen; unten kann eine entgegengesetzte Kompensationsströmung entstehen. Dies scheint die einfachste und natürlichste Bewegung unter gegebenen Bedingungen zu sein. Die Beobachtung lehrt uns indes, daß der Wind außer der Strömung auch noch Wellen erregt: von der Energie, welche der Wind dem Wasser übermittelt, entfällt nur der kleinere Teil auf die Strömung, der übrige kommt den Wellen zugute.

Man hört oft die Meinung, daß nicht der Wind als solcher, sondern die Windstöße Wellen erregen. Gewiß steckt darin ein Körnchen Wahrheit, aber es muß außerdem eine besondere Neigung zur Wellenbildung bestehen. Wenn die Strömung ohne Wellen eine stabile Bewegung wäre, so könnten Windstöße nur lokale, rasch vorübergehende Perturbationen erzeugen — indes erzeugt

jeder auch noch so gleichmäßige Wind einen dauernden Wellengang.

In seinen Abhandlungen aus der Theorie der Wellen entwickelt Helmholtz den Gedanken, daß das Fließen in horizontalen Schichten zu den instabilen Bewegungsarten gehört, während eine mit Wellen verbundene Strömung stabil ist. Darin liegt die Ursache, daß in der Natur nicht die erste, sondern die zweite Bewegungsart entsteht. Indem eine reine Strömung ohne Wellengang keine stabile Bewegungsart an sich darstellt, kann sie nicht auf die Dauer bestehen: irgendeine kleine Perturbation, irgendein Windstoß genügt, um die instabile Bewegungsart in die stabile überzuführen.

Die Frage der Stabilität oder Instabilität der Bewegung spielt in der Mechanik eine wichtige Rolle. Die Bewegungsgleichungen der Mechanik, speziell die hydrodynamischen Gleichungen, sind zu allgemeiner Natur (nicht umsonst wollte H. Hertz eine etwas mehr beschränkte Dynamik schaffen). Es gibt sehr viele Bewegungen, die, obschon nach der Newtonschen Mechanik möglich, doch in der Natur nicht vorkommen. Das Kriterium der Stabilität der Bewegung gibt uns ein Mittel in die Hand, in der Natur nicht realisierte Bewegungen auszuschließen, indem instabile Bewegungen in der Natur nicht vorkommen, während stabile häufig realisiert sind.

Am besten werden wir die Sache an einem einfachen Beispiel erläutern. Die Bewegungsgleichungen der Mechanik werden ebensogut von der geradlinigen Bewegung einer auf einem geneigten First frei hinunterrollenden Kugel wie von einer ebensolchen Bewegung in einer geneigten Rinne befriedigt. Die erste Bewegung kommt aber in der Natur nie vor, während die zweite oft beobachtet wird. Wir können nun sagen, daß die erste Bewegung instabil und die zweite stabil ist. Im ersten Falle genügt die kleinste, durch eine beliebig kleine Kraft erzeugte Abweichung, um die Kugel vom Firste herabfallen zu lassen; im zweiten Falle kann selbst eine größere Kraft nur eine endliche Abweichung vom geraden Wege erzeugen: die Kugel oszilliert nach rechts und links, doch läuft sie die Rinne hinunter. Instabile Bewegungen, wie den Seiltanz, das Balancieren eines Stockes oder einer Feder auf der Nasenspitze usw. sehen wir als außergewöhnliche Leistungen nur im Zirkus.

Im obigen Beispiel war die Stabilität bzw. die Instabilität der Bewegung auf den ersten Blick erkennbar. In vielen Fällen je-

doch sind die Verhältnisse nicht so ohne weiteres klar; man muß eine spezielle Untersuchung durchführen, wobei man sich gewisser allgemeiner Kriterien bedient, welche Mittel an die Hand geben, die Stabilität bzw. Instabilität der Bewegung zu erkennen.

Die Wellenbewegung unter dem Einfluß des Windes ist eine erzwungene Bewegung: der Wind erregt die Wellen, modifiziert ihre Gestalt usw. Als analytisches Bild (Modell wie Helmholtz zu sagen pflegte) der Windwellen sollen die Helmholtzschen Wellen im Gegensatz zu den freien Gerstnerschen Wellen als „erzwungene“ bezeichnet werden. Da Helmholtz stationäre Zustände betrachtet, so entsprechen seine Wellen den „ausgewachsenen“ Windwellen. Helmholtz hat die innere Reibung vernachlässigt, indem die Schwierigkeiten, denen man bei der Integration der hydrodynamischen Gleichungen von Navier*) und Stokes begegnet, die Mittel selbst der modernen Analyse übersteigen. Obwohl die innere Reibung des Wassers und ebenso die äußere Reibung zwischen Luft und Wasser sehr klein sind, so bleibt doch die Vernachlässigung derselben nicht ohne wichtige Konsequenzen. Ohne Reibung können wir den allmählichen Übergang der Energie aus der Luft in das Wasser und das Vordringen der Bewegung in tiefere Wasserschichten nicht ausdrücken. — Deswegen können wir nicht das allmähliche Wachsen der Wellen darstellen, wir müssen schon „ausgewachsene“ Wellen betrachten. Somit ist die Beschränkung auf einen stationären Bewegungszustand, in welchem die Energievorräte des Wassers und der Luft — jeder für sich — konstant bleiben, geboten. — Außerdem nimmt Helmholtz an, daß die Bewegung irrotational ist. Schon diese Annahme hätte im Verein mit der Annahme, daß die Dichte des Wassers und die Dichte der Luft konstant sind, zur Vernachlässigung der Reibung geführt, da die Gleichungen Naviers und Stokes' so gestaltet sind, daß im Falle einer konstanten Dichte und irrotationaler Bewegung die Reibungsglieder verschwinden. Der umgekehrte Schluß gilt jedoch nicht, so daß die Annahme der Irrotationalität als eine neue unabhängige Bedingung aufgefaßt werden muß.

Irrotational heißt eine Bewegung, welche ein „Geschwindigkeitspotential“ besitzt. Das bedeutet, daß die lokalen Geschwindigkeitskomponenten (wir stehen auf dem Standpunkte der ersten

---

*) Bekanntlich enthalten diese Gleichungen gewisse, den Einfluß der Reibung ausdrückende Glieder.

Form der Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen) u, v, w sich durch Differentialquotienten einer und derselben Funktion φ, die „Geschwindigkeitspotential" genannt wird, ausdrücken lassen. Wir haben somit:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23$$

Jetzt können wir auch verstehen, warum diese Bewegung „irrotational" heißt. Die Gleichungen 23 sind äquivalent den Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad . \quad . \quad 24$$

welche die Bedingung ausdrücken, daß die Flüssigkeitselemente keine Wirbelbewegung ausführen. Somit deformieren sich die Flüssigkeitselemente wohl, aber sie drehen sich nicht. Der Mangel an Wirbelbewegung gibt zu einer Strömung Anlaß. Gerade umgekehrt verhalten sich die Dinge in der Theorie der Trochoidalwellen, dort gibt es keine Strömung, aber die Wirbelbewegung ist vorhanden. Die Existenz einer Strömung in der Theorie Helmholtz' ist gewiß als ein Vorteil anzusehen, denn in der Natur erregt der Wind gleichzeitig Wellen und Strömung. Andererseits erleichtert die Annahme eines Geschwindigkeitspotentials die Aufgabe ungemein, denn wir können dann die Integration zu Ende führen. In Abwesenheit eines Geschwindigkeitspotentials können wir nur in wenigen Fällen, zu denen eben die Trochoidalwellen gehören, die Integration ausführen.

So nimmt Helmholtz zum Ausgangspunkt die hydrodynamischen Gleichungen in ihrer ersten Form. Um die Aufgabe zu erleichtern, beschränkt er sich auf das zweidimensionale Problem: er setzt voraus, daß der Ozean in der Richtung des Windes sich ins Unendliche ausdehnt, dabei aber eine endliche Tiefe hat. Endlich betrachtet er nicht die absolute, sondern eine relative Bewegung. Er setzt nämlich voraus, daß der Beobachter sich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen fortbewegt und die Wellen unbeweglich sieht. Dank dieser Annahme wird die Analyse wesentlich vereinfacht. In der That, da in der ersten Form der hydrodynamischen Gleichungen nicht die Bewegung einzelner Flüssigkeitsteilchen, sondern die lokale Bewegung betrachtet wird, so ist die betreffende relative Bewegung stationär, d. i. von der Zeit unabhängig. Die Wellen stehen unbeweglich, die Flüssigkeit strömt

in gewundenen, unbeweglichen Stromlinien, immer neue Flüssigkeitsteilchen passieren einen gegebenen Punkt, aber sie passieren ihn mit derselben Geschwindigkeit. Somit hat man in der relativen Bewegung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

ferner, da die Bewegung zweidimensional ist:

$$v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Angesichts der Konstanz der Dichte müssen die Gleichungen 1′ und 2′ genommen werden. Sie reduzieren sich infolge der oben angeführten Annahmen auf:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(W - \frac{p}{\varrho}\right), \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(W - \frac{p}{\varrho}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 25$$

und:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26$$

Nun folgt aus den Gleichungen 23, die sich gegebenenfalls auf

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

reduzieren, daß die Gleichungen 25 das gemeinschaftliche Integral

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = W - \frac{p}{\varrho} + \text{const.}$$

besitzen und daß die Gleichung 26 in die zweidimensionale Laplacesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

übergeht. Helmholtz bedient sich sonst nicht des Geschwindigkeitspotentials φ, sondern der mit φ konjugierten Funktion ψ, die „Stromfunktion“ genannt wird. Die Stromfunktion ist durch die Gleichungen:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots\ldots \quad 27$$

definiert. Es ist klar, daß die Stromfunktion ebenfalls die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 28$$

befriedigt und daß die Gleichungen 25 das gemeinschaftliche Integral

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]=W-\frac{p}{\varrho}+C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29$$

besitzen. Der Name „Stromfunktion“ rührt daher, daß die Flüssigkeit längs der Linien

$$\psi = \text{const.}$$

strömt. In der Tat, die obige Gleichung ist der Gleichung

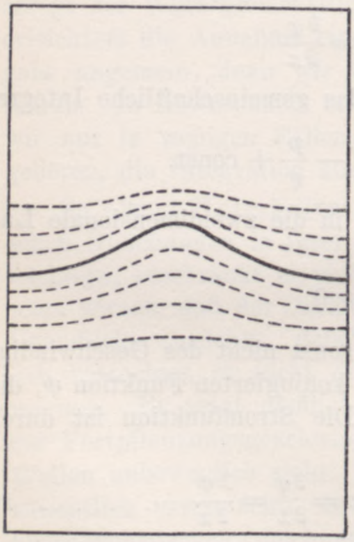
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=w\,dx-u\,dz=0$$

äquivalent; diese aber kann in der Gestalt:

$$\frac{1}{u}\frac{dx}{ds}=\frac{1}{w}\frac{dz}{ds}$$

geschrieben werden. Da die Differentialquotienten $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ die Richtungskosinus der Tangente zur Kurve $\psi =$ const. sind, so sieht man aus der letzten Gleichung, daß die Richtung der Geschwindigkeit überall in die Richtung der Tangente zur Kurve $\psi =$ const. fällt, was unsere Behauptung beweist.

Fig. 32.



Kehren wir jetzt zur eigentlichen Aufgabe zurück. — Da wir den Einfluß des Windes berücksichtigen, so setzen wir voraus, daß sich Luft oberhalb des Wassers befindet. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß die Dichte der Luft konstant und der mittleren Dichte im Meeresniveau gleich ist, dementsprechend setzen wir voraus, daß die Höhe der Atmosphäre ca. 7990 m beträgt. Da die Luft über Wellen strömt, so muß sie sich auch in wellenförmigen Stromlinien fortbewegen (Fig. 32).

Bei der absoluten Bewegung fließen Wasser und Luft in einer Richtung, bei der relativen können sie in verschiedenen Richtungen fließen. Die Geschwindigkeit der Strömung im Wasser ist nämlich immer geringer als die Geschwindigkeit des Windes, aber die Geschwindigkeit der Wellen ist kleiner oder größer als die Ge-

schwindigkeit des Windes, je nachdem man die Anfangs- oder die Endphasen des Wellenganges betrachtet*). Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen mit V, die Geschwindigkeit des Windes mit v_1 und die Geschwindigkeit der Strömung mit v_2, so hat man

$$v_1 > V > v_2$$

in den Anfangsphasen und

$$V > v_1 > v_2$$

in den Endphasen. Beim Übergang zur relativen Bewegung ziehen wir V von allen horizontalen Geschwindigkeiten ab; folglich haben wir in den Anfangsphasen:

$$v_1 - V > 0 \text{ und } v_2 - V < 0$$

und die Luft strömt in derselben Richtung wie bei der absoluten Bewegung, nur mit einer um V geringeren Geschwindigkeit, während das Wasser mit der Geschwindigkeit $V - v_2$ in entgegengesetzter Richtung strömt. In den Endphasen ist

$$v_1 - V < 0 \text{ und } v_2 - V < 0.$$

Also fließt diesmal bei der relativen Bewegung jede der beiden Flüssigkeiten entgegengesetzt zu ihrer Richtung bei der absoluten Bewegung, d. h. beide fließen in derselben Richtung.

Wir bezeichnen die Stromfunktion für die Luft mit ψ', den Druck mit p', die Dichte mit ϱ' und erhalten ebenso wie für Wasser:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)^2\right] = W - \frac{p'}{\varrho'} + C', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30$$

wobei natürlich:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31$$

Es ist klar, daß ψ' ebenso wie ψ in bezug auf x periodisch sein muß; die Periode ist nichts anderes als die Wellenlänge λ. Der Meeresgrund und die obere Grenze der Atmosphäre müssen mit gewissen Stromlinien identisch sein, der erste mit einer Stromlinie, sagen wir, $\psi = \text{const.}$, die zweite mit einer Stromlinie, sagen wir, $\psi' = \text{const.}$ Die gemeinschaftliche Grenze der Luft und des Wassers muß Stromlinie für das erste wie für das zweite Medium

---

*) Damit erklärt sich, daß gewisse Beobachter behaupten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen sei geringer als diejenige des Windes, während andere das Gegenteil versichern.

sein: es ist am bequemsten, anzunehmen, daß die Grenze zwischen Luft und Wasser mit den Stromlinien

$$\psi = \psi' = 0$$

zusammenfällt. Die Annahme ist gestattet, da man zu ψ und ψ' immer beliebige Konstanten hinzufügen kann. — Es müssen ferner in der gemeinsamen Grenze die Drucke gleich sein, d. i. für

$$\psi = \psi' = 0 \quad \text{muß} \quad p = p'$$

sein. Indem man hierin den Wert von p aus Gleichung 29 und den Wert von p' aus Gleichung 30 einsetzt, bekommt man die Bedingungsgleichung:

$$\varrho \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] - \varrho' \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z}\right)^2\right] - (\varrho - \varrho')\, W = C, \quad 32$$

$$(\text{für } \psi = \psi' = 0),$$

wobei, wenn die positive z-Achse nach unten weist:

$$W = gz + C_1.$$

Es ist klar, daß man die Konstante C_1 immer gleich Null setzen kann.

Nun beweist Helmholtz*), daß die Bedingung 32 der Bedingung:

$$\delta(\Phi - L) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33$$

bei gegebenen Wasser- und Luftstrommengen, oder der Bedingung:

$$\delta(\Phi + L) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34$$

bei gegebenen Bewegungsmomenten**) äquivalent ist. Dabei bezeichnet Φ die Summe der potentiellen und L die Summe der kinetischen Energien von Luft und Wasser innerhalb eines Vertikalstreifens von der Breite λ. Wenn die Variation einer Funktion verschwindet, so ist die betreffende Funktion entweder ein Maximum oder ein Minimum, in beiden Formeln entspricht das Maximum einer instabilen und das Minimum einer stabilen Bewegung.

Aber um die Lösung zu Ende zu führen, muß man für ψ und ψ' bestimmte, allen oben aufgezählten Bedingungen genügende Funktionen von x und z finden, anders kann man keinen Aufschluß über die Gestalt der Wellen bekommen. Findet man eine solche

---

*) Den etwas komplizierten Beweis führen wir nicht an, indem, wie der Leser weiter sehen wird, die Theorie Helmholtz' nicht abgeschlossen ist. — Vergl. S. 331.

**) Die Strommengen werden durch die Werte der Stromfunktionen ψ und ψ' am Meeresboden und an der oberen Grenze der Atmosphäre, die Bewegungsmomente durch die Differenzen $\varphi_{x+\lambda} - \varphi_x$, $\varphi'_{x+\lambda} - \varphi'_x$ ausgedrückt.

Lösung, so hat man ein Minimum der Funktion $\Phi - L$ bzw. $\Phi + L$ gefunden. Eine Lösung hat schon Helmholtz gefunden, es zeigte sich aber nachträglich, daß dieses nur ein relatives Minimum ist, d. i. ein Minimum im Vergleich zu gewissen anderen, die Bedingung 33 bzw. 34 nicht befriedigenden, Wellenbewegungen. Der Energievorrat der Helmholtzschen Wellen ist größer als der Energievorrat der Bewegung in horizontalen Schichten. Somit sind sie in bezug auf diese letzte Bewegung instabil. Später hat W. Wien*) einige andere Lösungen, d. h. einige andere Minima der Funktion $\Phi + L$ gefunden, aber wieder war, wie Wien selbst gezeigt hat, der Wert von $\Phi + L$ größer als beim horizontalen Fließen und wieder war die Wellenbewegung instabil. Solange man kein noch tieferes Minimum als dasjenige, welches dem horizontalen Fließen bei ebener Wasseroberfläche entspricht, gefunden hat, kann die Theorie Helmholtz' nicht als vollständig betrachtet werden**). Das Auffinden eines solchen Minimums ist aber sehr schwer, denn im Grunde genommen muß man die entsprechenden Funktionen ψ und ψ' erraten. — Aber unabhängig davon, ob ψ und ψ' bekannt sind, kann man aus den Differentialgleichungen und aus den ersten Integralen dieses Paragraphen gewisse Schlüsse ziehen.

Nehmen wir nämlich die Gleichung 32, die in der gemeinschaftlichen Grenzfläche beider Flüssigkeiten erfüllt ist, bezeichnen die Geschwindigkeit des Wassers mit v, die Geschwindigkeit der Luft mit v' und setzen statt W dessen Wert gz ein, so bekommen wir:

$$\tfrac{1}{2}(\varrho v^2 - \varrho' v'^2) - (\varrho - \varrho') g z = C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 35$$

Die Ebene $z = 0$ sei mit der Oberfläche des Wassers im Ruhezustand identisch. Dann bedeutet z in der obigen Gleichung nichts anderes als die Höhe bzw. Tiefe der wogenden Wasseroberfläche in bezug auf die Oberfläche im Ruhezustande. Nehmen wir Wellen von einer bestimmten Gestalt und von bestimmten Dimensionen, nehmen wir dann andere Wellen von derselben Gestalt aber von n-mal so großen Dimensionen, so müssen, da ϱ und ϱ' sich nicht ändern können, v^2, v'^2 (und C) n-mal so groß werden. Folglich werden v und v' $\sqrt{n}$-mal so groß. Umgekehrt, wenn v und v' m-mal so groß sind, so müssen die Dimensionen der Wellen m^2-mal so groß werden,

---

*) W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 166—199. Leipzig 1900.

**) Deshalb haben wir davon abgesehen, den Beweis für die Formeln 33 und 34 zu geben.

d. h. die Dimensionen der Wellen wachsen, *ceteris paribus*, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Andererseits müssen die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten v, v' und der Windgeschwindigkeit linear sein, obwohl die Koeffizienten sehr komplizierte Funktionen anderer Parameter sein können. Wir können somit sagen, daß die Dimensionen der Wellen, *ceteris paribus*, dem Quadrate der Windgeschwindigkeit proportional sind. — Freilich ist dieser Satz nicht unbeschränkt gültig: er ist aus einer Theorie, in welcher nur stationäre Zustände betrachtet werden, abgeleitet, bezieht sich folglich nur auf „ausgewachsene Wellen"; zweitens wissen wir nicht, ob und wie die Berücksichtigung der Reibung die Gleichung 32 modifiziert hätte.

§ 5. Einsame Wellen. Tsunami.

Wirft man einen Stein ins Wasser, so sieht man ringförmige kleine Wellen an der Stelle, wo der Stein verschwand, entstehen. Sie pflanzen sich fort wie ein sich immer weiter ausdehnender Ring; vor den Wellen und hinter ihnen bleibt die Wasseroberfläche glatt. Ein Schiff oder ein Kahn erzeugt hinter sich eine Perturbation: zwei geradlinige Wälle ziehen sich hinter dem Schiffe links und rechts unter spitzem Winkel hin; sie bilden eine Art Kometenschweif, innerhalb dessen das Wasser in stürmischer Bewegung ist. Je weiter vom Schiffe, desto breiter der Schweif und desto schwächer die Bewegung. Wenn das Schiff stehen bleibt, läuft die Perturbation noch eine Strecke weiter, wobei sie allmählich erlischt. Nicht immer erzeugt das Schiff eine Perturbation: wenn die Geschwindigkeit 23 cm*) — d. i. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kapillarwellen — nicht erreicht, kann keine Welle entstehen.

Derartige Wellen heißen „Übertragungswellen" oder „Einsame Wellen". Dieser letzte Name ist nicht besonders zutreffend, denn in der Natur kann man selten nur einen Wellenberg sich fortpflanzen sehen, gewöhnlich sieht man einige oder mehrere Wellen hintereinander; nur sind sie im Gegensatz zu den Windwellen einander nicht gleich: es schreiten eine, zwei, zuweilen einige große Wellen in Begleitung mehrerer kleiner Wellen voran. Den Namen

---

*) Diese Geschwindigkeit hängt von der Temperatur usw. ab. — 23 cm ist ein Mittelwert.

„einsame Welle" (*solitary wave*) hat Scott Russell eingeführt, der bei seinen Experimenten tatsächlich eine einzige Welle erzeugte; — spricht man aber von den Wellen, die in der Natur vorkommen, so ist es vielleicht besser, den Namen „Übertragungswelle", der keinen Zahlenbegriff involviert, zu gebrauchen. Die gesamte, aus mehreren Wellen verschiedener Größe bestehende Erscheinung wird man vielleicht am besten mit dem indifferenten, aus der japanischen Sprache entlehnten Namen „Tsunami" bezeichnen. Daß diese Bezeichnung bequem ist, wird sich bei der Besprechung der Geschwindigkeit zeigen.

Eine Tsunami pflanzt sich allseitig in ähnlicher Weise fort wie eine Schallwelle in der Luft oder im Wasser, wie eine Erdbebenwelle in Gesteinen; aber die Beschleunigung der von der Bewegung affizierten Teilchen hängt nicht von elastischen Kräften, sondern — ebenso wie bei Windwellen — von der Gravitation ab. Somit gehören die Übertragungswellen zu den Gravitationswellen. Gleichzeitig sind es „freie" Wellen, denn, einmal erzeugt, pflanzen sie sich fort, unabhängig von derjenigen Kraft oder den Kräften, welche ihre Entstehung veranlaßt haben.

Die Tsunamis treten sehr oft als Begleiterscheinung submariner Erdbeben auf. Berühmt und oft zitiert ist die große Welle, welche während des Erdbebens von Lissabon 1755 die Küste Portugals heimsuchte. Speziell in Lissabon begrub sie Tausende von Menschen, die sich vor einstürzenden Häusern in den Hafen geflüchtet hatten.

Während des Erdbebens von Simoda (Japan) am 23. Dezember 1854 entstand eine Tsunami, die einen halben Tag später in S. Francisco und S. Diego (Kalifornien) beobachtet wurde. Den Weg über den Stillen Ozean legte sie in 12 Stunden und 5 Minuten zurück, ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit betrug ungefähr 660 km pro Stunde. Sie bestand aus zwei großen Wellenbergen nebst einigen kleinen Wellen. Die zweite große Welle traf auf die Küste Kaliforniens 35 Minuten nach der ersten. Der Abstand von Kamm zu Kamm muß somit ungefähr 390 km betragen haben. Die Höhe der Wellen erreichte in S. Francisco circa einen halben Meter.

Während des Erdbebens von Arica (Chile) im August 1868 gelangte eine solche Welle nach Neuseeland und nach den Hawai-Inseln: auf Neuseeland erreichte sie lokal 3 m Höhe.

Während des Erdbebens von Iquique (Chile) am 9. Mai 1877 beobachtete man eine Tsunami auf Neuseeland, auf den Hawai-

Inseln, in Japan zu Hakodate, Kamaishi und in anderen Küstenorten. Nach Geinitz trat an der Küste Japans das Meer anfangs zurück, woraus zu schließen ist, daß ein Wellental dem Wellenberge voranging. Der Wellenberg war sehr hoch, doch nicht so hoch wie auf den Hawai-Inseln. Zu Honolulu soll die Wellenhöhe 4,5 m, zu Hilo angeblich sogar 11 m (?) betragen haben. Dieselbe Tsunami drang auf Neuseeland in die Flüsse ein und zerstörte viele Brücken; den größten Schaden richtete sie aber in Iquique und in dem nahen Arica an.

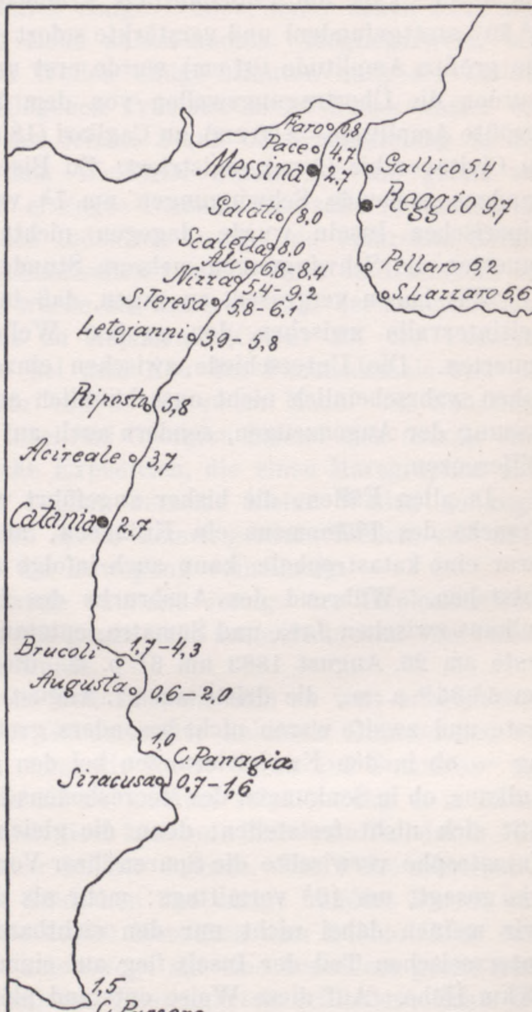
Die Übertragungswellen entstehen besonders häufig im Pacifischen Ozean. Wahrscheinlich sind hier die Seebeben (submarine Beben) häufiger als in anderen Ozeanen, doch fehlt es nicht an Beispielen von Tsunamis aus anderen Ozeanen, wie die anfangs angeführte Tsunami von Lissabon, die Tsunami vom 31. Dezember 1881 in der Bai von Bengalen, die Tsunami, welche die Küste Siziliens und Kalabriens gleich nach dem Erdbeben von Messina am 28. Dezember 1908 verheerte. Absichtlich gebrauchen wir das Wort „nach“, denn nach der übereinstimmenden Aussage von Augenzeugen*) traten die Wellen erst einige Minuten nach dem Erdbeben auf; nur in Reggio scheint das Intervall zwischen dem Erdbeben und der Tsunami bloß etliche Sekunden umfaßt zu haben, woraus man den Schluß ziehen kann, daß der Ursprungsort der Wellen sich nahe bei Reggio befand. Jedenfalls ist er in der Straße von Messina zu suchen. Vor den Wellen ließ sich ein dumpfes, mächtiges Getöse hören. Beinahe überall begann das Phänomen mit einem Zurückweichen des Wassers von der Küste, dann kamen die Wellen — meist hat man drei große Wellen gezählt und meist war die dritte am größten. Aber an einigen Stellen war die Zahl der Wellen größer, z. B. in Torre di Faro bis 9, auch war nicht überall die dritte Welle am größten. — Nach den Hauptwellen folgte eine Reihe kleinerer.

Am schlimmsten wüteten die Wellen an der kalabrischen Küste zwischen Pellaro und Lazzaro. Hier zerstörten sie eine Eisenbahnbrücke, fegten viele Häuser hinunter und rissen ein Stück der sandigen Küste weg: an einer Stelle wurde die Uferlinie um 300 m

*) Nach G. Platania, Il maremoto dello stretto di Messina del 28. Dic. 1908. Boll. Soc. sism. ital., Bd. XIII, S. 369 bis 458; z. T. auch nach F. Omori, Preliminary Report on the Messina Earthquake. Bull. Imp. Earthquake Invest. Comm., Bd. III, S. 37 bis 45.

zurückverlegt. Ähnliche Abschwemmungen, wahrscheinlich mit Nachsinken des weichen Bodens kombiniert, haben auch zwischen Reggio und Villa S. Giovanni auf der kalabrischen und zwischen Messina und Giampilieri auf der sizilischen Seite stattgefunden. — Auf dem beigefügten Kärtchen (Fig. 33) sind die Höhen der höchsten Welle in Metern angegeben*). Ausgeschlossen wurden nur einige besonders große Höhen **) bezüglich deren man den Verdacht hatte, daß sie durch lokale Ursachen, wahrscheinlich durch Reflexionen oder durch Auftürmung beim Eindringen in enge Buchten bedingt waren. Man sieht aus dem Kärtchen, daß auf der sizilischen Seite die Welle die höchste Höhe (über 8 m) zwischen Ali und Scaletta erreichte, von da ab nimmt die Höhe nach Norden (gegen den engen Ausgang aus der Messinastraße) sehr

Fig. 33.



*) Man muß hier und überhaupt in diesem Paragraphen die Höhe anders wie im vorigen verstehen, dort war es die totale Amplitude der Schwingung, hier ist es bloß die Elevation über das Mittelwasser.

**) Z. B. zu S. Alessio (Sizilien 11,7 m, zu Pellaro (Kalabrien) an einer Stelle 13 m.

rasch, nach Süden viel langsamer ab. Noch auf Malta war die Welle bedeutend; am 28. Dezember 1908 registrierte der Maregraph die hier so häufige stehende Schwingung mit 24 Minuten Periode; um $6^h 25^m$ kam die Tsunami (das Erdbeben hat zu Messina um $5^h 20^m$ stattgefunden) und verstärkte sofort die Schwingungen, aber die größte Amplitude (91 cm) wurde erst um 8^h erreicht. Ebenso wurden die Übertragungswellen von dem Maregraphen auf Ischia (größte Amplitude = 20 cm), zu Cagliari (18 cm), zu Neapel (12 cm), zu Civitavecchia (2 cm) registriert. Zu Biserta wurden schon vorhandene stehende Schwingungen um 7^h verstärkt usw., auf den Liparischen Inseln wurde dagegen nichts bemerkt. — Überall dauerten die Schwingungen mehrere Stunden hintereinander.

Wir haben vergessen, zu sagen, daß in der Messinastraße die Zeitintervalle zwischen den großen Wellen 6 bis 15 Minuten dauerten. Die Unterschiede zwischen einzelnen Schätzungen beruhen wahrscheinlich nicht ausschließlich auf der subjektiven Auffassung der Augenzeugen, sondern auch auf tatsächlichen l o k a l e n Differenzen.

In allen Fällen, die bisher angeführt wurden, war die letzte Ursache des Phänomens ein Erdbeben, aber eine Tsunami, und zwar eine katastrophale, kann auch infolge anderer Naturereignisse entstehen. Während des Ausbruchs des Krakatau, eines Inselvulkans zwischen Java und Sumatra, entstanden drei Tsunamis: die erste am 26. August 1883 um 6^h p. m., die zweite am 27. August um $5^h 35^m$ a. m., die dritte am 27. August um $10^h 5^m$ a. m. Die erste und zweite waren nicht besonders groß. Worin ihre Ursache lag — ob in den Erschütterungen bei den ersten Ausbrüchen des Vulkans, ob in Senkungen des Meeresbodens in der Nähe der Insel — läßt sich nicht feststellen; denn die gleich nachher einbrechende Katastrophe verwischte die Spuren ihrer Vorgängerinnen. Sie kam, wie gesagt, um 10^h vormittags: mehr als die Hälfte des Vulkans (wir meinen dabei nicht nur den sichtbaren, sondern auch den unterseeischen Teil der Insel) flog auf einmal in die Luft, bis zu 50 km Höhe. Auf diese Weise entstand plötzlich ein leerer Raum von mehreren Kubikkilometern Inhalt. Von allen Seiten stürzte Wasser hinein, aber infolge der Trägheit übertraf der Zufluß den Bedarf um ein bedeutendes, und es bildete sich ein kolossaler Wasserberg an der Stelle, wo zuerst die Leere war. Dieser Wasserberg mußte wieder auseinanderfließen: das Wasser stürzte wieder nach allen Seiten hinunter. Auf diese Weise entstand zuerst eine

negative Welle (Wellental) infolge des Hinstürzens des Wassers nach dem leeren Raum, dann eine positive (Wellenberg) infolge des Auseinanderfließens des akkumulierten Wassers. Übrigens bildeten sich wahrscheinlich einige Wellen, unter denen zwei sich durch eine sehr große Höhe auszeichneten. Möglicherweise bildeten sich die späteren Wellen einige Minuten nach der ersten, als die in die Luft geflogenen Trümmer des Vulkans wieder ins Wasser stürzten; nur der feinste Staub blieb monatelang in der Luft schweben. Mit dem Wellental voran lief die große am 27. August um 10^h a. m. erzeugte Tsunami einerseits in den Pacifischen, andererseits in den Indischen Ozean; sie umkreiste Afrika und gelangte in den Atlantischen Ozean. Noch in Rochefort an der französischen Küste wurde sie bemerkt. Auf der anderen Seite des Atlantischen Ozeans zu Aspinwall (Colon) auf der Panama-Landenge notierten die bei dem Bau des Panamakanals beschäftigten Ingenieure Wellen von 30 bis 40 cm Höhe. Im Südatlantischen Ozean, auf der Insel Süd-Georgien befand sich damals eine deutsche wissenschaftliche Expedition, die einen Maregraphen aufstellte; am 27. August begann derselbe kleine Wellen zu registrieren, vierzehn Stunden später kamen größere Wellen, erst nach ein paar Tagen erlosch die Bewegung vollständig.

Außer der Wasserwelle entstand infolge der Explosion eine Luftwelle, die sich über die ganze Erde ausbreitete und von vielen Barographen registriert wurde.

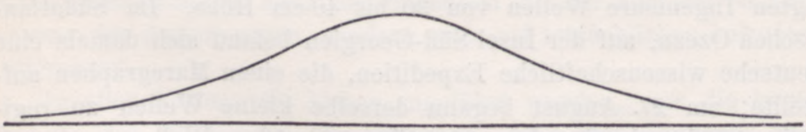
Es ist klar, daß eine Tsunami, die sich so weit ausgebreitet hatte, in der Nähe ihrer Geburtsstätte kolossale Dimensionen erreichte. Sie ergoß sich über die Küste Javas und Sumatras: auf Java bei Anjer erreichte sie 36 und bei Telok-Batang 40 m Höhe. Möglicherweise erklärt sich diese kolossale Höhe zum Teil durch Auftürmung beim Anlauf über seichte Gründe. Die Welle schwemmte die Stadt Anjer, einige Städtchen und einige hundert Dörfer und Flecken weg, sie brachte 50 000 Menschen ums Leben. Man darf aber aus diesen Zahlen keineswegs auf eine besonders große Ausdehnung des überschwemmten Küstengürtels schließen, denn die Küstendistrikte Javas sind äußerst dicht besiedelt. Im Jahre 1896 zählte Java mit Madura 26 Millionen Einwohner auf 131 509 qkm, dabei ist der größte Teil der Bevölkerung in den Küstendistrikten zusammengepfercht.

Experimentell wurde die „Einsame Welle“ von Scott Russell untersucht. Mit Absicht gebrauchen wir das Wort „einsame“, denn

die von Russell in einer rechtwinkligen langen Rinne erzeugte Welle bestand aus einem Wellenberg bzw. -tal. Er fand, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nahezu $\sqrt{gp}$ beträgt, wo g die Beschleunigung der Schwerkraft und p die Tiefe des Wassers bedeutet, ferner, daß eine positive einsame Welle (Wellenberg) stabil und eine negative (Wellental) instabil ist.

Theoretische Untersuchungen Boussinesqs haben wesentlich dasselbe Resultat geliefert: er fand auch, daß die positive Welle stabil und die negative instabil ist; ferner fand er, daß der Querschnitt der Welle sich einer horizontalen Geraden asymptotisch nähert (Fig. 34). Daß eine Welle von solcher Gestalt eine unendliche Länge besitzt und daß ihre Geschwindigkeit sich durch die für unendlich lange Wellen gültige Formel $\sqrt{gp}$ ausdrückt, ist selbstverständlich.

Fig. 34.



Die Wellen, aus denen die Tsunamis bestehen, sind sehr lang. Man erinnere sich nur an die Wellen vom 23. Dezember 1854, deren Länge 390 km erreichte. Es besteht kein Zweifel, daß der Bruch $\frac{p}{\lambda}$, wo p wie gewöhnlich die Tiefe und λ die Länge der Welle bezeichnet, in der Regel sehr klein ist und die Formel $\sqrt{gp}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit einer den strengsten Forderungen mehr als genügenden Annäherung liefern kann. Andererseits bestehen die Tsunamis sicher aus freien gravitationalen Wellen, so daß kein Zweifel an der Anwendbarkeit der Formel 22 bestehen kann.

Aber die Tsunamis sind komplizierter als die einsamen Wellen Scott Russells und Boussinesqs und in mancher Hinsicht verschieden. Vor allem besteht eine Tsunami in der Regel aus mehreren Wellenbergen und Wellentälern, also nach der Terminologie S. Russells aus positiven und negativen Wellen; indessen sind die negativen einsamen Wellen nach S. Russell und Boussinesq instabil. Das gesellige Auftreten der Wellen ändert somit die Stabilitätsbedingungen ganz wesentlich. Zweitens sind die Hauptwellen von kleineren Wellen, die teils voraneilen, teils nachlaufen,

begleitet. Endlich hat man an den Tsunamis, welche über den Pacifischen Ozean von Japan nach der Westküste Nord- und Südamerikas oder aus Südamerika nach Japan laufen, bemerkt, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträchtlich hinter der theoretischen Geschwindigkeit $\sqrt{gp}$ zurückbleibt. Sie durchlaufen durchschnittlich 10 km in einer Minute oder 167 m in einer Sekunde. Setzt man diesen Wert in die Formel 22 ein und löst nach p auf, so bekommt man:

$$p = \frac{V^2}{g} = 2800 \text{ m (ungefähr)},$$

während sich die mittlere Tiefe auf den in Betracht kommenden Strecken gewiß auf mehr denn 4000 m beläuft. Die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit müßte 200 m pro Sekunde nicht unerheblich übertreffen.

Dieser Zwiespalt zwischen Theorie und Erfahrung rührt zum Teil von einer nicht ganz korrekten Anwendung der Theorie, zum (größeren) Teil aber davon her, daß die Beobachtung eigentlich nicht die Wellengeschwindigkeit, sondern etwas anderes liefert.

Schauen wir zuerst, worin der Fehlgriff*) in der Anwendung der Theorie besteht. Wenn die Tsunami den Weg von A nach B durchlaufen hat, so setzt man gewöhnlich in die Formel 22 statt p die mittlere Tiefe des Wassers auf der Strecke AB ein, d. h. man bedient sich der Formel:

$$V_m = \sqrt{g p_m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36$$

wo V_m die mittlere (durchschnittliche) Geschwindigkeit und p_m die mittlere Wassertiefe auf der Strecke AB bedeutet. Laut Definition der mittleren Tiefe ist:

$$p_m = \frac{1}{s} \int_0^s p\, ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37$$

wo s die Länge der Strecke AB, genauer der geodätischen Linie AB, bedeutet. Dieses Verfahren ist aber keineswegs korrekt: die Formel 22 wurde in der Voraussetzung einer konstanten Tiefe abgeleitet und gilt strenggenommen nicht für Ozeane, deren Tiefe variabel ist. Nur können wir daraus Nutzen ziehen, daß die Tiefe der Ozeane langsam und allmählich variiert, und voraussetzen, daß

*) Auf diesen Fehlgriff hat Davison (Note on an error . . . Phil. Mag. 1897, Bd. 43, S. 33 bis 36) hingewiesen.

die Wellengeschwindigkeit ebenfalls allmählich je nach der wechselnden Tiefe variiert. Dementsprechend können wir den Ausdruck für die durchschnittliche (mittlere) Geschwindigkeit V_m, mit welcher die Strecke AB durchlaufen wird, folgendermaßen schreiben:

$$V_m = \frac{1}{s} \int_0^s \sqrt{gp} \cdot ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38$$

Man kann leicht verifizieren, daß für dieselben Werte von p die Formeln 36 und 37 eine größere Geschwindigkeit geben als die Formel 38. In der Tat, nach Fortschaffung gemeinschaftlicher Faktoren findet man, daß das Quadrat der Geschwindigkeit im ersten Falle proportional

$$s \int_0^s p\, ds$$

und im zweiten Falle proportional

$$\left[\int_0^s \sqrt{p}\, ds \right]^2$$

ist. Da aber bei positiven a_i und b_i die Ungleichheit:

$$[\Sigma a_i] \times [\Sigma b_i a_i] > [\Sigma \sqrt{b_i}\, a_i]^2$$

immer besteht, so ist das erste Integral immer größer als das zweite, woraus unmittelbar folgt, daß die Formeln 36 und 37 mit richtigen p eine zu große Geschwindigkeit geben. Also umgekehrt: setzt man in die Formel 36 den richtigen (also kleineren) Wert von V_m ein, so erhält man einen zu kleinen Wert für p_m. Aber bei den tatsächlich in den Ozeanen obwaltenden Tiefenverhältnissen gibt diese Ursache nur zu unbedeutenden Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung Anlaß. Auch der Umstand, daß bei kleinem, aber nicht verschwindend kleinem $\frac{p}{\lambda}$ die Wellengeschwindigkeit etwas unterhalb $\sqrt{gp}$ liegt, ist minder wichtig; wichtiger ist eine andere Ursache.

Dasjenige, was man gewöhnlich auf Grund der Erfahrung als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Tsunamis gelten läßt, ist nicht die wahre Wellengeschwindigkeit, sondern etwas anderes. Um die Sache aufzuklären, erinnern wir uns an eine einfache, jedem bekannte Beobachtung. — Werfen wir einen Stein ins Wasser und beobachten die ringförmigen Wellen, welche von der Stelle des

ersten Auftreffens ausgehen, so werden wir sofort bemerken, daß der erste Ring bald erlischt — zu weiter entfernten Punkten gelangt erst der zweite Ring; auch dieser verschwindet bald, so daß zu noch weiter gelegenen Punkten erst der dritte Ring gelangt usw. Eigentlich verschwindet keine dieser Wellen, nur werden sie bei fortschreitender Ausbreitung immer schwächer, während später erzeugte, nachfolgende Wellen an Amplitude zunehmen. Die besprochene Erscheinung ist in der Theorie unter dem Namen der Gruppengeschwindigkeit („*group velocity*“ der Engländer) bekannt. Man kann die Gruppengeschwindigkeit als Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Maximums der Amplitude bezeichnen. Diese letzte Geschwindigkeit ist immer kleiner als die Wellengeschwindigkeit.

Dasselbe, nur in großen Dimensionen, geschieht bei den Tsunamis. Auch im Ozean geht das Maximum der Amplitude auf immer später erzeugte Wellen über, während die vormals größten Wellen als niedrige Vorläufer voraneilen. Indessen berechnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf Grund der Beobachtungen über den Durchgang der größten Welle und erhalten somit nicht die Wellengeschwindigkeit, sondern die kleinere Geschwindigkeit der größten Amplitude. — Dazu gesellt sich noch der Einfluß der inneren Reibung und der Reibung am Meeresgrunde, die wahrscheinlich beide Geschwindigkeiten etwas herabsetzen.

Im Vergleich zur großen, zuweilen Hunderte von Kilometern erreichenden Länge der Übertragungswellen ist ihre Höhe im offenen Ozean gewiß sehr gering. Erreichen doch diese Wellen selbst an den Küsten, wo ihre Höhe beim Anlauf über seichten Grund bedeutend gesteigert wird, nur unter günstigen Bedingungen, d. h. nahe beim Ursprungsort, höchstens zwanzig, dreißig Meter. Die größte bekannte Höhe ist diejenige der kolossalen Welle beim Krakatau-Ausbruch an der javanischen Küste: sie belief sich bei Telok-Batang auf 40 m (vergl. S. 337). — Im offenen Meer muß die Höhe auch dieser Übertragungswelle bedeutend kleiner gewesen sein. Die Höhenverhältnisse bei den Übertragungswellen müssen denjenigen bei den Gezeiten ähnlich sein: im offenen Meer erreicht die ganze Amplitude der Gezeiten höchstens einen Meter, während an den Küsten, insbesondere in weit in das Land hineingreifenden Buchten einigemal so große Amplituden beobachtet werden. Doch müssen einzelne Übertragungswellen auch im offenen Ozean Höhen von einigen Metern erreichen, da niedrige Koralleninseln von den Tsunamis zuweilen ganz überflutet werden.

Dank dem kolossalen Verhältnis der Länge zur Höhe sind die Abhänge der Übertragungswellen im offenen Ozean natürlich äußerst sanft. Dazu dauert der Vorübergang der Welle mehrere Minuten, und es fehlt an Vergleichsobjekten: so weit das Auge reicht hebt sich oder senkt sich die Meeresoberfläche gleichzeitig mit dem Schiffe. Infolgedessen werden die Übertragungswellen von den Seefahrern, die ihnen begegnen, gewöhnlich nicht bemerkt: das Schiff wird gehoben und gesenkt, ohne daß man etwas merkt.

Von den Tsunamis ganz verschieden sind Erdbebenstöße, die von Schiffen zuweilen empfunden werden: das Schiff wird erschüttert wie beim Auflaufen auf den Grund. Diese Stöße pflanzen sich mit der Schallgeschwindigkeit (1460 m pro Sekunde) als dilatationale elastische Wellen fort. Am 28. Dezember 1908 haben mehrere Schiffe, die sich damals gerade in der Messinastraße befanden, den Erdbebenstoß sehr deutlich wahrgenommen. Alle Kapitäne berichten übereinstimmend, daß die Tsunami erst nach dem Erdbebenstoß gekommen ist.

§ 6. Das Schäumen. Die Brandung. Die Erosionskraft der Wellen.

Im offenen Meer sind die Wellenkämme nie so spitz, wie es der Gerstnerschen Theorie nach zulässig erscheint. Sobald die Wellenkämme sich etwas zuspitzen, bedecken sie sich mit Schaum; der Schaum aber ist ein Gemisch von Wasser und Luft.

Wenn die Umrisse der Wellen sich ändern, so bedeutet dies, daß in der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser die Drucke nicht vollkommen gleich sind. Solange die Wellen in die Höhe wachsen, ist auf den Kämmen der Wasserdruck etwas höher als der Luftdruck, deswegen verschiebt sich hier die Grenze zwischen Wasser und Luft nach oben. Warum der Luftdruck auf den wachsenden Wellenkämmen etwas unterhalb des Wasserdruckes liegt, werden wir sofort erklären.

Betrachten wir zunächst eine stationäre Bewegung*): Wenn wir in den Gleichungen 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

*) Ebenso wie in § 4 betrachten wir die relative Bewegung, indem wir uns den Beobachter mit den Wellen fortschreitend denken, so daß vor seinen Augen die Wellen unbeweglich dastehen.

setzen, wie es einer stationären Bewegung entspricht, ferner von den äußeren Kräften annehmen, daß sie sich auf die Schwerkraft reduzieren und:

$$X = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

schreiben, endlich die erste Gleichung 1 mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz multiplizieren und addieren, so bekommen wir die bekannte Bernoullische Gleichung:

$$dp = \varrho (dW - q\,dq) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 39$$

Darin bedeuten dp ... usw. vollständige*) Differentiale und q die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, d. h.

$$q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Betrachten wir zuerst die Zustände in der Luft: wenn wir von Wellental zu Wellenkamm fortschreiten, nimmt W ab**), dW ist negativ, andererseits verengen sich die Luftstromfäden, besonders die unteren, über den Wellenkämmen (vergl. Fig. 32). Die Luft muß hier mit einer gesteigerten Geschwindigkeit durchfließen, folglich nehmen die Geschwindigkeit und ihr Quadrat zu und $q\,dq$ ist positiv. Wir sehen daraus, daß beide Summanden im rechtsseitigen Gliede der Gleichung 39 negativ sind und daß der Luftdruck über den Wellenkämmen geringer ist als in den Wellentälern.

Betrachten wir jetzt die Zustände im Wasser, indem wir wieder von Wellental zum Wellenkamm fortschreiten: dW ist natürlich wieder negativ, aber $q\,dq$ ist diesmal auch negativ. In der Tat, die Wasserstromfäden breiten sich unter den Kämmen aus (vergl. Fig. 32) und die Geschwindigkeit sowie ihr Quadrat nehmen ab. Somit ist der erste Summand im rechtsseitigen Gliede negativ, der zweite positiv. Doch, um die Bedingung der Gleichheit des Luft- und Wasserdruckes in der Grenzfläche einzuhalten, muß im stationären Zustand dW die Oberhand behalten und dp negativ sein, wenn man von Wellental zu Wellenkamm fortschreitet.

So gestalten sich die Verhältnisse bei einer stationären Bewegung — bei einer variablen Bewegung wird offenbar in der Luft, wo die Variation des Potentials und der Geschwindigkeit im selben Sinne wirken, der Druck beim Fortschreiten vom Wellental zum Wellenkamm immer abnehmen; im Wasser, wo beide Variationen

*) D. h. $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ usw.

**) W nimmt von unten nach oben zu ab.

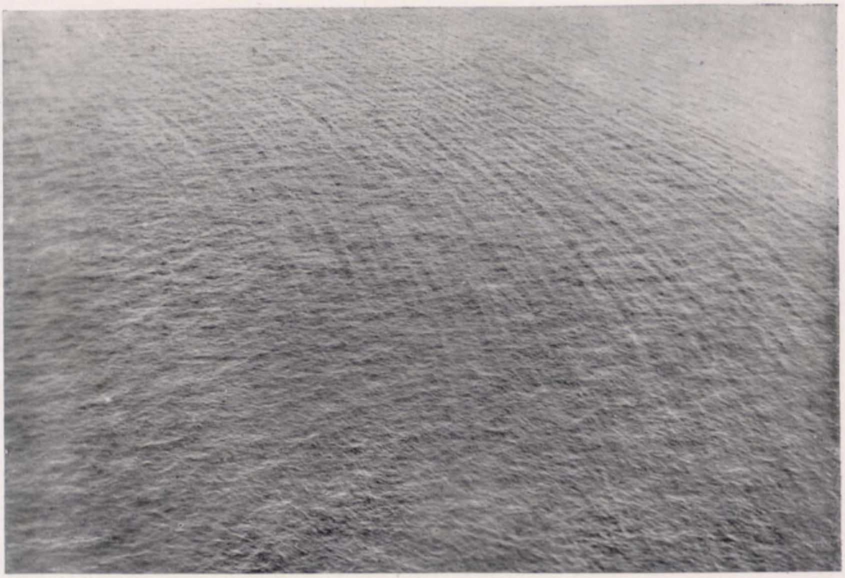
einander entgegenwirken, kann statt der Abnahme des Druckes eine Zunahme bzw. eine ungenügende Abnahme eintreten. Es ist klar, daß dann im Wellenkamme sich ein Drucküberschuß auf seiten des Wassers zeigen wird und daß die Grenze zwischen Luft und Wasser sich hier nach oben verschieben muß. Wenn die Druckdifferenz zwischen Wasser und Luft die Oberflächenspannung des Wassers übertrifft, so geschieht die Verschiebung stürmisch und diskontinuierlich: Wasser mischt sich mit Luft, es bildet sich auf den Wellenkämmen Schaum. — Man kann die Schaumbildung als eine Saugwirkung seitens der Luft ansehen. — Daß die Schaumbildung hauptsächlich beim Wachsen der Wellen eintritt, ist leicht verständlich. Wenn der Wind steifer wird, nimmt mit wachsender Windgeschwindigkeit der Luftdruck über den Wellenkämmen ab, wodurch das Wachsen der Kämme befördert wird und günstige Bedingungen zur Schaumbildung geschaffen werden.

Nur wenn die Windgeschwindigkeit und die Wellengeschwindigkeit gleich sind, können die Wellenumrisse ganz symmetrisch sein. Eilt der Wind den Wellen voran, so neigen sich die Wellen in der Richtung des Windes; wenn umgekehrt der Wind hinter den Wellen zurückbleibt oder gar in entgegengesetzter Richtung weht, so biegen sich die Wellen zurück. Bei sehr unsymmetrischem Umriß kann die Welle umkippen.

Nicht allein der Wind, sondern auch eine den Wellen entgegengesetzte Strömung veranlaßt eine Asymmetrie der Wellengestalt; gleichzeitig verkürzt sie die horizontale Amplitude der Schwingungen und zwingt die Wasserteilchen, mehr in die Höhe gezogene Bahnen zu beschreiben, wodurch die Wellen kürzer und höher werden.

Die größten Modifikationen erleiden die Wellen bei Annäherung an die Küste. Hier wird die Bewegung unregelmäßig, stürmisch, diskontinuierlich. — Eine solche stürmische diskontinuierliche Bewegung heißt „Brandung“. Nur ausnahmsweise, unter besonders günstigen Bedingungen, bleibt die Bewegung an der Küste regelmäßig. Wenn eine Küste steil, sagen wir vertikal, in ein tiefes Wasser abfällt, so bildet sich während des Wellenganges ein System stehender Schwingungen: an der Steilküste reflektierte Wellen interferieren mit den vom Meere herkommenden zu stehenden Schwingungen und die Steilwand wird zu einer Bauchfläche (vergl. nächstes Kapitel), wobei die Brandung so gut wie ganz fehlen kann. Ein treffliches Beispiel hierfür führt Airy aus seinen eigenen Erleb-

A.



Ruhiger Wellengang nahe der Küste.

Nach einer Photographie von Prof. Preobrażeński.

B.



Rudzki, Physik der Erde. Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.

Wellenerosion. Zertrümmertes Kap bei Nikolskoje, Behring-Insel [Commandor-Inseln], Stiller Ozean.

Nach einer Photographie von Prof. Morozewicz.

nissen an. In einem Boot fuhr er so dicht an der Felswand hin, daß man mit den Rudern an den Fels anstieß, dabei tanzte das Boot mehrere Meter auf und ab, ohne die geringste Gefahr zu laufen. Diese letzte Besonderheit erklärt sich dadurch, daß in der Nähe der vertikalen Knotenfläche die Flüssigkeitsteilchen beinahe genau vertikal schwingen.

Fälle wie der von Airy beschriebene sind selten, zwar bildet immer eine steile Wand etwas wie einen Bauch, d. h. eine Stelle, wo die horizontale Verschiebung Null und die vertikale am größten ist, aber die Bewegung geht in der Regel bei weitem nicht so regelmäßig vor sich. Das kommt daher, daß in der Natur die dazu nötigen Bedingungen: vollkommen vertikale, in tiefes Wasser einfallende Wand, vollkommene Interferenz der ankommenden und reflektierten Welle usw. — nur äußerst selten realisiert werden können. Immer aber springen die Wellenkämme an der Wand hoch hinauf, wobei die Kontinuität oft aufgehoben wird. Große Wassergarben fliegen in die Luft, während die übrige Welle mit Getöse und unter Schaumbildung an die Wand anschlägt. Die Höhe, bis zu welcher einzelne Wassergarben, freilich nur bei sehr starkem Wogengange, hinaufreichen, ist sehr groß. Den Leuchttürmen, die übrigens meist exponiert stehen, wird oft namhafter Schaden in 30 bis 40 m Höhe von den Wellen zugefügt. Die Wellenkämme selbst erheben sich nie zu solchen Höhen, sie erreichen aber etwas größere Höhen als die großen ozeanischen Wellen (vergl. § 3).

Anders gestaltet sich die Brandung dort, wo der Meeresgrund allmählich zu einer Flachküste ansteigt. Beim Anlauf erleiden die Wellen eine doppelte Modifikation; einerseits ändert sich die Richtung der Wellenkämme, andererseits ändern sich die Wellenprofile. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nimmt mit der Wassertiefe ab (vergl. z. B. die Formel 21), infolgedessen wird die küstennähere Seite der Wellenkämme zurückgehalten, die Wellenkämme werden allmählich (Taf. II A) umgebogen, und selbst dann, wenn im offenen Meer weit von der Küste die Richtung der Wellenkämme senkrecht zu der Küstenlinie steht, laufen die ufernächsten beinahe parallel zum Streichen der Küste. — Da die Wellenperiode nur einer unerheblichen Änderung unterliegt, nimmt infolge der allgemeinen Beziehung: $\lambda = VT$ die Wellenlänge gleichzeitig mit der Geschwindigkeit ab, und die Wellen werden um so kürzer, je näher sie dem Ufer kommen.

Über ansteigendem Meeresboden kommt die Wirkung der Reibung am Grunde mit der Annäherung an das Ufer immer mehr zur Geltung. Die Reibung am Boden verhindert das normale Fortschreiten der anderen Teile, wodurch die Wellenkämme vorauseilen und umkippen. Nach den theoretischen Untersuchungen*) Hagens und Lord Rayleighs beginnt das Umkippen, sobald die Wassertiefe sich kleiner zeigt als die Wellenhöhe. Die Beobachtungen Bazins, Scott-Russells und Stevensons bestätigen diese Forderung der Theorie, aber gewisse andere Beobachtungen scheinen dafür zu sprechen, daß das Umkippen der Wellen schon bei einer die Wellenhöhe etwas übertreffenden Tiefe möglich ist. Cialdi führt Beispiele an, in denen Wellen über Tiefen von etlichen zwanzig, dreißig Metern umkippten. — Lange vor dem Umkippen bekundet sich der Einfluß der Untiefen in asymmetrischen Profilen der Wellen. — Die Höhe und Länge werden von submarinen Bänken und Rücken auch dann sichtbar beeinflußt, wenn sie in einer Tiefe von etlichen hundert Metern liegen. Über der Neufundlandbank, über der Agulhasbank, selbst über dem unterseeischen Wyville Thomson-Rücken sind die Wellen stets kürzer und höher, obgleich dessen Oberfläche 400 bis 500 m unter der Meeresoberfläche liegt.

Nach der Meinung Hagens**) hat die Reibung am Grunde nur einen geringen Einfluß auf die Wellenprofile in der Nähe der Küste. Er erklärt die Änderung des Profils in folgender Weise: solange die Welle nicht umkippt, kommt, abgesehen von einer etwaigen gleichzeitigen Strömung, jedes Wasserteilchen nach Ablauf einer gewissen Periode wieder an dieselbe Stelle; dazu muß aber der Querschnitt unter dem Wellentale eine entsprechende Höhe haben: er muß nämlich groß genug sein, um das für die Ausbildung eines neuen Wellenkammes nötige Wasserquantum durchzulassen. Ist die Wassertiefe zu klein, so finden die Wasserteilchen nach dem Vorübergang des Wellenkammes keinen genügenden Raum, um in ihre ursprünglichen Lagen zurückzukehren, und der neue Wellenkamm findet vor sich zu wenig Wasser, um seinen vorderen Flügel auszubilden. Infolgedessen wird der vordere Abhang der Welle steiler als der hintere, die Asymmetrie wird um so ausgesprochener, je näher die Welle am Ufer ist, bis sich endlich

*) Krümmel, Ozeanographie, II. Bd.
**) Krümmel a. a. O.

schon kein Wasser mehr zur Ausbildung des vorderen Flügels der Welle vorfindet und die Welle umkippen muß.

Dann hebt Hagen noch einen Umstand hervor. Die brandenden Wogen schleudern Wasser an den Strand, welches dann zurückfließen muß; es fließt unten und zieht daher die unteren Partien der Wellen seewärts. Es ist klar, daß diese untere, nach dem Meere gerichtete Strömung die Asymmetrie der Wellen und deren Umkippen auf das Ufer zu befördert. Ihre Existenz unterliegt keinem Zweifel, sie wird durch zahlreiche Beobachtungen bewiesen, sie ist nichts anderes, als der in vielen Seebädern bekannte „Sog", welcher bei starker Brandung für die Badenden gefährlich wird, denn er zieht vom Ufer in das offene Meer hinaus.

Am großartigsten ist die Brandung an offenen, flachen ozeanischen Küsten mit vorgelagertem sanft geneigtem Meeresgrunde. Vor allem muß die großartige „Kalema", die an der afrikanischen Küste herrscht, genannt werden. — Große Wogen folgen einander und kippen auf dem flachen Ufer um. Besonders stark ist die Kalema vom Juni bis September. Pechuel-Lösche beobachtete Wellen, deren Periode 6 bis 24, im Mittel 15 Sekunden betrug. Dieselben Wellen dürften im offenen Ozean ungefähr 350 m Länge und eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von ca. 23,5 m pro Sekunde haben. Sie kommen vom Atlantischen Ozean, aus dem Gebiete der Passatwinde. Dank ihrer bedeutenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit brauchen sie höchstens einige Tage, um an die Guineaküste zu gelangen. Mit geflügelten Worten hat Pechuel-Lösche den majestätischen Reiz der „Kalema" beschrieben.

Auch an anderen Küsten wird eine heftige Brandung beobachtet, aber damit die Erscheinung in solch imposanten Dimensionen, wie die „Kalema" auftrete, müssen mehrere Bedingungen erfüllt sein. Diese Bedingungen sind: 1. Große regelmäßige Wellen, die wochenlang in derselben Richtung vom Ozean kommen, was wiederum das Vorhandensein andauernder starker Winde, wie der Passate oder der Monsune, erfordert. 2. Offene gerade Küste. 3. Vor der Küste allmählich abfallender Meeresgrund. Wahrscheinlich gibt es eine bestimmte Neigung, welche besonders günstige Bedingungen für die Brandung schafft. 4. Die Fortpflanzungsrichtung der Wellen muß annähernd rechtwinklig zum Streichen der Küste sein. 5. Vor der Küste dürfen sich keine Inseln, unterseeische Bänke usw. befinden, welche die Energie der Wellen schwächen.

Die Energie der brandenden Wogen ist sehr groß. Sie wurde manchmal von Ingenieuren, denen diese Kenntnis bei Hafenbauten usw. nötig ist, experimentell gemessen. Es werden dazu spezielle Dynamometer, die man in eigens dazu im Fels ausgehöhlte Vertiefungen einstellt, verwendet. Das Wasser drückt eine vertikale, in einer Kulissenführung bewegliche, von hinten durch starke Stahlfedern gestützte Metallplatte in einen Zylinder hinein. Die Tiefe, bis zu welcher die Platte hineingedrückt wird, dient als Maß des Druckes. Um die Verschiebung der Platte in eines der üblichen Druckmaße zu verwandeln, muß man natürlich den Apparat kalibrieren. Bei starken Stürmen erreicht der Druck der Wogen etliche zehn bis zwanzig Tonnen*) pro Quadratmeter, ausnahmsweise (in einem von Stevenson beobachteten Falle) erreichte der Anprall der Wogen sogar 30 Tonnen pro Quadratmeter, was einer Geschwindigkeit von mehr als 24 m pro Sekunde entspricht. Andererseits sind 30 Tonnen pro Quadratmeter nur etwa drei Atmosphären äquivalent. Wenn es sich um einen stetigen Druck gehandelt hätte, so wäre ihm keine besondere Bedeutung beizumessen. Seine ganze Bedeutung besteht vielmehr im raschen Wechsel; jetzt ist er gleich Null und nach einigen Sekunden springt er auf drei Atmosphären. Der soeben erwähnte, ausnahmsweise große Druck wurde von Stevenson beim Leuchtturm auf der Insel Skerryvore beobachtet. Diese Insel ist eigentlich ein Fels im Meer, westlich von Schottland und südlich von den Hebriden. Überhaupt gehört die Küste Schottlands und der umliegenden Inseln zu denjenigen, die am heftigsten von der Brandung affiziert werden. Im Herbst und im Winter sind hier starke Stürme sehr häufig. Bei einem solchen Sturm im Dezember 1872 haben die Wogen**) im Hafen von Wiek (beinahe auf der äußersten Nordspitze Schottlands) einen Betonblock von 800 Tonnen Gewicht samt drei anderen Blöcken von je 80 bis 100 Tonnen Gewicht von der Mole in den Hafen hinabgeworfen.

Der mechanischen Kraft der Wogen***) kommen verschiedene andere Faktoren zu Hilfe. Die im Meerwasser aufgelösten Salze, die Kohlensäure, der Sauerstoff zersetzen die Küstenfelsen, so daß ihre Oberfläche ganz mürbe wird. Verschiedene Seetiere: Muscheln,

*) Metrische Tonne = 1000 kg, englische = 1016,048 kg.

**) Krümmel a. a. O.

***) Nach M. Neumayrs „Erdgeschichte“ in W. Uhligs Bearbeitung, Bd. I.

Seeigel usw. bohren sich in den Fels ein und machen immer neue Flächen der Verwitterung zugänglich. Meeralgen dringen mit ihren Wurzeln in die Felsspalten hinein. In hohen Breiten gesellt sich dazu der Frost, welcher das in den Spalten befindliche Wasser in Eis verwandelt und auf diese Weise die Felsen zersprengt. Am wichtigsten jedoch ist die Mitwirkung des Sandes, der Gerölle und der Steine, welche von den Wogen gegen die Felsen geschleudert werden und in ähnlicher Weise wie Schleifpulver bzw. wie Hämmer wirken.

Es ist also nicht zu verwundern, wenn das Meer die Küsten (Taf. II B) zerstört. In maritimen Ländern kann man auf Grund alter Pläne, Chroniken und Dokumente sehr oft ein Zurücktreten der Küste konstatieren. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Verschiebung der Küste sich vollzieht, ist in hohem Grade mit Ort und Zeit variabel; es sind aber Fälle bekannt, in denen eine felsige Küste durchschnittlich 5 m im Jahre zurücktrat. Vulkanische, aus losen Auswurfsmaterialien aufgebaute Inseln werden weit schneller zerstört.

Die Erosion durch Wellen hat eine obere und eine untere Grenze. Die Wellen reichen nur bis zu einer gewissen Höhe. Da jedoch unterwaschene Felsen endlich abstürzen und in losen Gesteinsarten die Abhänge, sobald eine gewisse Neigung überschritten wird, hinabrutschen, muß auch die höchste Küste vor der Meereserosion zurückweichen. Die untere Grenze der Erosion befindet sich dort, wo die Kraft der Wellen schon nicht ausreicht, um dem Gerölle die zum Kratzen und Schleifen des gegebenen Gesteins nötige Energie zu verleihen. Deswegen bilden sich an erodierten Küsten submarine Terrassen, deren Oberflächen eine schwache Neigung nach dem Meer zu erhalten. Die Neigung rührt daher, daß die Wellen beim Anlauf auf die Terrasse einen Teil ihrer Energie verlieren; je weiter die Küste zurücktritt, je mehr die Terrasse sich verbreitert, desto länger ist der Weg, den die Wellen über die Terrasse zurücklegen müssen, desto kleiner ist die Energie, mit welcher die Wellen an die Felswand gelangen, desto kleiner ist die Tiefe, bis zu welcher die wirksame Erosion hinabreicht.

Aber die Tätigkeit der Wellen ist nicht ausschließlich eine zerstörende. Was an einer Stelle weggewaschen wurde, wird an einer anderen angeschwemmt. Das Meer lagert Sand an gewissen Stellen ab und baut neue flache und niedrige Sandküsten, die sich in das Meer hinaus als flache sandige Abhänge fortsetzen. Auf diese Weise entstehen „Nehrungen“ und „Dünen“ in der Ost-

und Nordsee, die „Lidos" in der Adria, die „Peressips" und „Strielki" im Schwarzen und Asowschen Meer; auf diese Weise werden kleine, landnahe Inseln — wie der Monte Argentaro — dem Lande angegliedert, Flußmündungen — wie die Mündungen der Oder und der Weichsel — verbaut usw.

Aber das sind lauter Fragen, die schon in das Gebiet der physikalischen Geographie und der dynamischen Geologie gehören.

Neuntes Kapitel.

Stehende Schwingungen.

§ 1. Die Seiches.

Ebenso wie feste Körper, wie Luft in den Orgelpfeifen kann in einem Behälter eingeschlossenes Wasser schwingen. Freie Schwingungen der Seen heißen „*Seiches*". „*Seiche*" ist ein lokaler, von der Bevölkerung der Ufer des Genfer Sees gebrauchter Name. Er wurde von Fatio de Duillier, einem Schweizer Ingenieur und Mathematiker, um 1730 in die wissenschaftliche Literatur eingeführt. Fatio beschrieb die „*Seiches*" des Genfer Sees und hob ausdrücklich hervor, daß dies in gleichen Zeitintervallen wiederkehrende Oszillationen der Wasseroberfläche sind. Die „*Seiches*" sind keineswegs dem Genfer See allein eigentümlich, sie existieren auch in anderen Schweizer Seen; aber dank der Konfiguration des Sees erreichen sie bei Genf eine ausnahmsweise große Höhe, zuweilen bis zu 2 m, was zur Folge hatte, daß sie hier früher als anderswo aufgefallen sind. Es scheint, daß ein anderer Schweizer, nämlich J. P. E. Vaucher, zuerst darauf hinwies, daß die „*Seiches*" auch in anderen Seen vorkommen. Seine zwischen 1802 und 1804 geschriebene Abhandlung wurde erst 1833 publiziert.

Die *Seiche* ist eine stehende Schwingung; etwaige gleichzeitig auftretende fortschreitende Wellen sind eine Erscheinung für sich, obgleich sie zuweilen eine gemeinsame Ursache, z. B. den Wind, haben.

Eine reine *Seiche* bekundet sich durch ein abwechselndes Steigen und Fallen der Wasseroberfläche in regelmäßigen Zeit-

abständen, das sich mehreremal wiederholen kann. Die Amplitude der Oszillationen ist an verschiedenen Stellen verschieden; man kann auf der Oberfläche des Sees Linien angeben, längs welcher die vertikale Oszillation Null ist. Diese Linien heißen „Knotenlinien“. Außer den Knotenlinien unterscheidet man auch „Bauchlinien“ oder kurz „Bäuche“. Eine genaue Definition der Bäuche werden wir später geben.

Die auf stehende Schwingungen der Seen bezügliche Literatur ist ziemlich reich: das Register der wichtigsten Abhandlungen in Chrystals*) Aufsatz, welches bis 1905 reicht, enthält 135 Nummern. Sehr viel hat der „Mann des Genfer Sees“, F. A. Forel, hierüber geschrieben: außer vielen speziellen Aufsätzen hat er im zweiten Bande seines Werkes „*Le Léman*“ 288 Seiten den *Seiches* gewidmet. Seine Schriften sind eine wahre Fundgrube vielseitiger, vorzüglicher Beobachtungen, aber mangels Kenntnis der höheren Analysis blieb ihm die Aufstellung einer mathematischen Theorie versagt. Die Abhandlung G. Kirchhoffs**) gibt die Theorie stehender Schwingungen für einen speziellen, von natürlichen Bedingungen etwas zu weit ab liegenden Fall. Wahrscheinlich deswegen hat sie wenig Beachtung gefunden. Zu erwähnen sind die Untersuchungen Du Boys, aber eine befriedigende Theorie hat erst Chrystal in seiner soeben zitierten Abhandlung gegeben. Es ist keine allgemeine auf alle Seen anwendbare Theorie, auch vom Standpunkt der Hydrodynamik aus läßt sie manches zu wünschen übrig, denn bei Aufstellung der Differentialgleichungen sowie in den weiteren Entwickelungen wurde Chrystal gezwungen, verschiedene Vereinfachungen einzuführen; doch erklärt seine Theorie zahlreiche Tatsachen und gibt uns Mittel, die individuellen Merkmale in der Konfiguration der Seen in Rechnung zu ziehen. Im folgenden werden wir diese Theorie ausführlich darstellen. Unter den neuesten Arbeiten mögen die Abhandlungen A. Endrös***) hervorgehoben werden. Sie stützen sich auf genaue und sorgfältige Beobachtungen der Wasserschwingungen in bayrischen Seen.

---

*) Chrystal, On the hydrodynamical Theorie of Seiches. Trans. R. Soc. Edinb. Bd. XLI (1905), S. 599—649. — Ferner J. Halm, On a group of Linear Differential Equations a. d. O. S. 651—676.

**) G. Kirchhoff, Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. K's. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig 1882, S. 428—441.

***) A. Endrös, Vergl. Petermanns Mitteilungen Bd. 54 (1908), S. 39, 60, 86.

Das Beobachtungsmaterial ist ziemlich reich: wir besitzen Beobachtungen aus allen Weltteilen, aus Seen verschiedener Größe und Form. Einerseits haben wir Beobachtungen von Henry über 15stündige Schwingungen in dem 396 km langen Eriesee, andererseits Beobachtungen von Endrös über 14 Sekunden dauernde Schwingungen eines nur 111 m langen Teiches. — Als Beispiele werden wir Schwingungsperioden einiger Seen nach der von Oddone*) ergänzten Tabelle Magrinis anführen:

Name des Sees	Perioden in Minuten
Genfer See	73 66 35,5 20 10 7 5,4
Balatonsee (Ungarn) .	143 117 60 43
Bodensee	59,8 55,1—55,8 47,8 39,1 28,2
Neuenburger See . .	50 39,5 24,3
Vierwaldstätter See .	44,2 24,2 20 18 10 9 7
Chiemsee	54 42—43,2 37,5 36 29 18 15,8 8,2 5
Waginger-Tachingersee	62 (?) 17 14 12,6 11,7 6,2 1,6
Mondsee	15,4 9,6 3
Lago di Bolsena (Italien)	200 68 14,7—15 11,8—12,2 7,2 4
Loch Ness (Schottland)	44 31,5 15,3 8,8
„ Earn „	14,52 8,09 6,01 3,99 3,48—3,60 2,88
„ Treig „	9,2 5,1

Unter anderen erblicken wir in dieser Tabelle so wenig voneinander verschiedene Perioden, wie beim Chiemsee 43,2 und 42 Minuten, oder bei Lago di Bolsena 15 und 14,7 Minuten oder 12,2 und 11,8 Minuten. Es sind wahrscheinlich dieselben Perioden: die Unterschiede beruhen zum Teil auf Beobachtungsfehlern, zum Teil dürften sie wirklich vorhanden sein. Einerseits sind die Beobachtungen schwierig, besonders wenn der Beobachter über keinen Limnographen verfügt; andererseits sind die Schwingungsdauern der Seen nicht so konstant wie etwa die Rotationszeit der Erde. Die Schwingungszeiten**) sind vom Wasserstande abhängig: bei Seen, welche Wannen von komplizierter Gestalt ausfüllen, kann eine bestimmte Schwingungsdauer auf Wasserstandsvariationen sehr empfindlich sein.

Ferner sehen wir, daß in jedem See je einige Schwingungsdauern beobachtet werden. Der Theorie nach ist die Zahl der

---

*) Oddone, Il problema delle ondulazioni . . . Boll. Soc. seism. italiana. Bd. XII (1908), S. 425—477. Die Tafel Magrinis befindet sich auf S. 457 ff.

**) Wir werden auf diesen Punkt in § 7 zurückkommen.

Schwingungszeiten unendlich groß, wobei Perioden höherer Ordnungen immer kürzer sind. Diese kürzeren Schwingungszeiten entziehen sich der Beobachtung, da sie von den Windwellen nicht zu unterscheiden sind. Übrigens kann das sogenannte „Plätschern" (franz. *clapotis*), wovon später die Rede sein wird, als stehende Schwingung von sehr kurzer Periode aufgefaßt werden.

Die *Seiches* entstehen dank äußeren Einwirkungen, können aber noch lange bestehen, nachdem die erregende Kraft schon aufgehört hat zu wirken. Sie dauern so lange, bis die Reibung sie langsam zerstört und zum Verschwinden bringt. Die *Seiches* können in einfachere periodische Schwingungen zerlegt werden, wobei die Perioden nur von den Abmessungen und der Gestalt der schwingenden Wassermasse, sowie von der Schwerkraft abhängig sind. Die Perioden und Phasen einfacher Schwingungen sind in der ganzen Wassermasse gleich, nur die Amplituden der Schwingungen sind lokal verschieden. Die strenge Theorie erweist außerdem die Existenz einer additiven Bewegung, die Lord Rayleigh als „übrigbleibende Bewegung" (*residual motion*) bezeichnet hat und die in in einer Zirkulation um horizontale Achsen besteht. Die Beschaffenheit dieser Zirkulation ist noch nicht endgültig aufgeklärt, da die Experimente von Fräulein H. Ayrton*) zwar die Existenz der „übrigbleibenden Bewegung" dargetan haben, in den Einzelheiten jedoch mit der Theorie Rayleighs nicht übereinstimmten. In einer approximativen Theorie, wie derjenigen Chrystals, wird diese schwache Zirkulation ganz außer acht gelassen.

§ 2. Die Theorie der „Seiches" von Prof. Chrystal.

Die Theorie Chrystals läßt die Reibung**) ganz außer acht. Das ist gewiß ein Nachteil, aber bei weitem nicht der wichtigste; weit wichtiger ist der Umstand, daß die Theorie nur auf langgestreckte Seen mit einer nahezu geraden Längsachse paßt und keine Querschwingungen berücksichtigt. Diese Beschränkungen sind durch die Natur der Gleichungen aufgezwungen, indem Chrystal das Seichesproblem auf eine zweidimensionale mathematische Aufgabe zurückgeführt hat: er betrachtet nur vertikale und zu einer Horizontalachse parallele Verschiebungen. Es ist klar, daß eine

*) H. Ayrton, On the nonperiodic Residual Motion of Water moving in Stationary Waves. Proc. R. Soc. Ser. A. Bd. 80 (1908), S. 252—260.

**) Auch die Erdrotation. Der Einfluß dieser letzteren auf die „*Seiches*" ist ganz unbedeutend.

Anwendung auf runde oder überhaupt auf rundliche, nicht besonders langgestreckte Seen nicht denkbar ist.

Den Grund, welcher Chrystal bewogen hat, das Problem so einzuschränken, kann man sofort erkennen, sobald man nach dem Ziele fragt, das er sich gesteckt hat.

Er wollte den Einfluß einer variablen Tiefe auf den Charakter der Schwingungen erforschen. In einer dreidimensionalen Aufgabe ist die Tiefe Funktion von zwei unabhängigen Variabeln und — einige wenige Fälle ausgenommen — gestaltet sich die mathematische Aufgabe so schwer und kompliziert, daß die Rechnungen nicht zu Ende geführt werden können. Er hat also vorgezogen, sich auf eine leichtere Aufgabe, durch welche bestimmte Resultate zu erzielen sind, zu beschränken.

Seine Differentialgleichungen sind einfacher als die im achten Kapitel angegebenen hydrodynamischen Gleichungen; es sind dieselben Gleichungen, deren sich Airy in seiner berühmten Abhandlung „*Tides and Waves*“ bedient hat. Während in den gewöhnlichen Differentialgleichungen Bewegung und Deformation unendlich kleiner Flüssigkeitselemente betrachtet werden, betrachtet man hier Bewegung und Deformation unendlich dünner vertikaler Wasserschichten. Folglich hat das kleinste, in Betracht gezogene Element eine endliche Höhe und Breite, nur die Dicke ist unendlich klein. Es ist klar, daß mehrere Einzelheiten sich auf diese Weise der Kontrolle entziehen.

Durch entsprechende Annahmen könnte man die Kontinuitätsgleichung Airys und Chrystals aus der Gleichung 5 des vorigen Kapitels ableiten. — Dieses Vorgehen wäre aber so zeitraubend und umständlich, daß es bequemer ist, den direkten Weg einzuschlagen.

Wir setzen voraus, daß die Längsachse des Sees gerade ist und legen die x-Achse in die Oberfläche des Sees im Ruhezustande, parallel zur Längsachse, die y-Achse nehmen wir auch horizontal und zur x-Achse rechtwinklig, die positive z-Achse vertikal nach oben gerichtet*). Wir betrachten einen vertikalen Querschnitt, welcher im Ruhezustand sich im Abstand x vom Koordinatenanfang befindet und bezeichnen seinen Inhalt mit A und seine Breite in der Oberfläche mit b. Wir nehmen ferner einen zweiten, zum

*) Im vorigen Kapitel in den §§ 2 und 4 war die positive z-Achse abwärts gerichtet.

ersten parallelen Querschnitt in der Entfernung $x + dx$ vom Koordinatenanfang. Abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung, die immer vernachlässigt werden können, ist das zwischen beiden Querschnitten enthaltene Wasservolum $A dx$. — Während der Bewegung verschiebt sich die ganze (vertikale) Wasserschicht bald vorwärts, bald rückwärts. Es sei nun die momentane Entfernung der hinteren Wand vom Koordinatenaufgangspunkt $x + \xi$; dann ist die entsprechende momentane Schichtdicke $dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$. Die Fläche der hinteren Wand verändert sich während der Verschiebung; sie besteht aus zwei Teilen: einem von der Größe A', der im Ruhezustand bis zum Wasserniveau reicht — und einem zweiten, welcher über das Ruheniveau hinausragt. Wir denken uns eine gleichmäßige Erhebung der Wasseroberfläche im ganzen Querschnitt und bezeichnen diese mit ζ; wenn noch die momentane Breite der hinteren Wand im Ruheniveau mit b' bezeichnet wird, so ist die gesuchte addierte Fläche $b'\zeta$ und die ganze Fläche der hinteren Wand: $A' + b'\zeta$. Es versteht sich von selbst, daß ζ auch negativ sein kann. Ein negatives ζ bedeutet, daß die Wasseroberfläche im betreffenden Querschnitt momentan um ζ Einheiten unter dem Ruheniveau steht.

Nach dem Vorangehenden bekommen wir folgenden Ausdruck für das momentane Volumen der Wasserschicht:

$$(A' + b'\zeta)\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx.$$

Unter der Voraussetzung konstanter Dichte muß dieses Volumen dem Volumen derselben Schicht im Ruhezustand, das durch $A dx$ ausgedrückt wurde, gleich sein. Folglich haben wir die Kontinuitätsgleichung:

$$(A' + b'\zeta)\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = A.$$

Wir können jedoch A' und b' als Funktionen der Verschiebung ξ auffassen und mit Hilfe des Taylorschen Lehrsatzes in Reihen entwickeln. Wir bekommen dann:

$$A' = A + \frac{\partial A}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\xi^2 + \ldots;$$

$$b' = b + \frac{\partial b}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\xi^2 + \ldots$$

Wir führen jetzt diese Ausdrücke in die Kontinuitätsgleichung ein, vernachlässigen alle Glieder von höherer als der ersten Ordnung, wobei zu beachten ist, daß ξ, ζ und $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ kleine Größen erster Ordnung sind, und erhalten:

$$\frac{\partial A}{\partial x}\xi + A\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\zeta = 0,$$

was sofort geschrieben werden kann:

$$\zeta = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}(A\xi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

Die Bewegungsgleichungen können wir aus den Gleichungen 4 des vorigen Kapitels ableiten. Es ist klar, daß bei den hier gemachten Annahmen die zweite dieser Gleichungen ganz fortfällt und daß

$$X = Y = \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad Z = -g.$$

Außerdem muß man, laut der hier angenommenen Bedeutung der Symbole, $x + \xi$ und $z + \zeta$ statt der dortigen x und z, ferner x und z statt der dortigen a und c schreiben. Beachtet man noch, daß die Anfangskoordinaten x und z von der Zeit unabhängig sind und daß bei der Ableitung der Kontinuitätsgleichung A' und ζ als Funktionen von x allein aufgefaßt wurden, so bekommt man:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + g\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + g \qquad + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Im Ruhezustande ist

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad g + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Nimmt man an, daß während der Bewegung diese drei Größen zwar nicht streng gleich Null, aber doch verschwindend klein sind, so kann man die zweite Gleichung ganz unbeachtet lassen und die erste, wenn man sich noch daran erinnert, daß nach dem vorigen $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ neben 1 zu vernachlässigen ist, in der einfachen Gestalt schreiben:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

Auf diese Weise sind nur noch t und x als unabhängige Variabeln geblieben.

Wir setzen ζ aus Gleichung 1 in Gleichung 2 ein, multiplizieren links und rechts mit Ab und erhalten:

$$Ab\frac{d^2\xi}{dt^2} = g\,Ab\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}(A\xi)\right].$$

Nun ist aber der Inhalt des Querschnitts im Ruhezustand von der Zeit unabhängig und kann mit unter das Differentialzeichen gezogen werden. Setzt man noch

$$u = A\xi, \quad dv = b\,dx, \quad Ab = \sigma, \quad \ldots\ldots \quad 3$$

so erhält die obige Gleichung die einfache Form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4$$

Es ist klar, daß σ und v nur von x, nicht aber von t abhängen; es kann somit irgendeine dieser drei Größen als unabhängige Variable genommen werden. Hier nehmen wir v als unabhängige Variable und σ als deren Funktion.

Mit den neuen Variabeln verwandelt sich die Gleichung 1 in:

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial v}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Chrystal hat nun seine mathematische Theorie der *Seiches* auf den beiden Gleichungen 4 und 5 aufgebaut; die Kurve mit der Abszisse v und Ordinate σ nennt er „Normalkurve“ des gegebenen Sees.

Fassen wir jetzt die Nullpunkte der Funktion u ins Auge. Aus der ersten Gleichung 3 ersieht man, daß u mit A und ξ verschwindet; an den Enden des Sees muß entweder ξ oder A verschwinden. Wenn der See mit einer vertikalen Wand endet, so ist $A > 0$, da aber Wasser durch die Wand nicht dringen kann, so muß $\xi = 0$ sein; ist aber der Boden am Ende des Sees geneigt, dann reduziert sich der letzte Querschnitt im Ruhezustande auf Null und man hat $A = 0$. An allen übrigen Stellen des Sees ist A immer von Null verschieden und positiv, aber ξ kann zu Null werden. Daraus schließen wir, daß u zwischen den Endpunkten verschwinden kann, an den Endpunkten aber verschwinden muß.

Wir werden hier die Punkte (eigentlich Querschnitte), in denen $u = 0$, als Bäuche bezeichnen. Laut dem Obengesagten verschwindet ξ gewöhnlich gleichzeitig mit u, nur zuweilen kann an

den Enden des Sees ξ von Null verschieden sein, während u verschwindet; also in den meisten Fällen sind die Bäuche mit denjenigen Querschnitten identisch, in welchen die Horizontalverschiebung verschwindet. Die Querschnitte, in denen ζ verschwindet, werden wir Knoten nennen. Aus der Gleichung 5 ersieht man sofort, daß u in den Knoten sein Maximum erreicht; dieses Maximum ist jedoch mit dem Maximum von ξ im allgemeinen nicht identisch.

Da u an beiden Enden des Sees gleich Null ist, so müssen immer wenigstens zwei Bäuche vorhanden sein. Zwischen zwei Nullpunkten von u muß sich wenigstens ein Punkt befinden, in dem

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0,$$

d. h. es muß wenigstens ein Knoten vorhanden sein. Gibt es drei, vier, fünf ... — allgemein n — Bäuche, so müssen wir dazwischen zwei, drei, vier ... — allgemein $n-1$ — Knoten haben.

Die Funktion u kann immer folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$u = \Sigma P \sin \alpha (t - \tau), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

worin t die Zeit, τ und α gewisse Konstanten und P eine Funktion von v bedeuten. P befriedigt die Differentialgleichung:

$$\alpha^2 P + g\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

und jedes Glied von der Gestalt:

$$P \sin \alpha (t - \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

stellt eine andere einfache stehende Schwingung vor. Es ist klar, daß alle Flüssigkeitsteile sich gleichzeitig in ein und derselben Phase befinden, nur sind die Amplituden P in verschiedenen Punkten verschieden. — Chrystal nennt eine solche einfache, durch die Formel 8 ausgedrückte Schwingung *„reine Seiche"* (*pure Seiche*), wir werden lieber den Namen „Fundamentalschwingung" oder *„fundamentale Seiche"* gebrauchen. Von den Ausdrücken 8 — eigentlich von den Funktionen P — können wir dasselbe sagen, was soeben bezüglich u gesagt wurde. Die verschiedenen Funktionen P unterscheiden sich voneinander durch die Anzahl der Nullstellen der Funktionen selbst und ihrer Ableitungen nach v. Entsprechend der Anzahl der Nullstellen der Differentialquotienten werden wir ein-, zwei- ... n-knotige Fundamentalschwingungen unterscheiden.

§ 3. Ein rechteckiger See konstanter Tiefe.

Wir werden mit dem einfachsten Fall beginnen. Wir nehmen einen See mit rechteckigem Umriß an, alle vier Wände sind vertikale Ebenen, der Boden ist auch eben, die Tiefe konstant. Die konstante Tiefe sei p, die konstante Breite b; der Inhalt des Querschnittes $A = p\,b$ und die Funktion $\sigma = p\,b^2 = A\,b$ sind demnach ebenfalls konstant. Dann vereinfacht sich Gleichung 4 zu:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = g p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9$$

woraus man sofort erkennt, daß das Integral nur das Produkt $g p$ enthalten wird. Statt der Formel 6 können wir jetzt die der Form nach ähnliche Formel:

$$\xi = \Sigma P' \sin \alpha (t - \tau) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10$$

schreiben, wo aber P' im Gegensatz zu P den Faktor A nicht enthält. Die Gleichung 7 geht damit über in:

$$\alpha^2 P' + g p \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11$$

welche Gleichung das Integral besitzt:

$$P' = C \sin \frac{\alpha}{\sqrt{g p}} (x - x_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 12$$

Jetzt führen wir die Bedingung, daß P' an den beiden Enden des Sees verschwinden muß, ein. Die Länge des Sees sei l, der Koordinatenanfang liege in einem Endpunkte des Sees. Um der genannten Bedingung zu genügen, muß man setzen:

$$x_0 = 0, \quad \alpha = m \frac{\pi}{l} \sqrt{g p},$$

worin m eine ganze Zahl bedeutet. Es ist klar, daß der Fall $m = 1$ einer einknotigen, der Fall $m = 2$ einer zweiknotigen usw. Fundamentalschwingung entspricht. Die Perioden der Fundamentalschwingungen sind:

$$\frac{2\,l}{\sqrt{g p}} \text{ (einknotige Schw.)}, \quad \frac{2\,l}{2\sqrt{g p}} \text{ (zweiknotige Schw.)} \; . \; . \; . \text{ usw.}$$

Allgemein drückt sich die Periode T_m der m knotigen Schwingung aus durch:

$$T_m = \frac{2\,l}{m \sqrt{g p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13$$

Das allgemeine Integral der Gleichung 9 lautet nun:

$$\xi = \Sigma\, C_m \sin m\pi \frac{x}{l} \cdot \sin m\pi \frac{\sqrt{gp}}{l}(t-\tau) \quad . \; . \; . \quad 14$$

und das ist der allgemeinste Ausdruck der horizontalen Verschiebung. Den allgemeinen Ausdruck für die vertikale Verschiebung finden wir sofort mit Hilfe der Gleichung 1; es ist nämlich:

$$\zeta = -\pi \frac{p}{l} \Sigma\, m\, C_m \cos m\pi \frac{x}{l} \cdot \sin m\pi \frac{\sqrt{gp}}{l}(t-\tau). \; . \; . \quad 15$$

Von den Konstanten C_m hängen offenbar die Amplituden der Fundamentalschwingungen ab. Diese Konstanten sind willkürlich, aber nicht ohne Beschränkung. Man muß sich nämlich daran erinnern, daß bei der Ableitung der Differentialgleichungen ξ und ζ als im Vergleich zu den Abmessungen des Sees sehr kleine Größen behandelt wurden. Speziell müssen sie im Vergleich zur Tiefe des Sees sehr klein sein. Daraus folgt, daß

$$\frac{C_m}{p} \text{ und } m \frac{C_m}{l}$$

sehr kleine Zahlen sein müssen. Außerdem müssen wir hervorheben, daß, je höher die Ordnungszahl m (d. i. je größer die Anzahl der Knoten), desto roher die Annäherung ist. Woher das kommt, werden wir sofort sehen. Nach Gleichung 14 hat der Ausdruck einer $m$knotigen Fundamentalschwingung die Gestalt:

$$C_m \sin \beta x \cdot \sin \beta V t,$$

wobei

$$\beta = \frac{m\pi}{l}, \quad V = \sqrt{gp}.$$

Man kann aber diesen Ausdruck sofort schreiben:

$$\frac{1}{2} C_m [\cos \beta(x - Vt) - \cos \beta(x + Vt)].$$

Diese Gestalt zeigt uns, daß irgendeine stehende Fundamentalschwingung in zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen zerlegt werden kann. Die gemeinsame Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist $V = \sqrt{gp}$. Das ist aber die Geschwindigkeit unendlich langer Wellen, und unsere Formeln können nur solange angewendet werden, als die Länge der Wellen im Verhältnis zur Tiefe des Sees tatsächlich sehr groß ist. Welches ist nun die Länge der Welle bei einer $m$knotigen

Fundamentalschwingung? Nach der allgemeinen Formel $\lambda = VT$ folgt mit $V = \sqrt{gp}$ aus der Formel 13:

$$\lambda = \frac{2l}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16$$

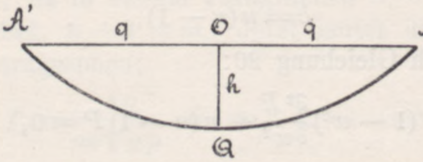
In allen Anwendungen ist l mehreremal so groß als p. Folglich wird für $m = 1, 2, 3$ usw. die Wellenlänge auch mehrmals so groß sein als die Tiefe und man ist berechtigt, die für lange Wellen gültige Formel zu gebrauchen. Sobald aber m so groß wird, daß λ und p vergleichbar sind, können wir von der Geschwindigkeitsformel $V = \sqrt{gp}$ keinen Gebrauch mehr machen. Wir haben aber soeben gesehen, daß die Theorie stehender Schwingungen in inniger Beziehung zur Theorie langer Wellen steht: was dort steht oder fällt, das steht oder fällt auch hier. Wenn m so groß geworden ist, daß λ und p vergleichbar sind, werden unsere Formeln ungenau.

Beide Bemerkungen — jene, die sich auf die Größe der Koeffizienten C_m bezog, sowie diese, die sich auf die Zahl m bezieht — gelten nicht nur für einen rechteckigen See mit konstanter Tiefe, sondern allgemein. — Glücklicherweise haben wir es in der Praxis gewöhnlich nur mit den Schwingungen niedrigster Ordnung zu tun: vielknotige Schwingungen werden nicht beobachtet. Wenn also die Theorie in bezug auf diese Schwingungen etwas hinkt, so bringt dies keinen besonderen Schaden.

§ 4. Ein rechteckiger See von parabolisch-konkavem Längsschnitt.

Nehmen wir jetzt einen anderen Fall an: die Horizontalprojektion des Sees soll wieder ein längliches Rechteck sein, die Quer-

Fig. 35.



schnitte sollen auch rechteckig sein, aber die Tiefe soll in solcher Weise variieren, daß der Längsschnitt des Sees die Gestalt eines Parabelbogens hat (Fig. 35).

Da $A = bp$ und b laut Voraussetzung konstant sind, so reduziert sich die Gleichung 4 auf:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = gp \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17$$

worin

$$u' = p\xi \text{ und } p = h\left(1 - \frac{x^2}{q^2}\right), \quad \ldots\ldots \quad 18$$

wenn man den Koordinatenanfang in die Mitte des Sees verlegt. Es ist klar, daß in Formel 18 h die größte Tiefe und q die halbe Länge des Sees [$q = \frac{1}{2} l$] bezeichnet. Wir setzen

$$u' = P \sin \alpha (t - \tau)$$

und erhalten für P die Differentialgleichung:

$$\frac{\alpha^2}{gp} P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19$$

Der Einfachheit wegen setzen wir noch

$$\frac{x}{q} = \frac{2x}{l} = w, \quad c = \frac{\alpha^2 q^2}{gh},$$

was uns erlaubt, Gleichung 19 in der Gestalt zu schreiben:

$$(1 - w^2) \frac{\partial^2 P}{\partial w^2} + cP = 0. \quad \ldots\ldots \quad 20$$

Im allgemeinen Falle, wo c irgendeinen Wert hat, drücken sich die Integrale der Gleichung 20 durch gewisse hypergeometrische Reihen aus, die Chrystal *„seiche cosinus“* und *„seiche sinus“* genannt hat. Im vorliegenden Falle aber, wo an beiden Enden des Sees — d. h. für $x = \pm q$, $w = \pm 1$ — P verschwinden soll, kann Gleichung 20 mit Hilfe gewisser, mit den Legendreschen Polynomen verwandter Polynome integriert werden. Ist nämlich n eine positive ganze Zahl und

$$c = n(n-1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 21$$

dann schreibt sich Gleichung 20:

$$(1 - w^2) \frac{\partial^2 P}{\partial w^2} + n(n-1) P = 0, \quad \ldots\ldots \quad 20'$$

und man kann derselben durch die Annahme:

$$P = \frac{(-1)^n}{2^{n-2}} \frac{B}{1, 2 \ldots (n-1)} \frac{d^{n-2}}{dw^{n-2}} [(1 - w^2)^{n-1}], \quad \ldots \quad 22$$

wo B eine Konstante bedeutet, genügen. Somit hat man:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für } n=2, & c=2, & P=B(1-w^2) \\ \text{„ } n=3, & c=6, & P=Bw(1-w^2) \\ \text{„ } n=4, & c=12, & P=-{}^1/_4 B(1-w^2)(1-5w^2) \\ \text{„ } n=5, & c=20, & P=-{}^1/_4 Bw(1-w^2)(3-7w^2) \\ \quad\text{usw.} & & \quad\text{usw.} \end{array}\right\} \quad 23$$

Man sieht sofort, daß n nichts anderes als die Anzahl der Bäuche und $n-1$ die Anzahl der Knoten ist. Die Bedingung, daß P für $w=\pm 1$ verschwinde, ist offenbar immer erfüllt. Jetzt kann man leicht den Ausdruck für ξ mit Hilfe der Gleichung 18 und den Ausdruck für ζ mit Hilfe der Formel 1, die sich hier auf

$$\zeta = -\frac{\partial u'}{\partial x}$$

reduziert, gewinnen. Nach ganz evidenten Substitutionen erhält man:

einknotige Fundamentalschwingung, $n=2$:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{B}{h}\sin\alpha_1(t-\tau) \\ \zeta = \dfrac{2B}{q}w\sin\alpha_1(t-\tau) \end{array} \quad \alpha_1 = \frac{1}{q}\sqrt{2gh},\right\} \quad . \quad . \quad 24$$

zweiknotige Fundamentalschwingung, $n=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{B}{h}w\sin\alpha_2(t-\tau) \\ \zeta = -\dfrac{B}{q}(1-3w^2)\sin\alpha_2(t-\tau) \end{array} \quad \alpha_2 = \frac{1}{q}\sqrt{6gh}\right\} \quad . \quad 25$$

usw. usw.

Wir wollen jetzt die Fundamentalperioden in einem rechteckigen See mit konstanter Tiefe mit den Fundamentalperioden in einem rechteckigen See mit parabolischem Längsschnitt vergleichen. Wir nehmen Seen gleicher Länge an, setzen somit $l=2q$, außerdem setzen wir, da in diesem Paragraphen $n-1$ die Anzahl der Knoten bezeichnet, $n-1=m$. Jetzt lautet die Formel 13 aus dem vorigen Paragraphen:

$$T_m = \frac{4q}{m\sqrt{gp}} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots \text{ usw.}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13'$$

während in diesem Paragraphen

$$T_m = \frac{2\pi}{\alpha_m} = \frac{2\pi q}{\sqrt{(m+1)mgh}} \quad (m=1,\ 2\ \ldots \text{ usw.}) \quad . \quad . \quad 26$$

Dabei muß man beachten, daß in 13′ p die konstante und gleichzeitig mittlere Tiefe und in der Formel 26 h die größte Tiefe bedeutet. Übrigens kann man auch in der letzten Formel die größte Tiefe h durch die mittlere Tiefe p ausdrücken, man hat nämlich die Beziehung:

$$h = \tfrac{3}{2} p.$$

Also bei gleicher Länge und gleicher mittlerer Tiefe verhalten sich die Perioden aus der Formel 13′ und aus der Formel 26 wie

$$\sqrt{\frac{2}{m}} : \frac{\pi}{\sqrt{3(m+1)}},\text{*)}$$

wobei selbstverständlich die Anzahl m der Knoten die gleiche ist. In gewisser Beziehung ist es noch wichtiger, die Perioden aus der Formel 13′ untereinander und ebenso die Perioden aus der Formel 26 untereinander zu vergleichen. Im ersten Falle hat man:

$$T_1 : T_2 : T_3 \ldots : T_m = 1 : {}^1/_2 : {}^1/_3 \ldots : \frac{1}{m}$$

und im zweiten:

$$T_1 : T_2 : T_3 \ldots T_m = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{12}} \ldots : \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}.$$

Im ersten Falle verhalten sich die Perioden wie die Reziproken der ganzen Zahlen, im zweiten wie die Reziproken der Quadratwurzeln aus Produkten ganzer Zahlen. Wenn in einem See mit konstanter Tiefe die einknotige Schwingung eine Periode von 10 Minuten hat, so hat die zweiknotige eine Periode von 5 Minuten; wenn aber in einem parabolischen See die einknotige Schwingung eine Periode von 10 Minuten hat, so hat die zweiknotige eine solche von $\frac{10}{\sqrt{3}} = 5{,}773$ Minuten $= 5$ Min. 46 Sek.

Vergleichen wir noch die Lage der Knoten, wobei wieder $l = 2q$ und der Koordinatenanfang in die Mitte des Sees verlegt wird (siehe nachfolgende Tabelle).

Aus dieser Tabelle erkennt man, daß im parabolischen See im Vergleich zum See mit ebenem Boden die Knoten regelmäßig nach den seichteren Stellen hin verschoben sind. Dieses Merkmal ist keineswegs nur dem parabolischen See eigentümlich; es ist eine allgemeine Regel, daß die Knoten nach den seichteren Stellen hin verschoben sind.

---

*) Z. B. für $m = 1$ wie 1,102 : 1.

Knoten $\left(\text{Nullpunkte von } \frac{\partial P}{\partial w}\right)$.

Fundamental-schwingung	Konstante Tiefe			Parabolisch-konkaver Längsschnitt		
Einknotig		$\frac{x}{q}=0$			$\frac{x}{q}=0$	
Zweiknotig	$\frac{x}{q}=-0{,}5,$		$+0{,}5$	$\frac{x}{q}=-0{,}577,$		$+0{,}577$
Dreiknotig	$\frac{x}{q}=-0{,}667,$	$0,$	$+0{,}667$	$\frac{x}{q}=-0{,}775,$	$0,$	$+0{,}775$
Vierknotig	$\frac{x}{q}=-0{,}75,$		$-0{,}25$	$\frac{x}{q}=-0{,}861,$		$-0{,}340$
„	$+0{,}25,$		$+0{,}75$	$+0{,}340,$		$+0{,}861$
usw.		usw.			usw.	

In einem rechteckigen See von konstanter Tiefe ist die Wellenlänge bei einer einknotigen Fundamentalschwingung zweimal so groß als die Länge des Sees, bei einer zweiknotigen ist sie der Länge des Sees gleich; im allgemeinen ist sie $\frac{2l}{m}$, wo l und m — wie früher — die Länge des Sees und die Knotenanzahl bezeichnen. Weiter ist der Abstand eines Knotens vom nächsten Bauch immer einem Viertel der Wellenlänge gleich. Nun bezeichnet Chrystal auch in anderen Seen den mit 4 multiplizierten Abstand zwischen Knoten und Bauch als Wellenlänge. Hält man an dieser Definition fest, so kann man sagen, daß in einem parabolisch-konkaven See die Wellenlänge von der Mitte gegen die Enden — d. h. mit abnehmender Tiefe — abnimmt. Diese letzte Regel ist nicht bloß für parabolisch-konkave Seen, sondern allgemein gültig.

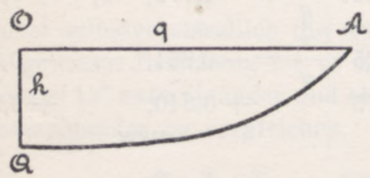
§ 5. Andere Seen von konstanter Breite und von rechteckigem Querschnitt.

In beiden hier behandelten Fällen war die Breite des Sees konstant, die Längsachse gerade und der Querschnitt rechteckig; in § 3 war die Tiefe konstant, in § 4 variabel nach dem Gesetz:

$$p=h\left(1-\frac{x^2}{q^2}\right).$$

Andere Seen, für welche Chrystal bestimmte Formeln gibt, haben auch dieselben Merkmale, d. i. konstante Breite, rechteckigen Querschnitt und gerade Längsachse, aber das Gesetz, nach welchem die Tiefe variiert, ist in verschiedenen Fällen verschieden. Der Fall, wo der Längsschnitt die Hälfte des in Fig. 35 dargestellten ausmacht, reduziert sich auf die im vorigen Abschnitt betrachtete Aufgabe. Man ersieht nämlich aus den Gleichungen 23, daß bei zwei-, vier-, allgemein bei $2n$-knotigen Fundamentalschwingungen der Querschnitt OQ mit einem Bauch zusammenfällt. Hier ist also die Horizontalverschiebung ξ gleich Null und alle Formeln, welche sich auf Schwingungen mit gerader Knotenanzahl beziehen, können ohne weiteres auf den halben parabolischen See angewandt werden, nur wird immer die Knotenanzahl gerade die Hälfte der Knotenanzahl für den ganzen See betragen, d. h. dieselbe Formel, welche im ganzen See eine zweiknotige Fundamentalschwingung wiedergibt, liefert hier nur einen Knoten usw. (Fig. 36).

Fig. 36.



Wenn der Längsschnitt des Sees aus einem Parabelstück und aus zwei vertikalen Geraden besteht (Fig. 37), so kann die Lösung mit Hilfe der obengenannten, von Chrystal als *„seiche cosinus“* und *„seiche sinus“* bezeichneten hypergeometrischen Reihen erhalten werden, sowohl dann, wenn die Abstände der Seeenden vom Orte der größten Tiefe gleich, als auch dann, wenn sie ungleich sind. Andere hypergeometrische Reihen: der sogenannte *„hyperbolische seiche cosinus“* und der *„hyperbolische seiche sinus“* beziehen sich auf einen See mit parabolisch-konvexem Querschnitt (Fig. 38).

Fig. 37.

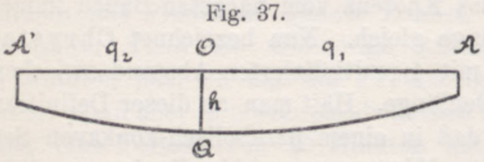
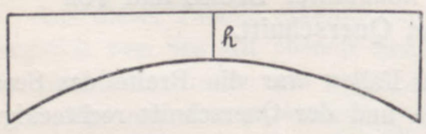


Fig. 38.



Leider sind diese letzten Reihen wegen ihrer sehr langsamen Konvergenz praktisch beinahe unbrauchbar.

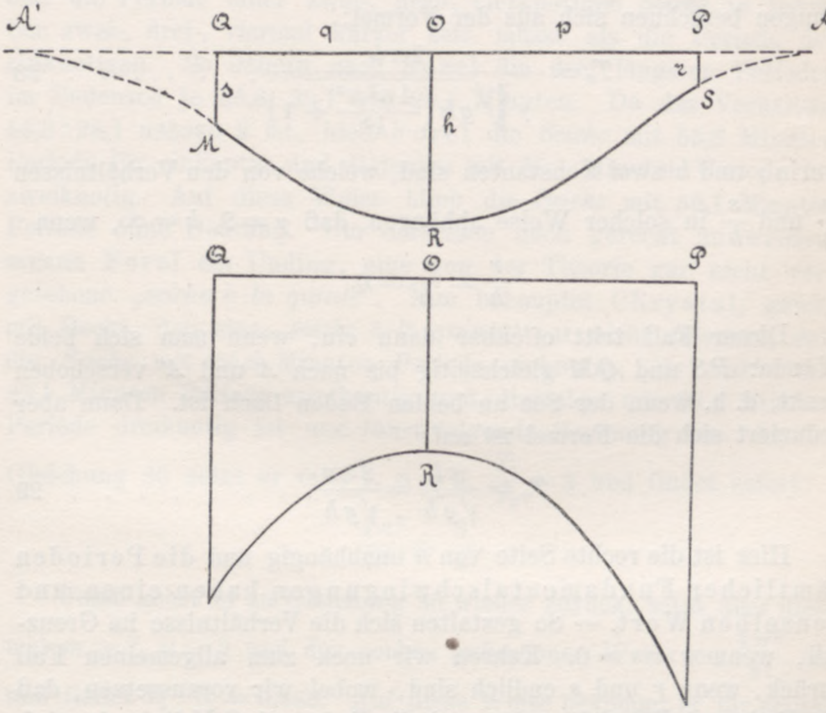
Bei ebenem aber geneigtem Seeboden kann die Lösung mit Hilfe der Besselschen Funktionen erhalten werden.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn die Kurve, welche den Längsschnitt des Seebodens darstellt, eine Kurve vierten Grades ist, nämlich:

$$h\left(1 \mp \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

Dem Minuszeichen in der Formel entspricht in Fig. 39 die obere Zeichnung, dem Pluszeichen die untere. An beiden Enden ist der See von vertikalen Wänden begrenzt. Außerhalb derselben ist

Fig. 39.



die Kurve (in der oberen Zeichnung durch eine unterbrochene Linie bezeichnet) ohne physikalische Bedeutung. In Abwesenheit der Wände PS und QM würde die Kurve (in der oberen Zeichnung) bei A und A' ganz flach verlaufen. Zur Erläuterung der Figur fügen wir hinzu, daß in der oberen Zeichnung

$$OA = OA' = a, \quad OR = h, \quad OP = p, \quad OQ = q, \quad PS = r,$$
$$QM = s \text{ und } PQ = l = p + q.$$

In diesem Falle reduziert sich die Gleichung, welcher die P-Funktionen genügen müssen, auf die **Stokessche** Differentialgleichung:

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\alpha^2}{g h} P=0 \quad \ldots\ldots \quad 27$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe von Kreisfunktionen (d. h. des *cosinus* und *sinus*), die im Argumente die Funktion

$$\log \frac{a+x}{a-x}$$

haben, integriert werden. Die Perioden der Fundamentalschwingungen berechnen sich aus der Formel:

$$T_n=\frac{2 \pi l}{\gamma \sqrt{g h\left(\frac{4 n^2 \pi^2}{k^2}+1\right)}}, \quad \ldots\ldots \quad 28$$

worin γ und k zwei Konstanten sind, welche von den Verhältnissen $\frac{r}{h}$ und $\frac{s}{h}$ in solcher Weise abhängen, daß $\gamma=2$, $k=\infty$, wenn

$$\frac{r}{h}=\frac{s}{h}=0.$$

Dieser Fall tritt offenbar dann ein, wenn man sich beide Wände: PS und QM gleichzeitig bis nach A und A' verschoben denkt, d. h. wenn der See an beiden Enden flach ist. Dann aber reduziert sich die Formel 28 auf:

$$T_n=\frac{\pi l}{\sqrt{g h}}=\frac{2 \pi a}{\sqrt{g h}} \quad \ldots\ldots \quad 29$$

Hier ist die rechte Seite von n unabhängig und **die Perioden sämtlicher Fundamentalschwingungen haben einen und denselben Wert.** — So gestalten sich die Verhältnisse im Grenzfall, wenn $r=s=0$. Kehren wir noch zum allgemeinen Fall zurück, wenn r und s endlich sind, wobei wir voraussetzen, daß die Endwand PS sich rechts und die Endwand QM links des tiefsten Querschnittes OR befindet, wie in der oberen Zeichnung 39 dargestellt worden ist. Aus der Formel 28 folgt:

$$\frac{T_m}{T_n}=\sqrt{\frac{4 n^2 \pi^2+k^2}{4 m^2 \pi^2+k^2}}. \quad \ldots\ldots \quad 30$$

Wir wissen schon, daß je nach den Werten von $\frac{r}{h}$ und $\frac{s}{h}$ die Konstante k^2 alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen kann. Dem-

entsprechend kann das Verhältnis $T_m : T_n$ alle Werte zwischen $n : m$ und 1 annehmen. Wenn z. B. $m = 1$, $n = 3$, so kann das Verhältnis $T_1 : T_3$ zwischen der Periode einer einknotigen und der Periode einer dreiknotigen Fundamentalschwingung alle Werte zwischen 3 und 1 haben. Wir heben dieses Resultat mit besonderem Nachdruck hervor, weil in der älteren Literatur vielfach ganz irrtümliche Ansichten bezüglich der Perioden der Fundamentalschwingungen verbreitet sind. Man dehnte die Theorie der Schwingungen in rechteckigen Seen mit konstanter Tiefe, die schon seit längerer Zeit bekannt war, auf alle Seen aus und bildete sich ein, daß die Periode einer zwei-, drei-, vierknotigen *Seiche* in jedem See zwei-, drei-, viermal kürzer sein müsse als die Periode der einknotigen. So dauern nach Forel die drei längsten Perioden im Bodensee je 55,8, 39,1 und 28,1 Minuten. Da das Verhältnis 55,8 : 28,1 nahezu 2 ist, hielt Forel die *Seiche* mit 55,8 Minuten Periode für einknotig und diejenige mit 28,1 Minuten Periode für zweiknotig. Auf diese Weise blieb die *Seiche* mit 39,1 Minuten Periode ohne Deutung. Um derselben doch gerecht zu werden, ersann Forel ein Unding, eine von der Theorie gar nicht vorgesehene „*seiche à la quinte*". Nun behauptet Chrystal, gewiß mit Recht, daß eine „*seiche à la quinte*" gar nicht existiert, daß die *Seiche* mit 55,8 Minuten Periode einknotig, die *Seiche* mit 39,1 Minuten Periode zweiknotig und diejenige mit 28,1 Minuten Periode dreiknotig ist und führt folgende Rechnung aus. In der Gleichung 30 setzt er $m = 1$, $n = 3$, $\frac{T_1}{T_3} = 2$ und findet sofort:

$$\frac{4\pi^2}{k^2} = \frac{3}{5}.$$

Jetzt kehrt er zu Gleichung 30 wieder zurück, setzt aber diesmal $m = 1$, $n = 2$ und den soeben gefundenen Wert von $\frac{4\pi^2}{k^2}$ ein und findet $T_1 : T_2 = 0{,}686$. Auf diese Weise bekommt er für seinen theoretischen See drei *Seiches*: eine einknotige, eine zweiknotige und eine dreiknotige, deren Perioden sich wie

$$1 : 0{,}686 : 0{,}5$$

verhalten. Die Perioden im Bodensee verhalten sich indes wie

$$1 : 0{,}701 : 0{,}504.$$

Eine Ähnlichkeit zwischen den beiden Fällen ist nicht zu verkennen, und der Beweis, daß ohne eine „*seiche à la quinte*" die

Schwingungsperioden im Bodensee ganz gut erklärt werden können, ist erbracht. Es besteht kein Zweifel, daß die *Seiche* mit 39,1 Minuten Periode als zweiknotige und diejenige mit 28,1 Minuten Periode als dreiknotige angesprochen werden kann. Der Unterschied zwischen dem theoretischen Fall und den reellen Verhältnissen erklärt sich ungezwungen dadurch, daß der Längsschnitt des Bodensees wohl von einer Kurve vierten Grades abweicht.

Die untere Zeichnung in Fig. 39 bezieht sich auf Seen, deren Tiefe durch eine konvexe Kurve vierten Grades darstellbar ist. In diesem Falle ist die Differentialgleichung, welcher P genügen muß, der Gleichung 27 in allen Stücken ähnlich, nur steht im ersten Gliede links der Faktor $1 + \frac{x^2}{a^2}$ statt des Faktors $1 - \frac{x^2}{a^2}$. Die Integrale dieser Gleichung sind den Integralen der anderen ähnlich, nur muß man *arctg* statt *log* schreiben. Die Formel für die Perioden ist der Formel 28 ähnlich, aber es steht unter dem Wurzelzeichen -1 statt $+1$, ferner wird die Konstante k^2 nie unendlich usw.

In Seen dieses Typus, sowie in allen Seen mit konvexem*) Boden ist das Verhältnis zwischen der Periode der zweiknotigen Fundamentalschwingung und der Periode der einknotigen immer kleiner als $1/2$, das Verhältnis zwischen der Periode der dreiknotigen und der Periode der einknotigen immer kleiner als $1/3$ usw., in den Seen mit konkavem Boden ist im Gegensatz dazu das erste Verhältnis immer größer als $1/2$, das zweite immer größer als $1/3$ usw.

Durch Stücke gerader Linien, Parabeln und Kurven vierten Grades kann man immer den Längsschnitt eines Sees mit einer jeden gewünschten Genauigkeit darstellen. Angesichts dessen sind wir berechtigt zu sagen, daß die in den §§ 3, 4 und 5 auseinandergesetzte Theorie alle diejenigen Fälle umfaßt, in denen die Längsachse gerade, der Querschnitt rechteckig und die Breite konstant, aber die Tiefe variabel ist. Freilich gestaltet sich die Lösung um so komplizierter und die Rechnungen sind um so länger, je mehr Stücke verschiedener Kurven zur Darstellung des Längsschnittes benötigt werden. Beispiele solcher Lösungen finden sich bei Chrystal.

---

*) In einer vollständigen Theorie müssen wir sowohl Seen mit konkavem wie solche mit konvexem Boden betrachten. In der Natur wird man kaum einen See mit ausschließlich konvexem Boden finden. Solche aber, deren Boden zum Teil konvex ist, sind häufig.

§ 6. Reelle Seen. Modelle.

Die Tragweite der in den §§ 3, 4 und 5 besprochenen Fälle ist beschränkt: sie beziehen sich auf Seen mit gerader Längsachse, rechteckigem Querschnitt und konstanter Breite, während die reellen Seen meist einen unregelmäßigen Trog ausfüllen. Nur selten findet sich ein See, der den Forderungen der Theorie annähernd entspricht. Aber gerade an diesen verhältnismäßig einfachen Beispielen, die sich leicht mathematisch behandeln lassen, haben wir gewisse allgemeine Sätze kennen gelernt. So haben wir erfahren, daß die Knoten sich nach den seichteren Stellen hin verschieben und von den tieferen entfernen, daß die Verhältnisse zwischen den Fundamentalperioden keine harmonische Reihe bilden: die Verhältniszahlen sind kleiner als die Glieder der harmonischen Reihe, wenn der Seeboden konkav, größer als die Glieder der harmonischen Reihe, wenn der Seeboden konvex ist.

Die Theorie des § 2 ist allgemein: sie kann auf alle länglichen Seen angewandt werden, soweit ihre Längsachse nicht zu stark gekrümmt ist.

Die Erfahrung lehrt, daß die Periode der einknotigen Fundamentalschwingung sehr oft mit genügender Annäherung selbst aus der einfachen Formel des § 3 erhalten werden kann; für Perioden der zwei- und mehrknotigen Schwingungen reicht sie nur ausnahmsweise aus. Die Formeln des § 4 für parabolische Seen wurden von Chrystal und von Maclagan Wedderburn auf den *Loch Earn* und *Loch Treig* mit befriedigendem Erfolge angewandt.

Fundamentalperioden am *Loch Earn**) (Schottland).

Zahl der Knoten	Berechnete Periode (in Minuten)	Beobachtete Periode
1	14,50	14,52
2	8,14	8,09
3	5,74	6,01
4	4,28	3,99
5	3,62	3,48 — 3,60
6	2,93	2,88

*) G. Chrystal, An Investigation of the Seiches of Loch Earn. Trans. R. Soc. Edinburgh, Bd. XLVI, S. 455 bis 517.

Wo die Theorie Chrystals nicht ausreicht, kann man Modelle verwenden. Die Horizontaldimensionen des Modells sollen alle im selben Verhältnis m verkleinert sein, die Tiefe kann man in einem anderen Verhältnis, sagen wir n, verkleinern. Da die Perioden dieselben Dimensionen wie $\frac{l}{\sqrt{gp}}$ haben, wo l die Länge, p die Tiefe und g die Schwerkraft bedeutet, so werden die Schwingungsperioden des Modells $\frac{m}{\sqrt{n}}$ mal kürzer sein als die Perioden des Sees selbst. K. Honda*) und seine Mitarbeiter erzeugten Schwingungen in den Modellen mit Hilfe eines Pendels, dessen Linse ins Wasser tauchte. Die Länge des Pendels war variabel und konnte beliebig reguliert werden. Auf diese Weise konnten sie Schwingungen mit verschiedenen Perioden erzeugen. Es ist klar, daß die Schwingungen des Wassers erzwungen waren, aber indem man die Länge des Pendels und somit die Schwingungsperiode allmählich variierte, erhielt man auch freie Eigenschwingungen des Wassers, die sich durch eine Zunahme der Amplitude der Bewegung verrieten. Die Hauptschwierigkeit der Experimente bestand allerdings im Erkennen des wahren Maximums der Amplitude.

Die Verfertigung eines Modells bietet keine besondere Schwierigkeiten dar; als Material zur Anfertigung des Troges ist Gips zu empfehlen. Natürlich ist eine gute bathymetrische Karte die Hauptbedingung für den Erfolg.

Die Theorie der §§ 3, 4 und 5 ist mathematisch identisch mit der Theorie der Schwingungen einer gespannten Saite, deren Dichte umgekehrt proportional der Seetiefe variiert, nur befinden sich Bäuche dort, wo im See die Knoten liegen und umgekehrt. Auch die Verrückungen sind anders zu interpretieren: die Querverschiebung der Saite entspricht der Horizontalverschiebung im See und der Gradient der Kurve, welche von der Saite in einem gegebenen Moment gebildet wird, entspricht der Vertikalverrückung im See. Man könnte somit Saiten von variabler Dichte als Modelle gebrauchen, wenn die Fabrikation solcher Saiten technisch ausführbar wäre.

---

*) K. Honda, J. Terada, Y. Yoshida und D. Isitani, Secondary Undulations of Oceanic Tides. Journ. Coll. of Sc. Tokyo, Bd. XXIV (1908), S. 76.

§ 7. Allgemeine Bemerkungen. Die Ursachen der Schwingungen.

Selten, wahrscheinlich nie, tritt eine Fundamentalschwingung rein auf. Gewöhnlich ist die *Seiche* aus mehreren Fundamentalschwingungen zusammengesetzt, nur sind die relativen Amplituden sehr verschieden, und infolgedessen tritt bald diese, bald jene Fundamentalschwingung mehr in den Vordergrund. Auf einer Limnographenkurve**) kann man leicht die Hauptkomponenten einer *Seiche* erkennen. — Rechnerisch oder mit Hilfe eines harmonischen Analysators kann man die Kurve in einfache harmonische Komponenten zerlegen und deren Amplituden, Perioden und Phasen bestimmen. — In der Praxis wird diese Aufgabe oft sehr schwierig, ja sogar unausführbar, und zwar dank verschiedener unperiodischer Wasserstandsänderungen, welche durch Windstauung, Windwellen und aus anderen Ursachen entstehen und störend wirken. Ein brauchbares Limnogramm ist ziemlich selten.

Am häufigsten tritt die einknotige Fundamentalschwingung auf; im Genfer-See beobachtete Forel sehr oft eine *„dikrote Seiche"*, d. i. eine Kombination der einknotigen und zweiknotigen Fundamentalschwingung.

In der Theorie Chrystals ist die Reibung außer acht gelassen worden. Infolgedessen sind die Schwingungen ewigdauernd. Tatsächlich klingen die Schwingungen mit der Zeit aus, doch kann man, besonders in tiefen Seen, viele Schwingungen nacheinander beobachten. Im Genfer-See beobachtete Forel einmal eine einknotige Schwingung, welche $7^1/_2$ Tage hintereinander dauerte. Er zählte 148 Schwingungen. Die ganze Amplitude (d. h. die Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Wasserstande) maß anfangs 169 mm, bei der 140. Schwingung noch 80 mm, bei der 148. Schwingung trat eine zweiknotige Schwingung auf, so daß die *Seiche* sich in eine *„dikrote"* verwandelte. Forel meint, daß ohne das Dazwischentreten der zweiknotigen Schwingung die ursprüngliche einknotige *Seiche* noch zwei Tage lang eine meßbare Amplitude beibehalten hätte.

Jeder See kann schwingen, aber nicht in allen Seen sind die Schwingungen der Beobachtung leicht zugänglich. In seichten

---

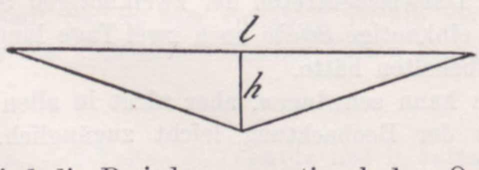
**) Ebenso wie ein Maregraph ist der Limnograph ein Apparat, welcher den Wasserstand kontinuierlich auf einer langsam rotierenden Trommel oder einem fortlaufenden Papierstreifen registriert.

Seen werden Schwingungen von unregelmäßigen, unperiodischen Wasserstandsänderungen infolge Windstauung, Windwellen usw. ganz verdeckt. Die Reibung wirkt in seichten Seen viel stärker und läßt große Amplituden nicht aufkommen. Auch eine komplizierte, vielverzweigte Gestalt des Seetroges ist der *Seiche*bildung nicht günstig: verschiedene Teile wollen dann für sich schwingen, insbesondere wenn Untiefen einzelne Teile voneinander trennen und, da ihre Schwingungsdauern (Perioden) nicht zusammenfallen, so stören sie einander.

Wir haben schon in § 1 erwähnt, daß die Schwingungsperioden auch vom Wasserstande abhängen. Das ist übrigens aus den Formeln, welche die Abhängigkeit der Periode von den Dimensionen des Sees angeben, unmittelbar ersichtlich. Doch muß man bemerken, daß diese Abhängigkeit bei Seen verschiedener Form sich verschieden gestaltet. Nehmen wir zuerst die Formel 13, welche für rechteckige Seen mit konstanter Tiefe gilt. Die Perioden sind dem Quotienten $\frac{l}{\sqrt{p}}$ proportional. Die Länge l des Sees bleibt bei hohem wie bei niedrigem Wasserstande dieselbe. Bei hohem Wasserstande ist jedoch die Tiefe p größer; folglich sind alle Perioden im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus der Tiefe kürzer. Dieser Fall ist aber von geringer praktischer Bedeutung, da natürliche Seetröge niemals vertikale Wände haben. Wichtiger ist der Fall eines parabolischen Sees (Formel 26); hier sind die Perioden dem Quotienten $\frac{l}{\sqrt{h}}$ ($q = {}^1/_2 l$!) proportional. Auf Grund der Parabelgleichung ist dieser Quotient aber konstant. Mithin sind die Perioden in diesem Falle vom Wasserstand unabhängig.

Nehmen wir noch einen See mit geradlinigem und symmetrischem Längsschnitt von dreieckiger Gestalt (Fig. 40).

Fig. 40.



Wieder sind die Perioden proportional dem Quotienten $\frac{l}{\sqrt{h}}$, obgleich wohlverstanden die Proportionalitätsfaktoren andere sind

als bei parabolischen Seen. Hier ist aber das Verhältnis $\frac{l}{h}$ konstant und die Perioden wachsen alle proportional $\sqrt{h}$.

Im allgemeinen können wir erwarten*), daß das Steigen des mittleren Wasserniveaus die Schwingungsperioden vergrößert, wenn der Seetrog so gestaltet ist, daß die Oberfläche des Sees mit steigendem Wasserstande bedeutend wächst; im Gegenteil können wir ein Abnehmen der Perioden erwarten, wenn mit steigendem Wasserstande die Oberfläche des Sees nur wenig zunimmt.

Die *Seiches* sind freie Schwingungen, aber ohne äußere Ursache entstehen sie nicht. Da es mehrere erregende Ursachen gibt, so entstehen Schwingungen sehr häufig, aber nicht immer gestalten sich die Verhältnisse dermaßen, daß eine *Seiche* sich gut entwickeln könnte. So z. B. werden Schwingungen durch Böen und Windstöße leicht erregt, doch selten entwickelt sich eine schöne *Seiche* schon während des Sturmes: bevor der See einige Schwingungen ausführt, kommt eine neue Störung, und statt regelmäßiger kommen unregelmäßige Schwingungen zustande. Regelmäßige *Seiches* entstehen meist dann, wenn der Sturm sich schon gelegt hat, sie beginnen mit unregelmäßigen Oszillationen, die bald in schöne regelmäßige Schwingungen übergehen. Zahlreiche Beobachtungen an verschiedenen Seen beweisen, daß viele *Seiches* auf diese Weise entstehen.

Im *Erie*-See sind regelmäßige *Seiches* selten, dagegen ist dieser See durch seine unregelmäßigen starken Oszillationen beim Vorübergehen von Tornados bekannt. Warum in gewissen Seen regelmäßige *Seiches* häufig, in anderen selten sind, wissen wir noch nicht genau, aber es scheint, daß, wie schon oben bereits erwähnt wurde, die Konfiguration des Sees die Hauptrolle spielt: tiefe Seen von regelmäßiger Form ohne Verzweigungen sind der Ausbildung schöner *Seiches* günstig.

Erdbeben können Seen in Schwingungen versetzen. Ein historisch ganz sicher verbürgtes Beispiel kennen wir aus dem Jahre 1755. Das Erdbeben von Lissabon veranlaßte in den schottischen Seen: *Loch Lomond, Loch Ness, Loch Lung* und *Loch Keatrin* starke *Seiches*. Ein anderes Beispiel ist dem Schreiber dieser Zeilen nicht bekannt, wahrscheinlich sind durch Erdbeben veranlaßte *Seiches* selten.

*) G. Chrystal, a. a. O. S. 462.

Als wichtige und häufig wirkende Ursache von *Seiches* kann man Denivellationen betrachten. Zuerst wird man an Denivellationen durch ungleichmäßige Druckverteilung denken, wobei man sich den Vorgang folgendermaßen vorstellen kann. Der barometrische Gradient stellt die Seeoberfläche schief, wenn nachher ein Druckausgleich rasch eintritt, fließt das gestaute Wasser ab und gelangt dank der Trägheit über die Gleichgewichtskonfiguration hinaus, infolgedessen muß es wieder zurückfließen, staut sich wieder an usw. Doch überzeugt eine einfache Überschlagsrechnung, daß der barometrische Gradient keine besonders großen *Seiches* erzeugen kann. Ein barometrischer Gradient von 0,05 mm pro Kilometer ist schon sehr groß, solche Gradienten kommen nur während starker Stürme und nur auf kurze Strecken vor. Indes kann ein Gradient von 0,05 mm pro Kilometer in einem 20 km langen See eine relative Hebung des Wasserspiegels im Betrage von nur 13,6 mm erzeugen (d. h. an einem Ende steigt das Wasserniveau um 6,8 mm über das Mittel, am anderen fällt es um 6,8 mm unter das Mittel). Zu weit größeren Denivellationen kann der Wind Anlaß geben, aber man darf nicht vergessen, daß der Wind die größten Denivellationen gerade in seichten Seen erzeugt, wo die Lokalbedingungen der Ausbildung schöner, langdauernder Schwingungen abhold sind.

Weiter kann eine Denivellation durch einen starken Regenguß entstehen, welcher an einem Ende des Sees plötzlich niedergeht, oder durch geschwollene Gebirgsbäche und Flüsse, die das eine Ende des Sees plötzlich steigen lassen. Ein hieraufbezügliches Beispiel beschreibt Chrystal aus seinen Beobachtungen am *Loch Earn*.

Nach Napier Denison können lange Luftwellen stehende Schwingungen in einem See erzeugen. Solche Wellen treten besonders bei niedrigem Luftdruck auf. Ihre Länge beträgt oft zehn, zwanzig und mehr Kilometer. Sie entstehen, wenn eine Luftschicht über einer anderen hinfließt, wobei Temperatur und Dichte an der Grenze plötzlich wechseln. Größere Luftwellen lassen sich auf der Erdoberfläche nicht nur durch Barometeroszillationen, sondern auch dadurch erkennen, daß das Wetter in kurzen Zeitintervallen wechselt: bald ziehen Wolken heran, bald klärt sich der Himmel wieder auf.

Die Druckänderungen beim Vorüberziehen der Luftwellen sind gering, wenn aber die Periode*) der Luftwellen mit einer der

*) Eine ganz strenge Periodizität ist nicht zu erwarten; man kann als Periode das mittlere Zeitintervall zwischen den Barometermaximis auffassen.

Schwingungsperioden des Sees nahezu zusammenfällt, so können stehende Schwingungen entstehen. Je mehr Luftwellen aufeinander folgen, je genauer die Periode der Luftwellen mit der Schwingungsperiode*) übereinstimmt, desto größer die Amplitude der *Seiche*, insbesondere, wenn der Abstand der Luftwellenkämme, in der Richtung der Längsachse des Sees gemessen, der Wellenlänge der stehenden Schwingung oder einem ihrer ganzen Vielfachen nahezu gleichkommt. Dann verstärkt jede neue Luftwelle die Wirkung der vorhergehenden und durch Summation lauter kleiner Wirkungen kann ein bedeutendes Resultat entstehen.

§ 8. Stehende Schwingungen der Buchten und ganzer Meeresteile. Die Kabbelung (Clapotis).

In Meeresbuchten können stehende Schwingungen durch die Gezeitenobertöne, durch Übertragungswellen, endlich durch langperiodische gemeine „Seen“ (Windwellen) oder „Dünung“ erregt werden. Eine genaue Koinzidenz der Perioden ist nicht absolut notwendig; es genügt schon, wenn die Periode der erregenden Wellen ein ganzes Vielfaches der Periode der stehenden Schwingung ist.

Die Perioden der Schwingungen in Buchten sind nicht konstant, sie sind einmal etwas länger, ein anderesmal etwas kürzer. Eine Ursache dieser Variationen liegt ohne Zweifel in den Variationen des Wasserstandes, wie es im vorigen Paragraphen gelegentlich der Seen auseinandergesetzt wurde, aber es tritt noch eine zweite Ursache hinzu, auf welche die ebenfalls im vorigen Paragraphen zitierten japanischen Forscher hingewiesen haben. Eine Meeresbucht hat keine feste Grenze gegen das Meer; als Grenze gegen das Meer müssen wir die Knotenlinie ansehen. Dieselbe bildet sich immer im Eingang in die Bucht, aber bei weitem nicht immer an derselben Stelle. Je nachdem der Knoten sich mehr gegen das Innere der Bucht oder weiter gegen das Meer hin gebildet hat, sind die Horizontaldimensionen der schwingenden Wassermasse kleiner oder größer und die Schwingungsdauer ist ebenfalls kleiner oder größer.

---

*) Das ist nur richtig, wenn viele Wellen aufeinander folgen; wenn nur einige Wellen vorübergehen, so tritt der Maximaleffekt nicht bei genauer Koinzidenz ein.

Wir haben soeben gesagt, daß der Knoten sich am Eingang in die Bucht bildet. Das bedeutet, daß eine Bucht sich wie ein halber See verhält. Nehmen wir z. B. eine einknotige *Seiche*; der Knoten muß sich nicht weit von der Mitte und wenn der Seetrog symmetrisch ist, genau in der Mitte befinden. In einer Bucht befindet er sich am Eingang.

Die stehenden Schwingungen der Buchten sind weniger gut bekannt als die Schwingungen der Seen. Dies rührt hauptsächlich daher, daß Wellen und Gezeiten Schwingungen von nicht besonders großer Amplitude gänzlich verdecken; nur ausnahmsweise große Schwingungen werden ohne Hilfe der Instrumente bemerkt. Erst, wenn man einen Maregraphen in einer Bucht aufstellt, so zeigt die Analyse der Registrierungen bald, daß außer den periodischen Variationen des Wasserstandes, die auf die Gezeiten zurückgeführt werden können, noch andere Schwingungen existieren, die sich ungezwungen durch stehende Schwingungen erklären lassen.

Trotzdem sind schon aus älteren, ohne Maregraphen ausgeführten Beobachtungen zahlreiche Beispiele stehender Schwingungen bekannt. Durch solche Schwingungen erklären sich am besten die Wechselströmungen in der *Euripus*-Straße zwischen Böotien und Euböa. Der Strom wechselt 16- bis 20-mal während 24 Stunden. Es scheint, daß diese Ströme infolge beständiger einknotiger Schwingungen im Golf von *Talanti*, welcher nur durch die Meerenge von *Euripus* und den Kanal von *Oreos* mit dem Meere kommuniziert, entstehen. Der Knoten befindet sich in der Meerenge bei *Chalkis*. Hier sind die Ströme am stärksten, was gerade für den Knoten bezeichnend ist. Übrigens spricht auch die örtliche Konfiguration der Küste dafür.

Schwingungen mit Perioden von einigen und mehr Minuten Dauer sind aus vielen Häfen und Buchten bekannt. Eine, wie es scheint, bei weitem nicht vollständige Tabelle solcher Häfen und Buchten gibt Oddone in seiner oben zitierten Abhandlung.

Wegen seiner Schwingungen bekannt ist der Hafen von *Algier*; die Periode der Schwingungen beträgt dort nur 1 bis 3 Minuten, aber die Amplitude erreicht zuweilen 1 m. Die *Rias*häfen der Nordküste Spaniens, besonders diejenigen, die einen tiefen und breiten Eingang haben (wie *San Sebastian* und *Los Pasajes*) sind wegen ihrer *„Resaca“* berüchtigt. Die *„Resaca“* ist in manchen Zügen der *Seiche* ähnlich; merkwürdig aber ist der Umstand, daß die Vertikalbewegung angeblich unbedeutend ist, während die Hori-

zontalbewegung eine solche Stärke erreicht, daß die Schiffsketten zerrissen werden.

Man kennt stehende Schwingungen aus der *Fundy*-Bai und aus dem *St. Lorenz*-Golf, aus vielen Buchten und Häfen der Vereinigten Staaten, aus dem *Sydney*-Hafen in Australien, aus der Bucht von *Catania* in Sizilien usw. Japanische Forscher (K. Honda und seine Mitarbeiter: Terada, Yoshida und Isitani) haben „*Seiches*“ in nicht weniger als 68 Buchten und Häfen, wovon 63 in Japan, 2 in Korea und je eine in China, Formosa und auf den Bonininseln liegen, konstatiert. Speziell sind die stehenden Schwingungen im *Nagasaki*-Hafen, wo sie den Lokalnamen „*Abiki*“ führen und 50, 60 cm (zuweilen noch mehr) Amplitude erreichen, allen Seeleuten wohlbekannt. An der pacifischen Küste Japans heißt die Erscheinung „*Yota*“. Die japanischen Forscher haben in einzelnen Häfen und Buchten sehr verschiedene Schwingungsperioden von einigen Minuten bis zu einigen Stunden Dauer gefunden. Die Amplituden waren am größten in länglichen, tiefen Buchten und Flußmündungen. Man konnte zuweilen in angrenzenden Buchten oder in einer Bucht und auf einer Strecke der nächsten Küste gemeinschaftliche Schwingungen von derselben Periode und Phase beobachten. In gewissen Buchten war die Periode ziemlich konstant, in anderen variabel (die Erklärung dieser Erscheinung wurde oben gegeben). Sehr interessant ist die Beobachtung, daß in einigen Buchten dieselben Schwingungen sich bei derselben Gezeitenphase tagtäglich wiederholen. Ebenfalls sehr interessant ist die Beobachtung, die freilich nur einigemal gelungen ist, daß die in einer Bucht beobachtete Schwingung auch im offenen Meer, obgleich mit geringerer Amplitude, vorhanden war. Vielleicht am wichtigsten aber war eine Beobachtung, die den unzweifelhaften Beweis liefert, daß hier wahre stehende Schwingungen vorhanden sind. Die japanischen Forscher überzeugten sich, daß die Schwingungsdauer von der Art der Erregung unabhängig war, sie blieb dieselbe ob die *Seiche* durch einen Sturm oder durch eine „*Tsunami*“ oder durch die Gezeiten erzeugt wurde.

Zu ähnlichen, obwohl vielleicht nicht so allgemeinen Resultaten ist auch W. Duff*) gelangt, der die amerikanischen Beobachtungen diskutierte. Einen speziellen, sehr interessanten Fall, den Duff

---

*) W. Duff, Secondary Undulations, shown by the Recording Tide-Gauge. Amer. Journ. of Science, Bd. XXIV (1908 r.).

anführt, wollen wir hier besonders erwähnen. Zu *Yarmouth* in der *Fundy*-Bai ist die *Seiche* einknotig bei hohen Fluten und zweiknotig bei niedrigen. Es ist klar, daß ohne eine genaue bathymetrische Karte, ohne Kenntnis der Lokalverhältnisse eine Lösung dieses Rätsels nicht versucht werden kann, man kann aber behaupten, daß die Lösung in der Konfiguration der Bai zu suchen ist. Man kann sich eine Konfiguration denken, bei welcher die beschriebene Erscheinung notwendigerweise auftreten müßte. Denke man sich einen länglichen Trog mit einer Schwelle in der Mitte. Bei hohem Wasserstande, wenn die Schwelle mit Wasser bedeckt ist, schwingt die ganze Wassermasse als Einheit, bei niedrigem Wasserstande wird die Schwelle entblößt, die Wassermasse wird in zwei Teile geschieden, von denen jeder für sich als Einheit schwingt. Vielleicht geschieht etwas Ähnliches in der *Yarmouth*-Bai, vielleicht gibt es hier eine unterseeische Schwelle, auf welcher sich bei niedrigem Wasserstande der zweite Knoten ausbildet. Der erste Knoten befindet sich immer im Eingang zur Bucht*).

Auch Schwingungen ganzer Meeresteile sind nicht ausgeschlossen. Schwingungen von 18 bis 28 Minuten (im Mittel 21 Minuten) Dauer, werden oft auf *Malta* beobachtet. Man vermutet dort eine stehende (mehrknotige) Schwingung des Meeresteiles zwischen Sizilien und Afrika. An der Südküste Siziliens zwischen *Trapani* und Syrakus tritt zuweilen das sogenannte *„marrobio"* auf, wobei die Amplitude lokal sogar einen Meter erreicht. Der Meeresgrund wird dabei aufgewühlt, das Wasser wird trübe und nimmt eine rötliche Färbung an. Daher der Name *„marrobio"* *(mare rubrum)*. In den Küstenorten wird das Grundwasser in Bewegung versetzt, und die Kloaken stinken. Die Schwingungsdauer ist sehr kurz, nur ungefähr eine Minute. Wegen dieser kurzen Schwingungsdauer darf man die Schwingung als vielknotig ansehen. Sie gehört wahrscheinlich in dieselbe Kategorie wie die sogenannte „Kabbelsee" *(clapotis)*, wovon gleich unten die Rede sein wird.

Es ist sehr wohl möglich, daß Schwingungen ganzer Meeresteile sich mit den Gezeiten zusammensetzen und daß verschiedene lokale eigentümliche Merkmale dieses Phänomens zum großen Teil auf Eigenschwingungen beruhen, aber Eigenschwingungen ganzer Ozeane sind nicht bekannt. Vielleicht sind die übrigen Dimensionen der Ozeane im Verhältnis zur Tiefe zu groß und die Impulse

*) Eine Bucht schwingt wie ein halber See.

in verschiedenen Teilen derselben zu mannigfaltig, als daß sich merkliche Schwingungen der ganzen Wassermasse ausbilden könnten Wir wissen doch, daß in seichten Seen „*Seiches*“ nur sehr selten zustande kommen.

An dieser Stelle müssen wir noch die sogenannte Kabbelung, französisch „*Clapotis*“, erwähnen, die sich an steilen Küsten, dank der Interferenz gewöhnlicher fortschreitender Wellen, bildet. An der Steilwand reflektierte Wellen interferieren mit den primären Wellen und setzen sich mit denselben ganz so, wie es im § 3 beschrieben wurde, zu stehenden Wellen zusammen, wobei die Steilwand zu einer Bauchfläche wird.

Der „*Clapotis*“ und eine vielknotige *Seiche* ist eigentlich ein und dasselbe, denn die Differenz zwischen dem „*Clapotis*“ und einer „*Seiche*“ ist rein quantitativ. Die Periode einer ein- oder zweiknotigen *Seiche* in einem großen See beträgt mehrere Minuten oder ein paar Stunden, die Periode der Wellen bei dem „*Clapotis*“ beträgt nur einige Sekunden; dort beträgt die Wellenlänge mehrere Kilometer, hier nur mehrere Meter; dort hat man nur einige Knoten und Bäuche, hier Tausende von Knoten und Bäuchen.

Doch müssen wir die mathematische Theorie der „*Seiche*“ und des „*Clapotis*“ anders auffassen. Dort ist die Tiefe im Verhältnis zur Wellenlänge sehr klein, hier ist umgekehrt die Wellenlänge entweder mit der Tiefe vergleichbar oder kleiner als diese. Dort kann man die höheren Potenzen des Quotienten $\frac{p}{\lambda}$, hier die höheren Potenzen von $\frac{\lambda}{p}$ vernachlässigen.

Zehntes Kapitel.

Die Gezeiten.

§ 1. Allgemeines. Höhe der Gezeiten.

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen des Mondes*) steigt der Meeresspiegel an der europäischen Küste des Atlantischen Ozeans zweimal, und zweimal weicht das Meer von

*) Die mittlere Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Mondkulminationen umfaßt 24 Stunden 50 Minuten 28,3 Sek. mittlerer Sonnenzeit.

der Küste zurück. Die Höhe der Flut und die Tiefe der Ebbe sind nicht konstant. An einem und demselben Orte nimmt die Höhe der Flut (bzw. die Tiefe der Ebbe) im Laufe der Woche von Tag zu Tag zu oder ab. Die größte Flut und die größte Ebbe pflegt einen, zwei, drei Tage nach den Syzygien, d. h. nach Voll- und Neumond zu kommen; die kleinste zeigt sich um die Zeit der Quadraturen, d. h. um das erste und letzte Mondviertel. Außer dieser zweiwöchentlichen „Ungleichheit" kann man noch andere Ungleichheiten in der Gezeitenhöhe unterscheiden. So existiert z. B. eine Ungleichheit mit einer dem anomalistischen Monat gleichen Periode. Anomalistischer Monat heißt die mittlere Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch den erdnächsten Punkt (Perigäum) seiner Bahn; er beträgt 27 Tage 13 Stunden 18 Minuten und 33,3 Sekunden. Ferner existiert eine halbjährliche Ungleichheit, welche bewirkt, daß die Gezeiten um die Zeit der Nachtgleichen größer sind als um die Zeit der Solstitien. Diese Ungleichheiten nebst einigen anderen werden wir weiter unten näher kennen lernen.

Nicht nur am europäischen Gestade des Atlantischen Ozeans, sondern allgemein beobachtet man zwei Fluten und zwei Ebben an einem Mondtage. Aber es gibt Küsten, wo regelmäßig eine größere Flut und eine größere Ebbe mit einer kleineren Flut und einer kleineren Ebbe abwechseln; das ist die sogenannte tägliche Ungleichheit, die natürlich andere Ungleichheiten nicht ausschließt. — Überhaupt ist der Charakter der Erscheinung an verschiedenen Küsten, selbst an einer und derselben Küste, aber an verschiedenen Orten, verschieden. Es gibt Orte*), wo die tägliche Ungleichheit so stark ist, daß nur eine Flut und eine Ebbe merklich bleiben und wieder andere**), wo die Sonnengezeiten über die Mondgezeiten die Oberhand gewinnen: man hat dann zwei Fluten und zwei Ebben, aber nicht während eines Mond-, sondern während eines Sonnentages. Es gibt selbst Orte, wo vier Fluten (und Ebben) täglich vorkommen.

In Seen, mit Ausnahme der größten, wie etwa der kanadischen, sind die Gezeiten ganz unmerklich. Im offenen Ozean, d. h. an ozeanischen Inseln, erreichen sie nie eine besondere Größe, um so größer sind sie dagegen an einigen Festlandküsten. So z. B. er-

---

*) Z. B. *Haï-phong* in *Tonking*.

**) Z. B. *Tahiti*.

reicht die totale Amplitude (Doppelamplitude), d. i. die Differenz zwischen dem höchsten Wasserstande während der Flut und dem niedrigsten während der Ebbe an der atlantischen Küste Patagoniens 10 m und darüber hinaus. Noch größer sind die Gezeiten in gewissen Buchten und Kanälen, so z. B. im *Bristol*-Kanal und im Kanal *La Manche* in Europa und in der *Fundy-Bai* in Nordamerika.

Die höchsten Fluten treten um die Zeit der Nachtgleichen auf, besonders wenn ein gleichzeitig vom Meere her wehender Wind das Wasser aufstaut. — Um eine genauere Vorstellung von der Gezeitengröße zu geben, wollen wir einige Daten nach dem „*Annuaire du Bureau des Longitudes*“ für 1910 anführen.

Ort	Mittlere Doppelamplitude der Syzygialgezeiten	Maximum bei Äquinoktialgezeiten
Minas Basin (Fundy-Bai, Neuschottland)	15,4 m	19,6 m
Gallegos-Hafen (Patagonien, atlantische Küste) .	14,0 „	18,0 „ *)
Portishead (Bristol-Kanal, England)	12,8 „	16,3 „
Mündung des Koksoak-Flusses (Ungava-Bai, Labrador)	11,7 „	15,0 „
Granville (Kanal La Manche, Frankreich) . . .	11,5 „	14,7 „
Mündung des Fitzroy-Flusses (King-Sound, Australien, Küste des Indischen Ozeans)	11,0 „	14,0 „ *)
Mündung des Söul-Flusses (Korea)	10,3 „	13,2 „
Bhàunagar (Golf von Cambay, Arabisches Meer, Indien)	9,7 „	12,4 „
Colorado-Mündung (Golf von Kalifornien) . . .	9,6 „ *)	12,3 „ *)
Thistle-Kanal (Spencer-Golf, Südaustralien)	9,1 „ *)	11,7 „ *)
Haitan-Kanal (Formosa-Straße)	7,3 „	9,3 „ *)
Majunga (Mozambique-Straße, Madagaskar) . . .	3,8 „	4,9 „
La Luz (Kanarische Inseln)	3,0 „	3,9 „
Lofoten (Norwegen)	2,9 „	3,7 „
Alabat-Insel (Philippinen, Pazifischer Ozean) . .	2,7 „	3,5 „ *)
Meerbusen von Suez (Rotes Meer)	2,1 „	2,7 „ *)
Fernando-Póo-Insel (Guinea-Küste)	2,1 „	2,7 „
Gabes (Kl. Syrte, Tunis)	1,8 „	2,1 „
Fort Dauphin (Haïti, Atlantischer Ozean) . . .	1,7 „	2,1 „
usw. usw.	usw.	usw.

*) Approximativ.

§ 2. Historischer Überblick über die Gezeitentheorie*).

Bei alten chinesischen Autoren sind die Meinungen geteilt: während einige meinen, daß das Wasser bei der Erde dieselbe Rolle spielt, wie das Blut beim Menschen und die Gezeiten für eine Art Pulsschlag halten, glauben andere, daß die Gezeiten ein Merkmal der Atmung der Erde sind. Ko-Hung, der im IV. Jahrhundert unserer Zeitrechnung lebte, sagt, daß der Himmel sich während eines Monats bald nach West, bald nach Ost verschiebt; damit hängt die zweimal im Monat erfolgende Zu- und Abnahme der Gezeiten zusammen. — Weiter sagt Ko-Hung, daß, da im Sommer die Sonne im Süden steht und der Himmel weiter von der Erde entfernt liegt, das männliche Prinzip stärker ist als das weibliche, weshalb die Gezeiten im Sommer größer sind als im Winter.

Der arabische Gelehrte Kazwini (gestorben 1283) meinte, daß die Sonnen-, insbesondere aber die Mondstrahlen eine Ausdehnung des Wassers bewirken. Geht der Mond unter, so zieht sich das Wasser zusammen und tritt von der Küste zurück. Um verschiedene Gezeitenphasen zu erklären, nimmt Kazwini zu Strömungen, welche die Ausdehnung des Wassers angeblich begleiten sollen, seine Zuflucht. Er vergleicht auch die Gezeiten mit dem Aufwallen der Säfte im menschlichen Körper.

Einfacher ist die Erklärung im Koran: „Wenn der Engel, der die Aufsicht über die Gewässer hat, den Fuß ins Wasser setzt, steigt die Meeresoberfläche, zieht er den Fuß zurück, dann fällt das Meer wieder.“

In der alten isländischen Literatur findet man ähnliche Ansichten über das Wesen der Gezeiten, wie in der arabischen: bald werden sie auf eine abwechselnde Ausdehnung des Wassers unter der Einwirkung der Sonnenstrahlen und Zusammenziehung

---

*) In diesem, sowie in den nächsten Paragraphen wurden folgende Werke vielfach benutzt:

Laplace: Traité de mécan. céleste. Bd. II und V (Laplaces Werke, herausgegeben von der Akad. der Wiss. Paris 1878 bis 1884).

M. Lévy: Leçons sur la théorie des marées. Paris 1898.

Ph. Hatt: Explication de la théorie des marées. Annuaire du Bureau des Longitudes für 1904 und 1905.

G. H. Darwin: Scientific Papers, Bd. I und II, und „On Tides and kindred Phenomena in the Solar System“.

Rollin A. Harris: Manual of the Tides. Report Coast and Geod. Survey für 1894, 1897, 1900, 1904 und 1907.

in Abwesenheit der Sonne zurückgeführt, bald wird gesagt, daß der Vollmond Feuchtigkeit auf die Erde heruntergelangen läßt, wodurch das Meer anschwillt und aus seinen Grenzen heraustritt.

Die Griechen und die Römer kannten vor allem das Mittelmeer. Da an den Küsten dieses Meeres die Gezeiten meist unbedeutend sind, drängt sich diese Erscheinung der Aufmerksamkeit nicht auf, weshalb sie auch selten erwähnt wird. Selbst ein solch vielseitiger und wohlunterrichteter Mann wie Aristoteles erwähnt die Gezeiten (in seinen authentischen Schriften) nur ein paarmal. Die großen Fluten an den Nordwestküsten Europas waren ihm bekannt; er wußte, daß die Gezeiten im innigen Zusammenhang mit den Mondphasen stehen und daß ihre Amplitude im Ozean größer ist als in kleinen Meeren. Unter den Geschichtschreibern spricht Herodot von Gezeiten im Roten Meer, Cäsar von Gezeiten an den Küsten Galliens und Britanniens. Am besten informiert scheint Posidonius gewesen zu sein. Sein Werk ist verloren gegangen, wir kennen ihn nur aus den Zitaten bei Strabo. Posidonius beschreibt die Gezeiten zu Gades *(Cadix)*, die ihm aus eigener Anschauung bekannt waren. Zudem hat er noch die Einwohner gründlich ausgefragt. Die Beschreibung ist genau, die monatlichen und jährlichen Ungleichheiten werden besprochen. Den wahren kausalen Zusammenhang mit der Bewegung des Mondes kennt Posidonius natürlich nicht, aber er kennt sehr gut den äußeren Zusammenhang mit den Mondphasen. Posidonius und nach ihm Strabo zitieren auch Seleukus aus Babylon (IV. Jahrhundert vor Chr.), der die Gezeiten im Persischen Golf beschrieben hat. Pytheas aus Massilia *(Marseille)*, der ebenfalls im IV. Jahrhundert vor Chr. lebte, kannte auch den Zusammenhang der Gezeiten mit den Mondphasen. Sonst wissen wir von seinen Ansichten nichts, da sein Werk ebenfalls verloren gegangen ist. Unter den römischen Schriftstellern hat sich der ältere Plinius mit den Gezeiten beschäftigt. Er sagt selbst, daß die Ursache der Gezeiten in der Bewegung des Mondes und der Sonne liegt, aber der nähere kausale Zusammenhang blieb ihm natürlich verborgen.

Es ist übrigens evident, daß die Seeleute und die Bevölkerung der ozeanischen Küsten von jeher mit den Gezeiten vertraut waren. Wohlverstanden waren ihre Kenntnisse rein empirisch, aber die Erscheinung ist zu großartig und zu regelmäßig, als daß sie der Aufmerksamkeit entgehen könnte. Die Seeleute, Piloten, Fischer müssen die Stunden des Hoch- und Tiefstandes des Wassers ge-

kannt haben, da bekannterweise das Aus- und Einlaufen in viele Häfen und Buchten nur zu gewissen Gezeitenphasen möglich bzw. gefahrlos ist. Leider sind uns keine Gezeitentafeln oder etwas Ähnliches aus dem Altertum überliefert worden.

Aus dem Mittelalter ist eine Menge von Andeutungen, Hinweisen, selbst Beschreibungen der Gezeiten bekannt: die älteste bekannte Gezeitentafel an der *„London Bridge“* (Londoner Brücke) stammt aus dem XIII. Jahrhundert; an neuen selbständigen Versuchen einer rationellen Erklärung der Erscheinung fehlt es ganz. Erst die Renaissance brachte neue Gezeitentheorien. Kepler spricht schon von der Attraktion des Mondes auf das Meer. Natürlich sind seine Ansichten verworren, da er die Gesetze der Attraktion nicht kennt. Galilei macht sich über Kepler lustig: er sagt, daß Kepler mysteriöse, okkulte Kräfte einführt; er hält die Gezeiten für eine einfache Konsequenz der Erdrotation, er meint selbst, daß die Gezeiten die Erdrotation und die Richtigkeit des Kopernikanischen Systems beweisen. Die Ansichten Galileis sind denjenigen F. Bacons diametral entgegengesetzt. Bacon hielt an der Ansicht fest, daß die Erde stillstehe und die anderen Weltkörper um die Erde kreisen. Daraus folgerte er, daß auch das Meer die Erde umkreisen müsse. Da aber die Küsten die kreisende Bewegung verhindern, so verwandelt sie sich in Gezeiten.

Die Grundlage der modernen Gezeitentheorie hat erst Newton durch seine Entdeckung des Attraktionsgesetzes geschaffen. Er hat auch in seinem 1687 erschienen Werke „Principia philosophiae naturalis“ die Anwendung der Attraktionstheorie auf die Gezeiten gegeben. Aber seine Theorie ist rein statisch, sie vernachlässigt die Trägheit des Wassers.

Im Jahre 1738 schrieb die Pariser Akademie eine Preisbewerbung über das Thema der Gezeitentheorie aus. Vier Autoren wurden ausgezeichnet: Euler, Maclaurin, Daniel Bernoulli und der Jesuit Cavalleri. Die drei ersten nahmen die Attraktionstheorie als Grundlage, wobei sie aber die Annahme Newtons, daß die Trägheit des Wassers vernachlässigt werden kann, beibehielten. Auf diese Weise sind ihre Theorien sozusagen Weiterentwicklungen der statischen Theorie Newtons. Cavalleri nahm als Grundlage die Wirbeltheorie von Descartes. Er zeigt in seinem Werke eine große Erfindungsgabe und Geschicklichkeit, aber vom Standpunkte der modernen Wissenschaft aus muß man seine Theorie als verfehlt bezeichnen.

Laplace wandte sich der Gezeitentheorie 1774 zu, er war auch der erste, der diese Theorie auf ihren eigentlichen Boden stellte und die Aufgabe als eine dynamische auffaßte. Dadurch wurde ihre ganze Schwierigkeit und Verwicklung ins grelle Licht gestellt. Laplace wurde gezwungen, mehrere vereinfachende Annahmen einzuführen; er nahm z. B. an, daß der Ozean die ganze Erde bedecke und eine konstante oder nach einem einfachen Gesetze variierende Tiefe besitze. Trotz dieser Vereinfachungen hat er noch kolossale Schwierigkeiten zu überwinden gehabt. Seine Leistungen in der Gezeitentheorie sind bewunderungswürdig, er wirkte bahnbrechend, er ebnete die Wege für seine Nachfolger.

Unter den Autoren, welche sich nach Laplace mit den Gezeiten befaßt haben, sind in der ersten Hälfte des XIX. Jahrhunderts vor allem J. Lubbock und Whewell zu nennen, deren Hauptverdienst in der Analyse zahlreicher Gezeitenbeobachtungen aus verschiedenen Weltteilen besteht. Minderwertig sind dagegen die theoretischen Ansichten Whewells. Dagegen hat ein anderer englischer Gelehrter, der bekannte Astronom Airy, eine wichtige und originelle Gezeitentheorie aufgestellt. Er hat nicht nur die Trägheit des Wassers, sondern in vielen Fällen auch die Reibung berücksichtigt. — Andererseits ist seine Theorie etwas beschränkt, denn er behandelt eigentlich nicht die Gezeiten in einem offenen Meer, sondern in Kanälen. Außerdem stellt sich Airy nicht auf den hydrodynamischen, sondern auf den hydraulischen Standpunkt; ebenso wie die Hydrotechniker bei der Untersuchung der Bewegung in Flüssen und Kanälen macht er keinen Unterschied zwischen der Bewegung an der Wand und in der Mitte des Kanals usw.

In der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhunderts wurde die Gezeitentheorie am meisten durch die Untersuchungen Lord Kelvins (W. Thomsons), G. H. Darwins und H. Poincarés gefördert. Kelvin kehrte zurück zur alten statischen Theorie, sein Hauptverdienst beruht weniger auf der Vervollkommnung dieser grundsätzlich unhaltbaren Theorie, als in der Einführung der harmonischen Analyse zum Zwecke der Gezeitenvorhersage. Es muß übrigens hervorgehoben werden, daß die Anfänge dieser Methode bei Laplace zu suchen sind. Die Untersuchungen G. H. Darwins beziehen sich auf verschiedene Punkte der Gezeitentheorie, vor allem aber auf die Anwendung der harmonischen Analyse.

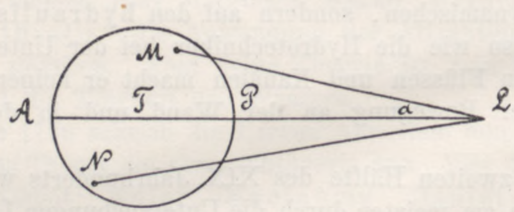
H. Poincaré hat nur wenig über Gezeiten geschrieben*), aber das wenige verrät die Kraft seines mathematischen Genies.

Beachtenswerte Ergänzungen zur Theorie von Laplace hat W. Ferrel geliefert; außerdem sind die wichtigen Untersuchungen Börgens und in der letzten Zeit diejenigen Houghs zu nennen.

§ 3. Die fluterzeugenden Kräfte.

Die Gezeiten gehören zu den erzwungenen Wellen, die Bewegung wird beständig von denselben äußeren Kräften, von denen sie erzeugt wurde, beeinflußt und modifiziert. Um die Natur der fluterzeugenden Kräfte zu verstehen, müssen wir auf die Theorie der Bewegung der Körper des Sonnensystems zurückgreifen. Bekannterweise umkreisen die Erde und der Mond ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, indem die reziproke Anziehung ihnen nicht erlaubt, sich voneinander zu entfernen. Zu unserem Zwecke ist es notwendig, die Anziehung des Mondes auf die Erde etwas zu analysieren. Ein jedes Massenelement des Mondes zieht ein jedes Massenelement der Erde an, da aber der Mond nahezu zentrobarisch und weit genug von der Erde entfernt ist, kann man ohne Schaden für die Allgemeinheit der Theorie annehmen, daß die ganze Masse des Mondes in seinem Schwerpunkte konzentriert ist und seine Anziehung als die Anziehung eines materiellen Punktes behandeln (Fig. 41).

Fig. 41.



Es seien L der Schwerpunkt des Mondes, T der der Erde, M und N zwei beliebige Punkte der Erde; es sei weiter m die Masse des Mondes, endlich die Attraktionskonstante, der Einfachheit

*) Schon während der Drucklegung dieses Buches ist der dritte Band von Poincarés „Leçons de mécanique céleste“ (Paris 1910) erschienen. Er ist der Theorie der Gezeiten gewidmet und enthält eine Fülle wichtiger Ergebnisse und Fingerzeige. Besonders das Kapitel über die Integration der Differentialgleichungen, welche sich auf die Gezeitentheorie beziehen, bildet einen wichtigen Fortschritt.

wegen, gleich Eins. Die Attraktion des Mondes auf eine im Punkte T bzw. M oder N befindliche Masseneinheit ist:

$$-\frac{m}{(LT)^2}, \quad -\frac{m}{(LM)^2}, \quad -\frac{m}{(LN)^2}.$$

Angesichts dessen, daß der Abstand LT nur ungefähr 60 irdische Äquatorialradien beträgt, sind die Unterschiede zwischen den Längen der Geraden LT, LM und LN, sowie die Winkel zwischen ihren Richtungen zwar klein aber nicht unmerklich, so daß sich die soeben angegebenen drei Kräfte sowohl der Größe wie der Richtung nach voneinander unterscheiden.

Was folgt daraus?

Wenn auf alle Punkte eines Körpers nur gleiche und gleichgerichtete Kräfte einwirken, so können sie ihn nur parallel zu sich selbst verschieben. In der Mechanik pflegt man eine solche Bewegung als eine rein fortschreitende zu bezeichnen. Sind die Kräfte entweder nicht sämtlich gleich oder nicht sämtlich gleichgerichtet, so erzeugen sie in der Regel — auf die Ausnahmen brauchen wir nicht einzugehen — eine Drehbewegung, außerdem erzeugen sie eine Deformation.

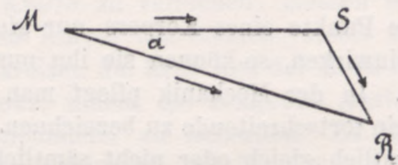
Die fortschreitende Bewegung der Erde um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systems Erde—Mond geht uns nichts an, dementsprechend dürfen wir die Kräfte, welche jene Bewegung erzeugen, ausschließen. Auch die Drehbewegung, welche durch die Mondanziehung entsteht, nämlich die sogenannte Präzession und Nutation geht uns nichts an, aber die Kräfte, welche diese Bewegung erzeugen, können nicht ausgeschlossen werden. Das sind dieselben Kräfte, welche die Gezeiten hervorrufen, nur sind Präzession und Nutation das Resultat ihrer Gesamtwirkung, während die Gezeiten von ihrer differentialen, lokalen Wirkung abhängen.

Wir werden somit gleiche und gleichgerichtete Kräfte, welche die fortschreitende Bewegung der Erde erzeugen, ausschließen. In der Theorie der fortschreitenden Bewegung wird die Erde durch ihren Schwerpunkt ersetzt; auf denselben Punkt werden auch die Deformationen bezogen. Demgemäß müssen wir diesen Punkt bevorzugen und von allen Kräften, welche auf verschiedene Punkte der Erde einwirken, eine der Mondanziehung auf den Erdschwerpunkt T gleiche und parallele Kraft abziehen. Der Kürze wegen werden wir diese Kraft mit F bezeichnen. Was nach Abzug der

Kraft F übrig bleibt, ist die deformierende, fluterzeugende Kraft. Nehmen wir z. B. den Punkt M an. Aus der vorhergehenden Zeichnung (Fig. 41) ist ersichtlich, daß $LM < LT$, folglich ist die Mondkraft in M größer als die Mondkraft in T, d. h. größer als F. Außerdem sieht man, daß die Mondkräfte in M und T verschiedene Richtungen haben. Folglich bildet auch die Mondkraft in M einen Winkel mit der Kraft F und die Subtraktion muß nach den Regeln des Kräfteparallelogramms ausgeführt werden.

In nachstehender Zeichnung (Fig. 42) repräsentiert MR nach Größe und Richtung die Mondkraft in M; dieselbe kann in zwei

Fig. 42.



Kräfte MS und SR zerlegt werden. Die Kraft MS nimmt man absichtlich gleich und parallel der Kraft F an; wenn jetzt die Kraft F in M subtrahiert wird, so hebt sie sich gegen die Kraft MS auf und es bleibt nur die deformierende, fluterzeugende Kraft SR übrig.

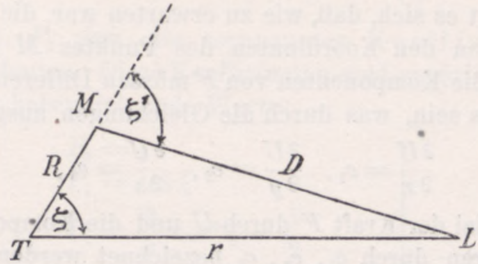
Analytisch läßt sich die Subtraktion so ausführen, daß sowohl die Mondkraft als auch die Kraft F in rechtwinklige Komponenten zerlegt und von den Komponenten der Mondkraft die Komponenten der Kraft F algebraisch abgezogen werden. Dabei bietet sich eine wichtige Vereinfachung: sowohl die Mondkraft als auch die Kraft F haben ein Potential. Anstatt die Kräftekomponenten für alle drei Richtungen zu berechnen und drei Subtraktionen auszuführen, ist es weit bequemer, das Potential der Kraft F vom Potential der Mondkraft abzuziehen und erst nachträglich die Kräfteausdrücke zu formieren.

§ 4. Potential und Komponenten der fluterzeugenden Kraft.

Wir bezeichnen mit D den Abstand des angezogenen Punktes M vom Mondschwerpunkte L, mit R seinen Abstand vom Erdschwerpunkte T, durch r den Abstand zwischen den Schwerpunkten T und L der Erde und des Mondes, endlich mit ζ den Winkel

MTL (Fig. 43). Dieser Winkel*) heißt **geozentrische Zenitdistanz** des Mondes in M, während der Winkel ζ' bei M **scheinbare Zenitdistanz** des Mondes in M genannt wird.

Fig. 43.



Das Potential der Mondanziehung in M hat bekannterweise den Ausdruck:

$$\frac{m}{D}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

und es erübrigt nur noch das Potential der Kraft F zu finden. Es kann nicht den Ausdruck $\frac{m}{r}$ haben, da dieses Potential nur für den Punkt T gilt, während F denselben Wert im ganzen, von der Erde eingenommenen Raum behalten soll. Nehmen wir nun aber die Werte der Kraft F und ihrer Komponenten. Der Wert von F ist:

$$-\frac{m}{r^2}$$

und die Werte der Komponenten von F sind:

$$-\frac{m}{r^2}\cos\alpha, \quad -\frac{m}{r^2}\cos\beta, \quad -\frac{m}{r^2}\cos\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

wo $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus der Geraden LT, welche vom Mondschwerpunkt nach dem Erdschwerpunkt geht, bedeuten. Es seien nun:

x_0, y_0, z_0 die rechtwinkligen Koordinaten von T,
x_1, y_1, z_1 „ „ „ „ L,
x, y, z „ „ „ „ M.

Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ R^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ r^2 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \end{aligned}\right\} ; \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

*) Von hier ab werden wir die Erde als Kugel betrachten. Die kleinen Fehler, die infolge dieser Annahme entstehen, sind belanglos.

ferner ist

$$\cos\alpha = \frac{x_0 - x_1}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y_0 - y_1}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z_0 - z_1}{r}. \quad . \quad 4$$

Nach Einsetzen der Werte aus den Formeln 3 und 4 in die Formeln 2 zeigt es sich, daß, wie zu erwarten war, die Komponenten der Kraft F von den Koordinaten des Punktes M gar nicht abhängen. Aber die Komponenten von F müssen Differentialquotienten eines Potentials sein, was durch die Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = c_2, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = c_3,$$

wo das Potential der Kraft F durch U und die Komponenten von F der Kürze wegen durch c_1, c_2, c_3 bezeichnet werden. Es ist nun klar, daß

$$U = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4.$$

Jetzt setzt man statt c_1, c_2, c_3 die Werte der Komponenten von F aus den Gleichungen 2 mit Berücksichtigung der Gleichungen 4 ein, weiter setzt man, da die Konstante c_4 willkürlich ist:

$$c_4 = \frac{m}{r^3}\Big[(x_0 - x_1)\, x_0 + (y_0 - y_1)\, y_0 + (z_0 - z_1)\, z_0\Big] + C,$$

wo C wieder eine, vorderhand noch unbestimmte, Konstante bedeutet; endlich schreibt man überall $(x_1 - x_0)$ usw. statt $-(x_0 - x_1)$ und erhält:

$$U = \frac{m}{r^3}\Big[(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0)\Big] + C.$$

Es ist aber aus der analytischen Geometrie bekannt, daß

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = Rr\cos\zeta;$$

folglich kann man das Potential der Kraft F in der Form schreiben:

$$U = \frac{m}{r^2} R\cos\zeta + C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

Jetzt braucht man nur 5 von 1 abzuziehen, um das fluterzeugende Potential, sagen wir V', zu erhalten:

$$V' = \frac{m}{D} - \frac{m}{r^2} R\cos\zeta - C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Nun kann aber D^{-1}, wobei:

$$D = \sqrt{r^2 - 2Rr\cos\zeta + R^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{R}{r}\cos\zeta + \left(\frac{R}{r}\right)^2},$$

in eine rasch konvergierende Reihe nach Potenzen von $\frac{R}{r}$ ent-

wickelt werden, da r ungefähr 60 mal so groß ist als R. Diese Entwicklung ist wohlbekannt, sie schreibt sich:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r}\left[P_0 + P_1\left(\frac{R}{r}\right) + P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_3\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \ldots\right], \quad . \quad . \quad 7$$

wo P_0, P_1, P_2, P_3 usw. die sogenannten Koeffizienten von Legendre bedeuten. Diese Koeffizienten sind natürlich Funktionen von $\cos\zeta$ und haben folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = 1 \\ P_1 = \cos\zeta \\ P_2 = \frac{3}{2}\cos^2\zeta - \frac{1}{2} \\ P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\zeta - \frac{3}{2}\cos\zeta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

Jetzt setzen wir D^{-1} aus 7 unter Berücksichtigung der Formeln 8 in 6 ein und sehen sofort, daß die Glieder, welche r^2 im Nenner enthalten, sich aufheben. Dann setzen wir noch:

$$\frac{m}{r} - C = 0,$$

was erlaubt ist, da weder r noch C die Koordinaten von M enthalten und C bisher ganz unbestimmt geblieben ist. Endlich benutzen wir den Umstand, daß wegen des kleinen Wertes*) von $\frac{R}{r}$ der Ausdruck für V' sehr schnell konvergiert, beschränken uns auf das erste Glied der Reihenentwicklung und schreiben endgültig:

$$V' = km\frac{R^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\zeta - \frac{1}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

Wir haben hier die Attraktionskonstante k, die zeitweise der Einheit gleichgesetzt wurde, wieder eingeführt, um volle Freiheit in der Wahl der Zeit-, Längen- und Masseneinheiten zu haben.

Aus der Formel 9 können wir sofort die Kraftkomponenten berechnen. Es wird bequem sein, ein System von Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkt in T, mit LT als Polarachse und dem Winkel ζ als Polarwinkel zu nehmen. Dabei werden wir im folgenden

---

*) Dazu bleiben die Werte sämtlicher P-Funktionen immer innerhalb der Grenzen -1 und $+1$.

unter R den Radius der Erdkugel verstehen, da für unsere Zwecke zunächst nur die Werte der Kraftkomponenten in der Erdoberfläche nötig sind.

Die vertikale Komponente der fluterzeugenden Kraft in der Richtung von unten nach oben ist:

$$\frac{\partial V'}{\partial R} = 2\,km\,\frac{R}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\zeta - \frac{1}{2}\right), \quad \ldots\ldots \quad 10$$

die horizontale Komponente in der Richtung der wachsenden ζ-Winkel ist:

$$\frac{1}{R}\,\frac{\partial V'}{\partial \zeta} = -\frac{3}{2}\,km\,\frac{R}{r^3}\sin 2\zeta; \quad \ldots\ldots \quad 11$$

endlich ist die dritte rechtwinklige Komponente gleich Null. Mit anderen Worten: die Formel 11 gibt die totale Horizontalkraft.

Schon daraus, daß die fluterzeugenden Kräfte umgekehrt proportional zur dritten Potenz der Entfernung Mond—Erde bzw. Sonne—Erde variieren, folgt, daß diese Kräfte im Vergleich zur Schwerkraft sehr klein sein müssen. Eine kurze Rechnung wird uns noch besser hiervon überzeugen. Den größten absoluten Wert, nämlich

$$2\,km\,\frac{R}{r^3},$$

erreicht die Vertikalkraft in denjenigen beiden Punkten, die augenblicklich den Mond im Zenit ($\zeta = 0$) oder im Nadir ($\zeta = \pi$) haben. Den größten absoluten Wert, nämlich

$$\frac{3}{2}\,km\,\frac{R}{r^3}$$

erreicht die Horizontalkraft auf denjenigen beiden Kreisen, wo augenblicklich $\zeta = \frac{1}{4}\pi$ und $\zeta = \frac{3}{4}\pi$.

Statt der Schwerkraft nehmen wir der Einfachheit wegen die Attraktion der Erde, die bekannterweise nur unter dem Äquator um $\frac{1}{288}$ ihres Wertes und auf der übrigen Erdoberfläche noch weniger von der Schwerkraft abweicht. Der mittlere Wert der Attraktion in der Erdoberfläche, den wir mit a bezeichnen wollen, hat den Näherungswert:

$$a = k\,\frac{M}{R^2},$$

wo M die Masse der Erde bezeichnet. Daraus folgen für die Verhältnisse der vertikalen und der horizontalen Komponente der fluterzeugenden Kraft zur Attraktion in der Erdoberfläche die Werte:

$$2\frac{m}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \text{ und } \frac{3}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^3.$$

Da die Mondmasse ungefähr 80 mal*) so klein als die Erdmasse und die mittlere Entfernung Erde—Mond ungefähr 60 mal**) so groß ist als der äquatoriale Erdradius, hat das erste Verhältnis ungefähr den Wert $\frac{1}{8\,640\,000}$ und das zweite ungefähr***) den Wert $\frac{1}{11\,520\,000}$. Die erste Kraft wirkt in derselben Richtung wie die Schwerkraft, und ihr ganzer Effekt reduziert sich darauf, die Schwerkraft bald etwas zu vermindern, bald etwas zu vergrößern; die zweite wirkt aber in einer Richtung, in welcher keine Kraft vorhanden ist, deswegen kann sie einen namhaften Effekt erzeugen.

Selbst die vertikale Bewegung des Wassers, das Steigen des Meeresspiegels während der Flut und das Fallen während der Ebbe, sind auf indirekte Wirkung der Horizontalkraft zu beziehen. Übrigens ist die Horizontalbewegung, besonders in seichten Küstengewässern, bedeutend größer als die Vertikalbewegung.

Die Formel 11 zeigt, daß die Horizontalkräfte in bezug auf eine durch das Zentrum der Kugel senkrecht zur Geraden TL gelegte Ebene symmetrisch sind. Ferner liegt überall die Horizontalkraft in der Ebene, welche durch den betreffenden Punkt der Erdoberfläche und die Gerade TL geht (Fig. 44). Endlich richtet sich die Horizontalkraft auf der dem Monde zugewendeten Halbkugel immer nach einem Punkte derjenigen Hemisphäre der Himmelskugel, in deren Mitte sich der Mond befindet. Auf der anderen Erdhalbkugel sind die Verhältnisse entgegengesetzt; dort richtet sich die Kraft nach einem Punkte derjenigen Himmelshemisphäre,

---

*) Nach D. Gill verhält sich die Mondmasse zur Erdmasse wie 1 : 81,70, nach der späteren Berechnung von S. Newcomb wie 1 : 81,45, nach der neuesten Berechnung von A. R. Hinks aus den Erosbeobachtungen wie 1 : 81,53 ± 0,047.

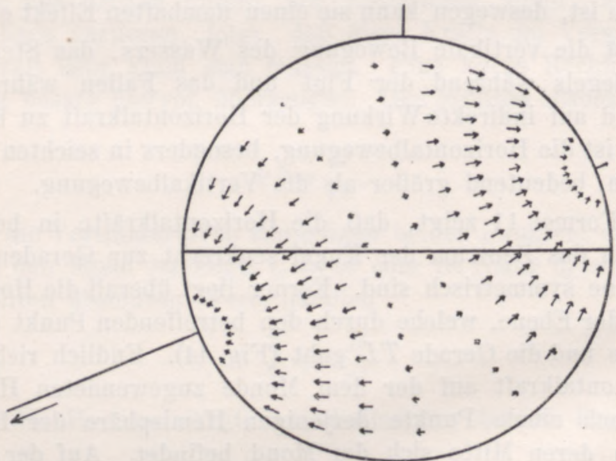
**) Genauer 60,27.

***) Es ist nicht zu vergessen, daß diese Zahlen nur für die Maxima der betreffenden Kräfte gelten.

in deren Mitte sich der Gegenpunkt des Mondes befindet. — Die Horizontalkraft verschwindet in den beiden Punkten, welche den Mond im Zenit ($\zeta = 0$) bzw. im Nadir ($\zeta = \pi$) haben, ferner auf dem Großkreise, wo $\zeta = \frac{\pi}{2}$; sie erreicht ihr Maximum auf denjenigen kleinen Kreisen, wo augenblicklich $\zeta = \frac{1}{4}\pi$ und $\zeta = \frac{3}{4}\pi$ ist. Das ganze Kräftesystem folgt dem Monde und verschiebt sich beständig in der Erdoberfläche.

Die Formeln 9 für das Potential und 10 und 11 für die Kraftkomponenten gelten natürlich auch für die Sonne, nur muß man die Masse des Mondes durch die Masse der Sonne und den Abstand Erde—Mond durch den Abstand Erde—Sonne ersetzen. Da

Fig. 44.



die Sonnenmasse 327 214 mal so groß und die mittlere Entfernung der Sonne 23 439,2 mal so groß ist als der äquatoriale Erdradius, beträgt die vertikale fluterzeugende Kraft der Sonne nur etwa $\frac{1}{19\,700\,000}$ und die horizontale nur etwa $\frac{1}{26\,240\,000}$ der Schwerkraft. Somit sind die fluterzeugenden Sonnenkräfte im Verhältnis 1 : 2,2 kleiner als die Mondkräfte. Das ist die Ursache, warum die Gezeiten hauptsächlich von den Phasen des Mondes und erst

in zweiter Linie von der Stellung der Sonne abhängen. Doch lokal und augenblicklich kann die Sonnenkraft größer sein als die Mondkraft. So ist z. B. in dem Punkte, der augenblicklich den Mond im Zenit hat, die Horizontalkraft des Mondes Null und diejenige der Sonne eine kleine, aber endliche Größe. Auch in der Gesamtwirkung treten die Sonnengezeiten nicht ganz hinter den Mondgezeiten zurück; sie sind im Gegenteil mit jenen vergleichbar. Die wichtigsten Ungleichheiten erklären sich nämlich durch die Interferenz der Sonnengezeiten mit den Mondgezeiten: Die großen Syzygialgezeiten durch die Summation, die kleinen Quadraturengezeiten durch die Subtraktion der beiden Wirkungen.

Das System der fluterzeugenden Sonnenkräfte folgt der Sonne und verschiebt sich auf der Erdoberfläche. Es umkreist die Erde in 24 Stunden (im Mittel), während das System der Mondkräfte zu einem Kreislauf um die Erde im Mittel 24 Stunden 50 Min. 28,3 Sek. braucht. Die Symmetrieachsen dieser Kraftsysteme bilden variable Winkel mit dem Äquator. Diese Winkel sind nichts anderes als die Deklination der Sonne bzw. des Mondes. Die Deklination der Sonne variiert gegenwärtig zwischen $23^0\,27'$ während des Sommersolstitiums und $-23^0\,27'$ während des Wintersolstitiums. Die Deklination des Mondes erreicht je ein Maximum und je ein Minimum im Zeitraum von ungefähr $27^1/_3$ Tagen. Die Grenzen, zwischen denen die Maxima und die Minima liegen, ändern sich mit der Zeit: sie können sich bis zu $28^3/_4{}^0$ erweitern und bis $18^1/_4{}^0$ zusammenziehen. Die Entfernung Erde — Sonne variiert in ziemlich engen Grenzen: bei dem gegenwärtigen Wert der Exzentrizität erreicht sie ihr Minimum im Perihelium mit 23046 äquatorialen Erdradien und das Maximum im Aphelium mit 23832 äquatorialen Erdradien. Die Entfernung Erde — Mond ist ebenfalls variabel; sie ist am größten im Apogäum, am kleinsten im Perigäum. Das mittlere Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch das Perigäum heißt anomalistischer Monat und umfaßt 27 Tage 13 Stunden 18 Min. und 33 Sek. Weder die Entfernung im Perigäum, noch die Entfernung im Apogäum bleiben konstant; beide variieren von einem Umlauf zum anderen. Auf Grund der beobachteten Mondparallaxen kann man behaupten, daß die äußersten Grenzen, innerhalb derer die Monddistanz gegenwärtig variiert, 55,85 und 65,07 irdische Äquatorialradien betragen. Das Verhältnis der Grenzwerte ist 1,165. Da aber die Entfernung Erde — Mond im Nenner in der dritten Potenz auftritt, haben ihre

Variationen einen bedeutenden Einfluß auf die Größe der fluterzeugenden Mondkraft.

Von anderen Perturbationen in der Bewegung des Mondes sprechen wir nicht, aber schon aus denjenigen, die aufgezählt wurden, ersieht man, daß die Variationen der fluterzeugenden Kraft des Mondes sehr mannigfaltig sind. Dazu gesellt sich noch die Inkommensurabilität einzelner Mondperioden untereinander und mit den Perioden der Sonnenbewegung, so daß schließlich identische Kombinationen nie wiederkehren; es kommen nur mehr oder weniger ähnliche Kombinationen vor. Je nach der Genauigkeit, die angestrebt wird, kann man bestimmte, untereinander ähnliche Kombinationen als gleich oder als verschieden auffassen.

§ 5. Die statische Theorie der Gezeiten.

Wir werden uns mit der statischen Gezeitentheorie nicht lange befassen. Zwar ist bei langperiodischen Gezeiten überall und bei kurzperiodischen in einiger Entfernung von den Küsten die Bewegung so langsam, daß die Vernachlässigung der Trägheit des Wassers als zulässig erscheint, doch hält die statische Theorie den Vergleich mit den Beobachtungen nicht aus; auf jedem Schritt begegnet man Tatsachen, deren sie nicht gerecht werden kann. Wenn sie sich von der Zeit Newtons bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts behaupten konnte, so hatte das seinen Grund erstens darin, daß die statische Theorie unvergleichlich leichter ist als die dynamische, zweitens darin, daß zufälligerweise an der europäischen atlantischen Küste die wahren Gezeiten den Gezeiten der statischen Theorie in gewisser Hinsicht ähnlich sehen. Man beobachtet nämlich ähnliche Ungleichheiten (vergl. § 1) wie in der statischen Theorie, was zur Folge hat, daß der Gegensatz zwischen Theorie und Erfahrung nicht sofort in die Augen springt. Erst beim Vergleich der Phasen und Amplituden werden die Gegensätze auffallend.

Wir werden von der statischen Theorie nur so viel sagen, wie nötig ist, um ihre Grundlagen klarzustellen. Von der Attraktion der Sonne sehen wir vorläufig ab, so daß nur die Schwerkraft und die Mondattraktion in Rechnung zu ziehen sind.

Die Grundannahme der statischen Theorie der Gezeiten besteht darin, daß die Trägheit des Wassers vernachlässigt werden kann,

was nichts anderes bedeutet, als daß die physische Oberfläche des Meeres eine Gleichgewichtsfläche bleibt. Bezeichnet man — wie in den ersten Kapiteln — das Potential der Schwerkraft mit W und das Potential der fluterzeugenden Kraft mit V', so drückt sich die obige Grundannahme durch die Gleichung aus:

$$W + V' = C, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12$$

wo C eine Konstante bedeutet. — In Abwesenheit des Mondes wäre die Meeresoberfläche natürlich ebenfalls eine Gleichgewichtsfläche und ihre Gleichung wäre

$$W = W_0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13$$

wo W_0 ebenfalls eine Konstante bedeutet.

Bekannterweise unterscheidet sich die Meeresoberfläche während der Gezeiten nur wenig vom mittleren Wasserstande, welcher durch Gleichung 13 gegeben wird. Dementsprechend unterscheidet sich das Potential W in Gleichung 12 auch nur wenig vom Potential W in Gleichung 13. Die Differenz besteht aus zwei Teilen: der erste Teil rührt daher, daß die Fläche 12 bald oberhalb, bald unterhalb der Fläche 13 verläuft, der zweite daher, daß W in Gleichung 12 noch gewisse, im anderen W aus Gleichung 13 nicht vorhandene, Glieder enthält, welche das Attraktionspotential der positiven und negativen Abweichungen des Meeres von seiner mittleren Gestalt darstellen. Diesen zweiten, im Verhältnis zum ersten weniger wichtigen Teil wollen wir vernachlässigen, wodurch die Differenz zwischen den beiden Potentialen sich auf eine Funktion der lokalen Höhe h der wahren über der mittleren Meeresoberfläche reduziert. Wir können somit, da andererseits die Funktion sicher stetig ist, schreiben:

$$W = W_0 + h \frac{\partial W}{\partial n} + \ldots,$$

wo ∂n das Element der äußeren Normale zur Fläche 13 bedeutet. Es ist klar, daß die kleinen Glieder höherer Ordnung nicht nur vernachlässigt werden dürfen, sondern auch müssen. Es wäre nicht rationell, diese kleinen Glieder mitzunehmen, nachdem eine bedeutendere Größe — nämlich das Potential der Gezeitenwellenkämme und -Täler — vernachlässigt worden ist. Da andererseits: $\frac{\partial W}{\partial n} = -g$, wo g — wie gewöhnlich — die Schwerkraft bedeutet, so können wir die Formel 12 auf die Gestalt bringen:

$$W_0 - gh + V' = C. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14$$

Angesichts dessen, daß es sich nur um einen Grundriß der Theorie handelt, können wir noch der Einfachheit wegen zwei Annahmen machen: erstens daß die ganze Erde vom Ozean bedeckt — zweitens, daß die Schwerkraft g in der ganzen Meeresoberfläche konstant ist. Jetzt multiplizieren wir die ganze Gleichung 14 mit dem Oberflächenelement $d\sigma$ und integrieren über die ganze Oberfläche. Das gibt, wenn der Inhalt der Oberfläche mit A bezeichnet wird:

$$(C - W_0)\,A = \int V'\,d\sigma - g\int h\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

Beide Integrale rechts sind gleich Null. Das erste verschwindet, weil nach einer allgemeinen Eigenschaft der Kugelfunktionen

$$\int P_n\,d\sigma = 0,$$

sobald die Integration auf die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt wird. Das zweite Integral verschwindet, weil das Volum der Erhebungen über das mittlere Wasserniveau dem Volum der Vertiefungen unter das mittlere Wasserniveau gleich sein muß. Die Gleichung 15 ergibt somit:

$$C = W_0,$$

und infolgedessen liefert Gleichung 14 sofort:

$$h = \frac{V'}{g} = k\,\frac{m}{g}\,\frac{R^2}{r^3}\,P_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

Unter denselben Vereinfachungen wie im vorigen Kapitel können wir die Attraktion a statt g einführen und die letzte Gleichung in der Gestalt schreiben:

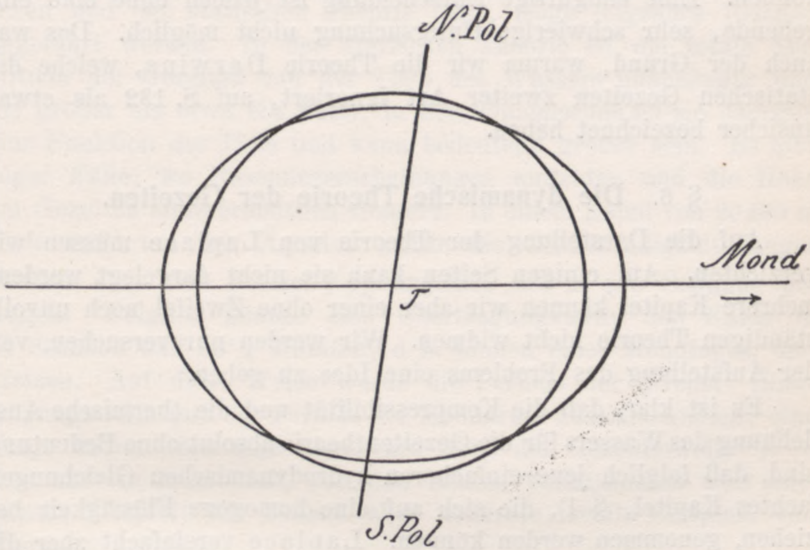
$$h = \frac{m}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^3 R\left(\frac{3}{2}\cos^2\zeta - \frac{1}{2}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

In der folgenden Zeichnung (Fig. 45) soll der Kreis den Schnitt der nichtdeformierten, die Ellipse den Schnitt der deformierten Meeresoberfläche darstellen. Der Schnitt ist durch die Rotationsachse der Erde und durch die Verbindungslinie von Erd- und Mondmittelpunkt gelegt.

Der Zahlenwert des Faktors $\frac{m}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^3$ beläuft sich auf ungefähr $\frac{1}{17\,280\,000}$, R mißt zirka 6 370 000 m, was in Formel 17 eingesetzt sofort zeigt, daß die größte Höhe der statischen Flut in den Punkten, wo $\zeta = 0$ oder $\zeta = \pi$ ist, kaum 37 cm erreicht. Die

größte Tiefe der statischen Ebbe entspricht $\zeta = \frac{1}{2}\pi$ und beläuft sich auf nur wenig über 18 cm. Somit berechnet sich die ganze Amplitude (Doppelamplitude) auf ungefähr 55 cm. Selbst dann, wenn der Mond sich im Perigäum befindet und wenn die Sonnenflut die Mondflut verstärkt, kann die totale Amplitude nicht einmal einen Meter erreichen.

Fig. 45.



Die Gleichung 17 zeigt weiter, daß die Grenze zwischen dem Gebiete der Flut und dem Gebiete der Ebbe dort verläuft, wo augenblicklich

$$3 \cos^2 \zeta = 1,$$

d. h. auf den kleinen Kreisen, auf welchen die Zenitdistanz des Mondes 54° 43′ und 125° 17′ beträgt.

Nach der statischen Theorie folgt das Flutellipsoid dem Monde in solcher Weise, daß die beiden Scheitel immer auf der Zentralen LT liegen. Dazu muß man sich noch das Sonnenflutellipsoid denken, das in gleicher Weise der Sonne wie das Mondellipsoid dem Monde folgt. Die Höhe der resultierenden Flut ist eine algebraische Summe der Mond- und Sonnenfluten.

Auf die Berechnung der Attraktion der Gezeitenwelle, auf den Einfluß der Festländer und andere verwandte Fragen werden wir

nicht eingehen, wir wollen aber hervorheben, daß nach den Untersuchungen von S. Hough statische Gezeiten nicht so wie Newton und Laplace sich gedacht haben, sondern etwas anders aussehen müssen. Diese statischen Gezeiten zweiter Art sind mit gewissen äußerst langsamen Strömungen (Größenordnung der Geschwindigkeit ein paar Millimeter pro Sek.*) verknüpft. Ob den Gezeiten Houghs etwas Reelles entspricht, ist zweifelhaft, um so mehr, als sie eigentlich in einer reibenden Flüssigkeit nicht entstehen können. Eine endgültige Entscheidung ist jedoch ohne eine eingehende, sehr schwierige Untersuchung nicht möglich. Das war auch der Grund, warum wir die Theorie Darwins, welche die statischen Gezeiten zweiter Art ignoriert, auf S. 132 als etwas unsicher bezeichnet haben.

§ 6. Die dynamische Theorie der Gezeiten.

Auf die Darstellung der Theorie von Laplace müssen wir verzichten. Auf einigen Seiten kann sie nicht dargelegt werden; mehrere Kapitel können wir aber einer ohne Zweifel noch unvollständigen Theorie nicht widmen. Wir werden nur versuchen, von der Aufstellung des Problems eine Idee zu geben.

Es ist klar, daß die Kompressibilität und die thermische Ausdehnung des Wassers für die Gezeitentheorie absolut ohne Bedeutung sind, daß folglich jene einfacheren hydrodynamischen Gleichungen (achtes Kapitel, § 1), die sich auf eine homogene Flüssigkeit beziehen, genommen werden können. Laplace vereinfacht aber die Aufgabe noch weiter: er benutzt den Umstand, daß die Tiefe des Ozeans im Verhältnis zu seinen übrigen Dimensionen sehr klein ist, und vernachlässigt die dritte Bewegungsgleichung, welche sich auf die vertikale Richtung bezieht. Außerdem vernachlässigt er überall Quadrate und andere Produkte kleiner Größen. Auch die Reibung läßt er ganz außer acht, indem ihr Einfluß auf die Bewegung im offenen Meere von ganz untergeordneter Bedeutung ist. Nur im seichten Küstenwasser, insbesondere wenn Wirbel auftreten, kann die Reibung einen merklichen Einfluß auf die Bewegung haben. Selbstverständlich gebraucht Laplace sphärische Polarkoordinaten und bezieht die Bewegung auf rotierende Achsen; in richtiger Weise hat er die hervorragende Bedeutung der Erdrotation gewürdigt. Zuletzt nimmt Laplace noch an, daß das Meer die ganze Erde

---

*) Poincaré, a. a. O., S. 187.

bedeckt und daß die Tiefe von der geographischen Länge nicht abhängt. Trotz aller dieser Vereinfachungen haben Laplace und desgleichen diejenigen, die in seine Fußtapfen getreten sind, keine allgemeinen Integrale, sondern nur gewisse partikuläre Lösungen finden können. Erst neuerdings hat Poincaré gezeigt*), daß die Anwendung der Fredholmschen Methode wahrscheinlich zum Ziel führen würde.

Um die große Kluft zu zeigen, welche zwischen der dynamischen und der statischen Theorie liegt, möge folgendes Beispiel angeführt werden. In der statischen Theorie ist die totale Amplitude der Gezeiten von der Tiefe des Wassers unabhängig und nie größer als etwa ein Meter, in der dynamischen ist sie dagegen eine Funktion der Tiefe und kann bedeutend größer sein. Es gibt sogar Fälle, wo Resonanzerscheinungen auftreten und die Höhe der Gezeiten außerordentlich steigern. In einem Kanal von 20490 m Tiefe rund um den Äquator würde die Geschwindigkeit langer Wellen nach der Formel $\sqrt{gp}$ ungefähr 480 m pro Sekunde betragen. Folglich könnte eine Übertragungswelle den Kanal in 24 Stunden und $50^1/_2$ Minuten, d. h. binnen eines Mondtages, umkreisen. Auf diese Weise würde die Periode der „freien" Übertragungswelle mit der Periode der Mondkraft zusammenfallen; eine Folge davon wäre eine ungeheure Höhe der Gezeitenwelle**). — Das war ein abstraktes, von den reellen Verhältnissen weit entferntes Beispiel; wir können aber konkrete, reelle Beispiele von Resonanz anführen.

R. Honda und seine Mitarbeiter***) haben gezeigt, daß die großen Gezeiten in der Fundy-Bai, im Busen von Bengalen, in der Madurastraße, in Port Adelaide (Australien), Port Philip (Australien) wahrscheinlich auf einer näherungsweisen Koinzidenz einer der Gezeitenperioden mit einer der Perioden „freier" Schwingungen des betreffenden Meeresteiles beruhen. Für die Fundy-Bai berechnen sie die Periode der Fundamentalschwingung zu 11,6 bis 13 Stunden; hier tritt wahrscheinlich eine Koinzidenz mit der Periode der halbtägigen Mondwelle ein. Für den Busen von

---

*) Poincaré, Leçons de mécanique céleste, Bd. III, Kap. X. Paris 1910.

**) Diese Welle hätte natürlich zwei Kämme in zwei um 180° voneinander abstehenden Punkten. Wir sprechen von einer sehr großen Höhe mit Rücksicht auf die Reibung; ohne Reibung würde die Höhe unendlich sein.

***) R. Honda, Secondary Undulations . . . usw. S. 106 ff.

Bengalen ergab sich die Periode der Fundamentalschwingung zu ungefähr 12 Stunden, was auf eine Koinzidenz mit der Periode der halbtägigen Sonnenwelle hinweist.

W. Ferrel meinte, daß die großen halbtägigen Gezeiten (wir meinen den halben Mondtag) des Nordatlantischen Ozeans auf stehenden Wellen beruhen. Diese Idee wurde von Rollin A. Harris*) auf die Gezeiten aller Meere und Ozeane ausgedehnt. Er teilt die Ozeane in einzelne Gebiete ein, unter denen einige eine halbtägige, andere eine ganztägige Fundamentalschwingungsperiode haben sollen; außerdem unterscheidet er Gebiete, wo sich keine stehende Schwingung bildet, sondern nur fortschreitende Wellen herrschen; auch Kombinationen stehender und progressiver Wellen werden zugelassen. Der Vergleich mit den Hafenzeiten an den Küsten und auf Inseln zeigt eine nicht üble Übereinstimmung zwischen der Theorie Harris' und den Tatsachen.

Obwohl wir, wie aus dem Obengesagten klar erhellt, die Bedeutung der Eigenschwingungen keineswegs unterschätzen, so können wir doch die Theorie Harris' nicht als felsenfest ansehen. Der etwas mangelhaften mathematischen Begründung wollen wir nicht mit schuld geben, da uns die großen Schwierigkeiten der mathematischen Gezeitentheorie wohlbekannt sind; wir glauben aber, daß die Einteilung der Ozeane in einzelne schwingende Gebiete nicht ohne gewisse Willkür ausgeführt werden kann. Die Verführung, die Grenze über einem unterseeischen Rücken hin und her zu schieben, bis es stimmt, ist groß; wie kann man aber verifizieren, daß man das Richtige getroffen hat? Das ganze Verfahren erinnert zu sehr an jene Formeln, die sehr viele unbestimmte Koeffizienten enthalten und die sich den Beobachtungen immer anpassen lassen.

Übrigens können auf der rotierenden Erde keine stehenden Schwingungen im strengen Sinne des Wortes entstehen. In Seen, wo die Perioden der Schwingungen meist kurz und die Dimensionen des schwingenden Körpers nicht so groß sind, kann die zusammengesetzte Beschleunigung infolge der Erdrotation (vergl. elftes Kapitel, § 4) vernachlässigt werden, was wir auch im neunten Kapitel getan haben. In großen Ozeanen aber ist ihr Einfluß von hervorragender Bedeutung. Dank der Erdrotation können die Phasen

---

*) Rollin A. Harris, Manual of Tides. Teil IV, A. Report of the Coast and Geod. Survey for 1900.

der Schwingungen einzelner Teilchen nicht identisch sein, sie müssen unbedingt von Ort zu Ort variieren; mit anderen Worten, die Schwingung wird zu einer fortschreitenden Welle. — Warum auf der rotierenden Erde stehende Wellen im strengen Sinne nicht entstehen können, werden wir sofort aus der folgenden Überlegung ersehen. Aus dem neunten Kapitel, § 3 wissen wir, daß jede stehende eindimensionale Welle*) aus zwei gleichen, in gerade entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Wellen zusammengesetzt werden kann. Denken wir uns nun zwei gleiche fortschreitende Wellen, die einander entgegenlaufen; auf der nördlichen Halbkugel müssen beide rechts ausweichen. Schon dadurch wird die Interferenz verhindert, daß die Welle, die, sagen wir, aus höheren Breiten kommt, stärker abgelenkt wird als diejenige, die aus niedrigeren Breiten kommt. Folglich sind die Fortpflanzungsrichtungen der abgelenkten Wellen nicht mehr parallel, und die Wellenkämme treffen sich unter spitzen Winkeln. Noch mehr aber wird die Interferenz durch die Asymmetrie der Wellenkämme verhindert: die rechten Seiten der Wellenkämme werden gegen die Küsten gedrängt und gestaut, die linken erniedrigt. Beim Zusammentreffen kommt ein niedriger Kamm auf ein tiefes Tal und umgekehrt, eine vollkommene Interferenz ist unmöglich, fortschreitende Wellen bleiben übrig.

Wir werden diesen Paragraphen mit einem Theorem von Poincaré**) über die Fortpflanzungsart der Gezeitenwelle schließen. Das Theorem lautet: „Fortschreitende Wellen pflanzen sich immer fort von Orten, wo die Gezeitenphase verspätet ist, nach Orten, wo sie voran ist.“ Dieses Theorem läßt sich kurz folgendermaßen begründen. Wo die Gezeitenphase verspätet ist, dort beschleunigt die Mondattraktion die Gezeitenwelle, wo sie voran ist, dort wirkt die Attraktion hemmend. Im ersten Gebiet ist die Arbeit der Attraktion immer positiv, im zweiten immer negativ; aber sowohl im ersten als im zweiten Gebiet muß die Arbeit der Attraktion im Mittel Null bleiben, da die ganze Bewegung um eine Mittellage periodisch schwingt. Folglich muß die Energie vom ersten zum zweiten Gebiet geführt werden und die Welle muß vom ersten zum zweiten Gebiet wandern.

---

*) D. h. Welle, welche in einem System paralleler, vertikaler Ebenen denselben Querschnitt usw. hat, so daß die Bewegung als Funktion einer Koordinate ausgedrückt werden kann.

**) Poincaré, a. a. O., S. 230.

§ 7. Harmonische Analyse und Voraussage der Gezeiten.

Es ist klar, daß nicht bloß die statische, sondern auch die dynamische Theorie als Grundlage einer Voraussage der Gezeiten sich nicht eignet. Indes kommen Flut und Ebbe täglich wieder, und es besteht die praktische Notwendigkeit, die Gezeiten nicht bloß für den nächsten Tag, sondern Monate lang vorherzusagen. Versetzen wir uns für einen Augenblick in die Lage eines Schiffskapitäns, der nach einer längeren Reise in einen für größere Schiffe nur während der Flut zugänglichen Hafen, z. B. in den aus dem russisch-japanischen Kriege bekannten Port Arthur einlaufen soll. Es ist klar, daß die Kenntnis der Stunde und der Höhe der Flut für unseren Kapitän höchst nützlich sein wird. Seinem Bedürfnis wird am besten entsprochen, wenn beide Größen in seinem Segelhandbuch zu finden sind. Desgleichen kann man andere Fälle nennen, in denen die vorherige Kenntnis der Gezeiten großen Nutzen bringt.

Aus Rücksicht auf diese praktischen Zwecke hat man schon im Mittelalter Gezeitentafeln zusammengestellt. Die Londoner Tafel aus dem 13. Jahrhundert haben wir schon in § 2 erwähnt. Die erste Tafel Flamsteeds für 1683 wurde 1682 publiziert. Sie enthielt die Gezeiten an der Londoner Brücke (*London-Bridge*). Inwieweit sie ihrem Zweck entsprach, können wir nicht sagen.

Selbstverständlich waren diese alten Gezeitentafeln rein empirisch. Die Gezeiten wiederholen sich in einer regelmäßigen Reihenfolge; man kann folglich ihre Phasen — selbst die Höhe — ohne Zugrundelegung einer Theorie vorhersagen, ebenso wie man die Finsternisse ohne Kenntnis des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf Grund der schon den Chaldäern bekannten Saros-Periode voraussagen kann.

Gegenwärtig sagt man die Gezeiten auf Grund der „harmonischen Gezeitenanalyse“ voraus. Im Grunde genommen ist diese Methode auch empirisch, nur durch die Theorie „geklärt“ und durch die Mittel der modernen Mathematik vervollkommnet. Ihre theoretische Rechtfertigung findet sie im folgenden Satz von Laplace*): „Der Zustand eines Systems, in welchem die anfängliche Bewegung infolge der Reibung zerstört

*) Laplace, Mécanique céleste, Buch XIII. L's Werke, Ausgabe der Pariser Akademie, Bd. V, S. 175.

worden ist, ist periodisch gleich den Kräften, welche auf das System wirken.“

Der Satz von Laplace scheint evident, doch können wir ihn nicht ohne Einschränkung und Ergänzung annehmen. Er gilt zunächst nur für unendlich kleine Bewegungen; sobald die Bewegung endlich ist, können*) „harmonische Obertöne“ und „zusammengesetzte Perioden“ auftreten. Um die Ursache der Erscheinung zu verstehen, müssen wir auf die hydrodynamischen Differentialgleichungen (achtes Kapitel, Gleichung 1 und 2) zurückgehen. Links stehen die Geschwindigkeiten und ihre Differentialquotienten, rechts die äußeren Kräfte. Im gegebenen Falle sind die äußeren Kräfte Funktionen der Zeit, von der Gestalt:

$$A \sin pt + B \cos pt, \quad C \sin qt + D \cos qt \text{ usw.} \quad . \quad . \quad 18$$

Ist die Bewegung unendlich klein, so können links alle Quadrate und anderen Produkte vernachlässigt werden, wodurch die Gleichungen linear werden.

Es wird sich dann bei der Integration zeigen, daß die Ausdrücke der Geschwindigkeiten keine anderen Funktionen der Zeit enthalten, als die Kreisfunktionen der Argumente pt, qt — im allgemeinen derselben Argumente, welche in den Kräfteausdrücken vorkommen. Darin besteht eigentlich der Satz von Laplace.

Ist aber die Bewegung endlich, dann können die quadratischen Glieder links vom Gleichheitszeichen nicht fortgelassen werden, und die Geschwindigkeiten können nicht einzig und allein durch die Kreisfunktionen der Argumente pt, qt usw. ausgedrückt werden. Da man die allgemeinen Integrale der hydrodynamischen Gleichungen nicht kennt, so ist es nicht möglich, ganz allgemein zu sagen, welche Funktionen der Zeit in den Geschwindigkeitsausdrücken auftreten müssen, aber es ist bekannt, daß neben den Argumenten pt, qt usw. einerseits Argumente:

$$2pt, \; 3pt \ldots \quad 2qt, \; 3qt, \ldots$$

andererseits Argumente:

$$(p-q)t, \; (p+q)t, \; (p-2q)t, \; (p+2q)t, \; (2p-q)t, \; (2p+q)t \ldots$$

auftreten.

Die ersten heißen (in der Akustik) „harmonische Obertöne“, die zweiten „zusammengesetzte Töne“.

---

*) Auch ein Hinzutreten einer additiven Zirkulation wie bei stehenden Schwingungen (neuntes Kapitel, § 1) ist möglich.

Da die Argumente der Obertöne zwei-, dreimal usw. so groß sind, wie das Argument des Grundtones, sind die Perioden der Obertöne zwei-, dreimal usw. so klein wie die Periode des Grundtones. Betrachten wir jetzt die Perioden der „zusammengesetzten" Töne. Es sei τ_1 die Periode, welche dem Argumente pt, und τ_2 die Periode, welche dem Argumente qt entspricht. Dann ist:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{q},$$

und den Argumenten $(p - q)t$ und $(p + q)t$ entsprechen Perioden τ' und τ'', welche mit den ursprünglichen durch die Formeln:

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}, \quad \frac{1}{\tau''} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad . \; . \; . \; . \quad 19$$

verknüpft sind. — Es ist nun klar, daß man aus zwei Perioden τ_1 und τ_2 eine unendliche Anzahl von Obertönen und zusammengesetzten Tönen ableiten kann.

Die Beobachtung lehrt, daß bei der Analyse der Gezeiten „Obertöne" und „zusammengesetzte" Töne berücksichtigt werden müssen, besonders dort, wo die Amplitude der Gezeiten groß ist.

Die fluterzeugenden Kräfte des Mondes und der Sonne können je nach der gewünschten Genauigkeit durch eine kleine oder größere endliche Zahl periodischer Funktionen mit verschiedenen Perioden ausgedrückt werden. Unter einer periodischen Funktion von der Periode τ werden wir in diesem und in den folgenden Paragraphen dieses Kapitels nicht die allgemeinste periodische Funktion von der Periode τ:

$$\sum_0^\infty \left(C_n \cos 2\pi n \frac{t}{\tau} + D_n \sin 2\pi n \frac{t}{\tau} \right), \quad . \; . \; . \; . \quad 20$$

sondern die einfache Kreisfunktion:

$$C \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + D \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 21$$

verstehen. Infolgedessen werden wir die harmonischen Obertöne mit Perioden $\frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{3}\tau$, ... als vom Grundton mit der Periode τ verschieden betrachten.

Es seien jetzt $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \ldots \tau_n$ die Perioden der fluterzeugenden Kräfte. Nach dem Satze von Laplace soll die Höhe der

Gezeiten in einem gegebenen Punkt durch eine Reihe von der Gestalt:

$$h = A_1 \cos 2\pi \frac{t}{\tau_1} + B_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} + \ldots + A_n \cos 2\pi \frac{t}{\tau_n} + B_n \sin 2\pi \frac{t}{\tau_n} \quad 22$$

ausdrückbar sein. Nach dem Obengesagten muß man sehr oft noch einige weitere Glieder von derselben Form, aber mit zusammengesetzten Perioden (von der Gestalt 19) und einige Glieder mit Perioden $\frac{1}{2}\tau_1, \frac{1}{3}\tau_1 \ldots \frac{1}{2}\tau_2, \frac{1}{3}\tau_2 \ldots$ usw. (Obertöne) hinzufügen. Die Koeffizienten A_1, B_1 usw. haben in einem gegebenen Punkte konstante Werte, aber für verschiedene Punkte gelten verschiedene Konstanten. — Somit sind eigentlich A_1, B_1 usw. Funktionen der geographischen Koordinaten, die man aber als solche in Ermangelung einer zureichenden Gezeitentheorie nicht auszudrücken weiß. Man muß ihre Zahlenwerte für jeden einzelnen Punkt aus an derselben Stelle ausgeführten Beobachtungen bestimmen.

Auf diese Weise zerfällt die Aufgabe in zwei Teile, in einen allgemeinen und theoretischen: die Bestimmung der für die ganze Erde gemeinsamen Perioden τ_1, τ_2, τ_3 usw.*) — und in einen zweiten, lokalen und empirischen: die Bestimmung der Konstanten $A_1\ B_1$, $A_2\ B_2$ usw. für jeden einzelnen Hafen.

§ 8. Die Bestimmung der Perioden.

Die fluterzeugenden Kräfte haben ein Potential; sie sind also Differentialquotienten einer und derselben Funktion nach den Koordinaten. Von der Zeit hängen sie in derselben Weise ab wie das Potential. Deswegen braucht man nur die Perioden des Potentials zu untersuchen. Dieses letztere besteht bekanntlich aus zwei Teilen, aus einem Mond- und aus einem Sonnenteile. Den ersten Teil werden wir — als den wichtigeren — genauer untersuchen. Übrigens bezieht sich beinahe alles, was vom Mondpotential gesagt werden kann, auch auf das Sonnenpotential.

Betrachten**) wir nun das Mondpotential (Formel 9):

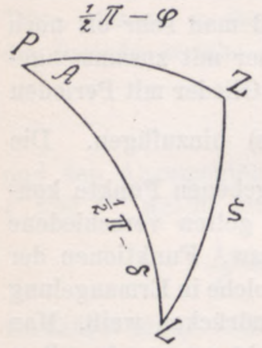
$$V' = km \frac{R^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\zeta - \frac{1}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23$$

*) Das hindert natürlich nicht, daß an einzelnen Stellen auch ganz lokale Perioden der stehenden Schwingungen auftreten können.

**) Hier haben wir uns hauptsächlich des Werkes von Ph. Hatt u. d. T. „Des Marées“ (Paris ohne Datum), speziell der Seiten 150—157 bedient.

Vor allem muß man ζ durch andere Variabele ausdrücken. Zu diesem Zwecke nehmen wir das sphärische Dreieck PZL, in welchem P den Pol, Z den Zenit des gegebenen Punktes und L den Punkt bedeutet, in dem die Zentrale Erde — Mond die Himmelskugel trifft (Fig. 46).

Fig. 46.



Der Winkel A ist der Stundenwinkel des Mondes im gegebenen Punkte, δ die Deklination des Mondes, φ die geographische Breite des gegebenen Punktes. Aus dem Dreieck PZL erhält man sofort:

$$\cos\zeta = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos A, \qquad 24$$

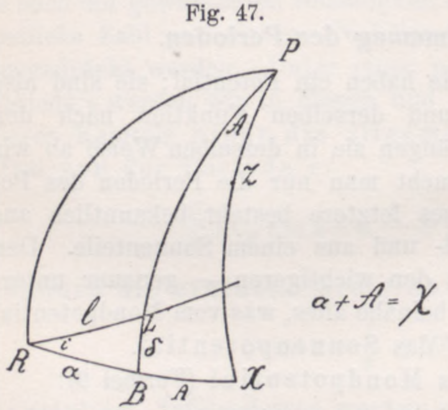
was in 23 eingesetzt, nach der Substitution

$$\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$$ sofort ergibt:

$$V' = \frac{3}{4} km \frac{R^2}{r^3}\Big[\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2A + \sin 2\varphi\sin 2\delta\cos A + \frac{(1 - 3\sin^2\varphi)(1 - 3\sin^2\delta)}{3}\Big]. \qquad 25$$

Der Winkel φ ist für einen jeden gegebenen Punkt der Erdoberfläche konstant, während A und δ mit der Stellung des Mondes variieren. A nimmt während eines Mondtages alle Werte zwischen 0° und 360° an; δ variiert viel langsamer: es durchläuft alle Werte von einem Maximum bis zu einem Minimum und zurück während eines tropischen Monats*). In der Formel 25 entspricht das Glied mit $\cos 2A$ den halbtäglichen, das Glied mit $\cos A$ den täglichen, endlich das von A unabhängige Glied den halbmonatlichen und monatlichen Gezeiten. Das erste Glied ist am wichtigsten, es entspricht den größten Gezeiten.

Fig. 47.



Aber die Form 25 des fluterzeugenden Potentials eignet sich nicht zum Vergleich mit den Beobachtungen; man muß hierzu der

*) Der tropische Monat ist die Zeit, während welcher die Länge des Mondes um 360° zunimmt. Seine mittlere Dauer beträgt 27 Tage 7 St. 43 Min. 4,7 Sek.

Zeit proportionale Winkel einführen und die variabeln Koeffizienten beseitigen. Zu diesem Zwecke ersetzt man δ, A und r durch andere Variabele. Wir nehmen an, daß P, Z und L dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Figur haben, daß RX den Äquator und RL den Schnitt der Bahnebene des Mondes mit der Himmelskugel bedeuten (Fig. 47). PR ist derjenige Meridian, welcher durch den Schnittpunkt R der Mondbahn mit dem Äquator, PL derjenige, welcher durch den Mittelpunkt des Mondes, PX derjenige, welcher durch den gegebenen Punkt der Erdoberfläche geht. $RL = l$ bezeichnet die von R ab gerechnete Länge des Mondes, $BL = \delta$ seine Deklination, $RB = \alpha$ seine Rektaszension, $XB = A$ den lokalen Stundenwinkel des Mondes, $\chi = \alpha + A$ den lokalen Stundenwinkel des Schnittpunktes R, i endlich die Neigung der Mondbahn gegen den Äquator. Außerdem setzen wir der Kürze wegen:

$$\cos\frac{1}{2}i = p, \qquad \sin\frac{1}{2}i = q. \quad \ldots\ldots \quad 26$$

Das rechtwinklige sphärische Dreieck RBL gibt:

$$\sin\delta = \sin i \sin l = 2pq \sin l \quad \ldots\ldots \quad 27$$

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos l. \quad \ldots\ldots \quad 28$$

Das Dreieck RLP gibt:

$$\sin\alpha\cos\delta = \sin l \cos i. \quad \ldots\ldots \quad 29$$

Betrachten wir zuerst das halbtägliche*) Glied: $\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2A$.

Wegen der Identität $A = \chi - \alpha$ kann dasselbe folgendermaßen geschrieben werden:

$$\cos^2\delta\cos 2A = \cos 2\chi\cos^2\delta\cos 2\alpha + \sin 2\chi\cos^2\delta\sin 2\alpha. \quad 30$$

Aus den Formeln 28 und 29 folgt aber:

$$\cos^2\delta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos^2 l - \sin^2 l\cos^2 i,$$

was auch in der Gestalt:

$$\cos^2\delta\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\sin^2 i + \frac{1}{2}(1+\cos^2 i)\cos 2l \quad . \ . \quad 31$$

geschrieben werden kann. — Aus denselben Formeln 28 und 29 erhält man ferner durch Multiplikation:

$$\cos^2\delta\sin 2\alpha = \cos i\sin 2l. \quad \ldots\ldots \quad 32$$

Auf Grund der Formeln 31 und 32 kann die Formel 30 folgendermaßen geschrieben werden:

$$\cos^2\delta\cos 2A = \frac{1}{2}\cos 2\chi[\sin^2 i + (1+\cos^2 i)\cos 2l] + \sin 2\chi\cos i\sin 2l.$$

*) Es handelt sich stets um den Mondtag.

Aber aus den Formeln 26 folgt:

$$\cos i = p^2 - q^2, \qquad 1 = p^2 + q^2$$

und des weiteren:

$$\sin^2 i = 4\,p^2 q^2, \qquad (1 + \cos^2 i) = 2\,(p^4 + q^4).$$

Nach Substitution dieser Werte und nach leicht ersichtlichen Umformungen findet man:

$$\cos^2 \delta \cos 2\,A = p^4 \cos 2\,(\chi - l) + 2\,p^2 q^2 \cos 2\,\chi + q^4 \cos 2\,(\chi + l); \qquad 33$$

ebenso findet man:

$$\sin 2\,\delta \cos A = -2\,[p^3 q \sin(\chi - 2\,l) - p\,q\,(p^2 - q^2) \sin \chi$$
$$- p\,q^3 \sin(\chi + 2\,l)], \quad \ldots \ldots \quad 34$$

ferner:

$$1 - 3 \sin^2 \delta = p^4 - 4\,p^2 q^2 + q^4 + 6\,p^2 q^2 \cos 2\,l. \quad \ldots \quad 35$$

Auf diese Weise haben wir uns der Variabeln δ und A entledigt; es bleibt nur noch r zu eliminieren. Es sei nun ω_1 die Länge des Mondperigäums von R ab gezählt, a die größere Halbachse und e die Exzentrizität der Mondbahn. Die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten schreibt sich dann:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos(l - \omega_1)}.$$

Daraus erhält man mit Vernachlässigung von e^3 usw.:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{(1 + \tfrac{3}{2} e^2) + 3\,e \cos(l - \omega_1) + \tfrac{9}{2} e^2 \cos 2\,(l - \omega_1) + \ldots}{a^3\,(1 - e^2)^3} \qquad 36$$

Jetzt bleibt nur noch übrig, die Werte aus den Formeln 33, 34, 35 und 36 in die Formel 25 einzusetzen und die Produkte von der Form $\cos \alpha \cos \beta$ in Summen von der Form:

$$\frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\Big] \text{ usw.}$$

umzuwandeln, um das fluterzeugende Mondpotential in der Gestalt einer Summe von Kreisfunktionen mit in bezug auf l, χ und ω_1 linearen Argumenten zu erhalten. Die Koeffizienten der Kreisfunktionen sind aber nicht konstant, es sind Funktionen von i, welches langsam variiert. Die obere Grenze von i ist die Summe der Neigungen der Ekliptik gegen den Äquator und der Mondbahn gegen die Ekliptik, die untere die Differenz dieser Neigungen; die obere Grenze ist somit $23^0\,27' + 5^0\,9' = 28^0\,36'$, die untere $23^0\,27' - 5^0\,9' = 18^0\,18'$. Der Winkel i variiert so langsam, daß

für das ganze Jahr ein mittlerer Wert angenommen werden kann. Nebenbei sei bemerkt, daß q^4 meist vernachlässigt werden kann; ist z. B. $i = 23^0\ 27'$, dann ist $p = \cos \frac{1}{2} i = 0{,}979$, $q = \sin \frac{1}{2} i = 0{,}203$ und $q^4 = 0{,}0017$, was schon neben anderen Größen verschwindet.

Der obige Ausdruck des fluterzeugenden Potentials ist noch nicht der endgültige, da l nicht proportional der Zeit variiert und bei der Ableitung der Formel 36 selbst die wichtigsten Perturbationen in der Bewegung des Mondes außer acht geblieben sind. In der Tat wurde der Ausdruck für r aus einer für die Ellipse gültigen Formel abgeleitet, während bekannterweise die Mondbahn von einer Ellipse merklich abweicht. In der Regel berücksichtigt man die Evektion und die Variation, was sich durch Hinzufügung des Ausdrucks:

$$\frac{1}{a^3 (1 - e^2)^3} \left[\frac{45}{8} me \cos (s - 2h + \omega) + 3m^2 \cos 2 (s - h) \right] \qquad 37$$

zur Formel 36 kundgibt. In dieser letzten Formel bedeutet m das Verhältnis der mittleren Bewegung der Sonne zur mittleren Bewegung des Mondes (der numerische Wert von m ist 0,0748 . . .), s die mittlere Länge des Mondes, ω die Länge des Perigäums und h die mittlere Länge der Sonne*), alles vom Frühlingsäquinoktium aus gerechnet.

Wir ergänzen somit die rechte Seite von 36 durch die rechte Seite von 37, wobei sich sofort zeigt, daß die Ergänzungsglieder andere Variabeln wie der ursprüngliche Ausdruck für r^{-3} enthalten. Die neuen Variabeln s und h sind der Zeit direkt proportional, entsprechen somit unseren Forderungen und dürfen statt der alten in die Formeln eingeführt werden. Das geschieht mit Hilfe der folgenden Relationen. Erstens ist:

$$l = s - \xi + S. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 38$$

Hier ist die Bedeutung von l und s schon bekannt, ξ ist die vom Frühlingsäquinoktium aus gerechnete Länge des Punktes R, in welchem die Mondbahn den Äquator schneidet, während S eine Reihe von Kreisfunktionen mit in bezug auf s, ω und h linearen Argumenten bedeutet. Das erste Glied der Reihe hat einen Koeffizienten von der Ordnung e, die weiteren Glieder haben Koeffizienten

*) Das ist gleichzeitig die Rektaszension der mittleren Sonne oder die Sternzeit um den mittleren Mittag.

höherer Ordnungen in bezug auf e. Zweitens hat man folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \omega - \xi\\ \chi &= t + h - \nu\end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 39$$

wo t den Stundenwinkel der mittleren Sonne, d. i. die mittlere Sonnenzeit, und ν die Rektaszension des Punktes R bedeutet.

Unter den in 38 und 39 neueingeführten Größen sind vier: t, h, s und ω der Zeit proportional, ν und ξ sind zwar nicht der Zeit proportional, variieren dafür aber so langsam, daß es erlaubt ist, für ein ganzes Jahr einen konstanten Mittelwert einzusetzen. Eine gewisse Schwierigkeit bereitet die Reihe S in der Formel 38; aber erstens beschränkt man sich auf die zwei ersten Glieder der Reihe, welche e und e^2 enthalten, zweitens kann man den Umstand benutzen, daß S numerisch klein ist und statt

$$\cos(l - \omega_1) = \cos(s - \xi + S - \omega_1)$$

einfach:

$$\cos(s - \xi - \omega_1) - \sin(s - \xi - \omega_1) \cdot S$$

schreiben. In ähnlicher Weise wird man auch andere Ausdrücke, in denen l auftritt, behandeln. Wir denken uns jetzt die Formel 36 für r^{-3} durch die Formel 37 ergänzt, die Ausdrücke für l, ω und χ (Formeln 38 und 39) in die ergänzte Formel für r^{-3}, ferner in die Formeln 33, 34 und 35 eingeführt, wobei natürlich die soeben erwähnte Vereinfachung betreffs S zu machen ist. Endlich denken wir uns alle diese Resultate in 25 (d. i. in den Ausdruck des fluterzeugenden Mondpotentials) eingesetzt, wonach 25 als eine Reihe von Produkten der Kreisfunktionen auftritt. Wieder muß man mit Hilfe der bekannten Formeln:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = {}^1/_2 [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \text{ usw.}$$

die Produkte der Kreisfunktionen in Kreisfunktionen der Summen und Differenzen der Argumente verwandeln, um eine Summe von Kreisfunktionen zu bekommen. Hier genügt es, diese Operationen, die keine analytische oder prinzipielle Schwierigkeit bieten, aber rechnerisch ziemlich langwierig sind, anzudeuten. Ganz ähnlich leitet man auch das Potential der fluterzeugenden Sonnenkraft ab: man braucht nur die Exzentrizität der Mondbahn durch die Exzentrizität der Sonnenbahn, die mittlere Länge des Mondes und die mittlere Länge seines Perigäums durch die mittlere Länge der Sonne und ihres Perigäums zu ersetzen. Weiter wird man für die Neigung i der Mondbahn die Ekliptikschiefe ($= 23^0\,27'$), für ν

und ξ einfach Null setzen. Die so erhaltenen Ausdrücke besitzen nur eine beschränkte, aber für das verfolgte praktische Ziel vollkommen ausreichende Genauigkeit; sie enthalten alle wichtigeren Perioden, einschließlich der halbjährlichen Sonnenperiode. Langperiodische, mehrjährige Perturbationen gehen uns nichts an.

Jedes Potential, das Mond- wie das Sonnenpotential, besteht aus mehreren Kreisfunktionen, die ungezwungen zu gewissen Gruppen vereinigt werden dürfen. So zerfällt das Mondpotential in drei Gruppen, welche den bei der Besprechung der Formel 25 erwähnten Gruppen entsprechen. Zur ersten Gruppe gehören Kreisfunktionen mit Perioden von ungefähr zwölf Mondstunden, zur zweiten solche mit Perioden von ungefähr vierundzwanzig Mondstunden, zur dritten Kreisfunktionen mit Perioden von ungefähr einer Woche oder einem Monat.

In der ersten Gruppe hat das Glied, welches der wichtigsten halbtäglichen Mondwelle M_2*) entspricht, das Argument:

$$2t + 2(h - \nu) - 2(s - \xi).$$

Betrachten wir die Geschwindigkeit, mit welcher dieses Argument wächst! Die mittlere Sonnenzeit t wächst um 360° während eines mittleren Sonnentages, d. h. um 15° in einer mittleren Sonnenstunde, die Rektaszension der mittleren Sonne h wächst um 360° in einem Jahre, um 0,9856464° in einem Tage und um 0,0410686° in einer Stunde. Folglich wächst $t + h$ um 15,0410686° in einer Stunde. Das ist die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation Ω. Andererseits wächst die mittlere Mondlänge s mit einer Geschwindigkeit n, welche „mittlere Bewegung des Mondes“ heißt. In Graden pro Stunde ist: $n = 0{,}5490165^0$. Da ν und ξ als konstant betrachtet werden, so ist die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das Argument der Welle M_2 wächst:

$$2(\Omega - n) = 28{,}9841042^0 \text{ pro mittlere Sonnenstunde,}$$

und die entsprechende Periode beträgt einen halben Mondtag oder 12,4206 mittlere Sonnenstunden.

Das zweite Glied, welches der halbtäglichen, sogenannten siderischen Welle K_2 entspricht, hat das Argument $2t + 2(h - \nu)$ und die Winkelgeschwindigkeit $2\Omega = 30{,}0821372^0$ pro mittlere Sonnenstunde. Die entsprechende Periode ist dem halben Stern-

*) Es ist üblich, die einzelnen Komponenten der Gezeiten ständig mit denselben Buchstaben zu bezeichnen.

tag gleich und zählt 11,9672 mittlere Sonnenstunden. Dann folgen Glieder mit Perioden von 12,659, 12,192, 12,905 usw. Stunden. Insgesamt enthält die erste Gruppe des Mondpotentials acht Kreisfunktionen, unter denen zwei von der Evektion und eines von der Variation abhängen. Die zweite Gruppe enthält ebenfalls acht Kreisfunktionen, wobei sämtliche Perioden dem Mondtage nahekommen. Ein Glied hat den Mondtag, ein zweites den Sterntag zur Periode. Die dritte Gruppe enthält fünf langperiodische Glieder, wovon zwei ungefähr zwei Wochen, zwei ungefähr einen Monat, ein Glied 219,19 Stunden (9 Tage, 3 Stunden, 11 Minuten) als Periode haben. Im Sonnenpotential behält man gewöhnlich drei Glieder mit halbtäglichen Perioden, wobei eine Periode genau und die beiden anderen nur annähernd einem halben mittleren Sonnentage gleich sind. In der zweiten Gruppe behält man nur zwei Glieder mit ungefähr eintäglichen Perioden, in der dritten nur ein Glied mit einer halbjährlichen Periode. — Insgesamt enthält das fluterzeugende Potential 27 Glieder. Es hat die Gestalt:

$$V' = \Sigma C_n \cos(\beta_n t - u_n), \quad \ldots\ldots \quad 40$$

wobei $\beta_n = \frac{2\pi}{\tau_n}$, t die Zeit, τ_n die Periode, C_n und u_n gewisse als konstant angesehene Größen bedeuten.

§ 9. Die Bestimmung der Koeffizienten in der Formel für die Gezeitenhöhe.

Nach den in § 7 dargelegten Prinzipien soll der augenblickliche Wasserstand in einem Punkte Q der Meeresoberfläche durch eine endliche Reihe von Kreisfunktionen:

$$A \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + B \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

ausdrückbar sein. Unter τ verstehen wir entweder eine der im vorigen Paragraphen gefundenen astronomischen Perioden oder eine zwei-, drei-, im allgemeinen n-mal so kurze Periode (Obertöne), oder endlich eine aus den astronomischen zusammengesetzte Periode. — Es handelt sich nun darum, aus den in Q ausgeführten Beobachtungen die Koeffizienten A und B zu bestimmen. Dafür sind entweder kontinuierliche Registrierungen des Wasserstandes an einem Maregraph oder stündliche Ablesungen an einem Flutmesser, oder wenigstens Ablesungen des höchsten Wasserstandes

während der Flut und des niedrigsten während der Ebbe erforderlich. — Wir wollen voraussetzen, daß kontinuierliche Registrierungen am Maregraphen aus einem Jahre, oder noch besser von 370 Tagen, vorhanden sind. Aus der Maregraphenkurve können die Koeffizienten A und B mit Hilfe eines speziell dafür von Lord Kelvin (W. Thomson) konstruierten Apparates, des sogenannten harmonischen Analysators, abgeleitet werden. Hier aber werden wir voraussetzen, daß die Koeffizienten berechnet werden müssen.

Wir schreiben zuerst die Formel für den Wasserstand h in solcher Weise, daß Glieder mit einer gegebenen Periode τ und ihren Bruchteilen nebeneinander stehen. Auf diese Weise wird man eine Gruppe mit den Perioden: τ_1, $^1/_2\tau_1$, $^1/_3\tau_1$, ..., eine zweite mit den Perioden: τ_2, $^1/_2\tau_2$, $^1/_3\tau_2$, . . . usw. haben, und die Formel für den Wasserstand wird die Gestalt besitzen:

$$\left.\begin{aligned} h = h_0 &+ A_{1,1}\cos 2\pi\frac{t}{\tau_1} + B_{1,1}\sin 2\pi\frac{t}{\tau_1} + \\ &+ A_{1,2}\cos 4\pi\frac{t}{\tau_1} + B_{1,2}\sin 4\pi\frac{t}{\tau_1} + \ldots . \\ &+ A_{2,1}\cos 2\pi\frac{t}{\tau_2} + B_{2,1}\sin 2\pi\frac{t}{\tau_2} + \ldots . \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \; 41$$

Zuerst bestimmt man den mittleren Wasserstand h_0. Aus Rücksichten, die aus dem Folgenden erhellen werden, ist es bequem, eine Zeitspanne, die näherungsweise ein ganzes Vielfaches des mittleren Mondtages ausmacht, zu wählen. Man nehme z. B. 365 Tage und 9 Stunden*) (hier sprechen wir von mittleren Sonnentagen und Sonnenstunden), welche Zeit beinahe genau 353 Mondtage umfaßt. Auf der Abszissenachse des Maregraphen nimmt man gleiche Zeitintervalle, z. B. mittlere Sonnenstunden, mißt die entsprechenden Ordinaten aus und erteilt den Zahlenwerten das Vorzeichen + oder —, je nachdem die betreffende Ordinate oberhalb oder unterhalb der Null des Maregraphen liegt. Man erhält auf diese Weise 8769 Ordinaten h_1, h_2, ... und bildet das arithmetische Mittel:

$$h_m = \frac{1}{8769}\,\Sigma h.$$

*) Man könnte natürlich auch anders vorgehen und trotzdem zu wesentlich demselben Endergebnis gelangen; aber wir haben diesen Weg gewählt, um den Einfluß der größten Mondwellen vollständig auszuschalten.

Nun darf man auf Grund der Formel 41 schreiben:

$$h_m - h_0 = \frac{1}{8769} \Sigma \Sigma \left(A \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + B \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \right). \quad . \quad . \quad 42$$

Die Summe rechts besteht aus 8769 Reihen von der Gestalt der Reihe 41. In der ersten Reihe ist $t = 1$ Stunde, in der zweiten $t = 2$ Stunden . . ., in der letzten $t = 8769$ Stunden. Nehmen wir jetzt aus den sämtlichen 8769 Reihen die Glieder mit der Periode $\tau =$ einem Mondtage heraus, so können wir mit Rücksicht darauf, daß dieselben Koeffizienten in allen so herausgenommenen Ausdrücken stehen, ihre Summe in der Gestalt schreiben:

$$A \Sigma \cos 2\pi \frac{t}{\tau} + B \Sigma \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

(wobei $t = 1, 2, \ldots$ 8769 Stunden). Nun verschwinden beide Summen in der obigen Formel, und zwar auf Grund der bekannten Beziehungen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos 2\pi k \frac{m}{n} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \sin 2\pi k \frac{m}{n} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad 43$$

wo m und n ganze Zahlen bedeuten*). Hier sind diese Formeln anwendbar, da 353 Perioden der täglichen Mondwelle 8769 Stunden ausmachen, folglich

$$m = 353, \quad n = 8769$$

gesetzt werden kann. Wort für Wort gilt dasselbe von der halbtäglichen Mondwelle, nur hat man statt $m = 353$, $m = 706$ zu setzen. In gleicher Weise werden alle Glieder, deren Perioden in 8769 Stunden ohne Rest enthalten sind, sich aufheben. Betrachten wir jetzt die Gesamtheit der Glieder mit der Periode $\tau =$ einem mittleren Sonnentage. Hier hebt sich sofort die Kreisfunktion, in welcher $t = 1$ Stunde, gegen die Kreisfunktion, in welcher $t = 13$ Stunden ist, da ihre absoluten Werte gleich, nur die Vorzeichen entgegengesetzt sind; ebenso hebt sich die Kreisfunktion, wo $t = 2$ Stunden, gegen die Kreisfunktion, wo $t = 14$ Stunden ist, usw. auf; ferner hebt sich die Kreisfunktion, wo $t = 25$ Stunden gegen die Kreisfunktion, wo $t = 37$ Stunden ist, usw. auf. Nur die Kreisfunktionen, die den letzten neun Stunden entsprechen, bleiben

*) Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn $\frac{m}{n} = r$, wo r auch eine ganze Zahl ist. Dann bleibt die zweite Summe Null, während die erste den Wert n annimmt.

übrig. In gleicher Weise heben sich alle Kreisfunktionen, welche den halben Sonnentag als Periode haben, bis auf die drei letzten auf. — Betrachten wir die Kreisfunktionen, welche den Sterntag oder den halben Sterntag als Periode haben. Da 365 Tage oder 8760 Stunden beinahe genau 366 Sterntage ausmachen, so ist die Summe der ersten 8760 Kreisfunktionen auf Grund der Gleichungen 43 Null, nur die letzten neun, bzw. drei Kreisfunktionen bleiben als Rest übrig.

In dieser Weise fortfahrend, werden wir uns überzeugen, daß jede Gruppe der Glieder in der Formel 42, welche zu demselben Koeffizienten gehört, nur einen ganz kleinen Beitrag zur allgemeinen Summe liefert. Dazu sind diese Beiträge teils positiv, teils negativ, und zuletzt wird alles durch die große Zahl 8769 dividiert. Somit wird die Differenz $h_m - h_0$ ganz klein ausfallen, und man kann getrost

$$h_0 = h_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44$$

setzen.

Es fragt sich nun, wie die Koeffizienten A und B zu bestimmen sind. In der Praxis rechnet man nur mit stündlichen (wir sprechen von mittleren Sonnenstunden) Wasserständen — gleichviel, ob es sich um Mond- oder um Sonnenwellen handelt. Infolgedessen wird man gezwungen, bei der Bestimmung der Koeffizienten der Mondwellen Kunstgriffe zu benutzen, man überspringt nämlich gewisse Stunden. Aber wir können hier auf Rechenvorschriften, überhaupt auf alle technischen Einzelheiten, nicht eingehen, da uns dies zu weit führen würde. Wir stellen uns auf einen mehr abstrakten Standpunkt und fragen nur, mit welcher Methode die größte Genauigkeit erzielt werden kann. Der kürzeste Weg zu einer genauen Bestimmung der Koeffizienten, sagen wir der halbtäglichen Mondwelle, wäre der folgende. Man nimmt eine Zeitspanne von 357 mittleren Mondtagen, was beinahe genau 369,5 mittleren Sonnentagen entspricht. Diese Wahl trifft man, um die nach der halbtäglichen Mondwelle nächstgroßen Wellen, nämlich die halbtägliche Sonnenwelle und die ganztägliche Mondwelle, gänzlich zu eliminieren. Man mißt auf der Abszissenachse der Maregraphenkurve mittlere Mondstunden ab, nimmt die entsprechenden Ordinaten und bildet zwölf Mittelwerte. Den ersten Mittelwert, sagen wir h_1, bildet man aus den 357 Ordinaten, welche der ersten, und aus den 357 Ordinaten, welche der dreizehnten Mondstunde an allen 357 Mondtagen angehören, zusammen aus 714 Ordinaten; den

zweiten Mittelwert h_2 bildet man aus Ordinaten, welche der zweiten und der vierzehnten Mondstunde angehören, usw.

Es ist klar, daß diejenige Kreisfunktion, welche die halbtägliche Mondwelle ausdrückt, in allen 714 Ordinaten desselben Mittels h_1, h_2 . . . mit einem und demselben Wert auftritt, während die ganztägliche Sonnen- und die halbtägliche Mondwelle sich gänzlich eliminieren. Bezüglich der halbtäglichen Mondwelle ist das sofort einleuchtend, da die entsprechende Kreisfunktion für jede m-te und $(m+12)$te Mondstunde immer dieselben absoluten Werte, aber entgegengesetzte Vorzeichen hat. Auf die halbtägliche Sonnenwelle wiederum sind die Gleichungen 43 anwendbar.

In der Tat enthält die Ordinatensumme für die j-te Mondstunde (wo $j = 1, 2 \ldots 12$) unter anderen die Partialsumme:

$$A \sum_{n=0}^{n=713} \cos 2\pi (j + 12n) \frac{q}{\tau_2} + B \sum_{n=0}^{n=713} \sin 2\pi (j + 12n) \frac{q}{\tau_2},$$

wo q eine Mondstunde und τ_2 die Periode der halbtäglichen Sonnenwelle, also zwölf Sonnenstunden bedeuten. Da j in allen Gliedern der Reihe denselben Wert hat, so kann sie sofort auf die Gestalt gebracht werden:

$$C_1 \sum_{n=0}^{n=713} \cos 24\pi n \frac{q}{\tau_2} + C_2 \sum_{n=0}^{n=713} \sin 24\pi n \frac{q}{\tau_2},$$

wo C_1 und C_2 leicht zu berechnende Konstanten bedeuten. Nun ist laut dem Obengesagten $714 \times 12\,\mathrm{q} = 739\,\tau$, und die obige Summe kann in der Gestalt geschrieben werden:

$$C_1 \sum_{n=0}^{n=713} \cos 2\pi \frac{739}{714} n + C_2 \sum_{n=0}^{n=713} \sin 2\pi \frac{739}{714} n.$$

Vergleicht man diese Summe mit den Gleichungen 43, so sieht man sofort ein, daß sie verschwindet und daß somit der Einfluß der halbtäglichen Sonnenwelle gänzlich ausgeschaltet wird. Die übrigen kleineren Wellen werden zwar nicht so vollständig eliminiert, da sie aber in den einzelnen Ordinatensummen teils mit positiven, teils mit negativen Werten auftreten, so heben sie sich bis auf unbedeutende Reste auf, und es bleibt in jeder einzelnen Ordinatensumme nur die 714 mal wiederholte Höhe der halbtäglichen Mondwelle, vermehrt um den 714 mal wiederholten mittleren Wasserstand h_0 übrig. — Nach der Division der Summen durch 714 sind wir somit berechtigt zu schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} A\cos\frac{2\pi}{12}+B\sin\frac{2\pi}{12}=h_1-h_0 \\ A\cos\frac{4\pi}{12}+B\sin\frac{4\pi}{12}=h_2-h_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\cos 2\pi+B\sin 2\pi=h_{12}-h_0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots 45$$

Die zwölf Gleichungen 45 enthalten nur zwei Unbekannte: A und B. Würden alle unsere Voraussetzungen streng realisiert sein, so müssten sie untereinander übereinstimmen, und es hätte genügt, zwei Gleichungen*) aufzulösen, um A und B zu bestimmen. Da aber unsere Voraussetzungen nicht streng realisiert sind, so sind die Gleichungen 45 in der Regel nicht streng konkordant und man muß zur Methode der kleinsten Quadrate seine Zuflucht nehmen. Zuweilen ist die Diskordanz zu groß, was beweist, daß die Obertöne, die durch das obige Verfahren nicht eliminiert werden können, zu berücksichtigen sind.

Dann muß man statt der Gleichungen 45 zwölf Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\cos\frac{\pi}{6}+B_1\sin\frac{\pi}{6}+A_2\cos\frac{\pi}{3}+B_2\sin\frac{\pi}{3}+\ldots=h_1-h_0 \\ A_1\cos\frac{\pi}{3}+B_1\sin\frac{\pi}{3}+A_2\cos\frac{2}{3}\pi+B_2\sin\frac{2}{3}\pi+\ldots=h_2-h_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 46$$

schreiben. Auch hier hat man selten mehr als vier oder sechs Koeffizienten zu bestimmen; somit ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geboten. Dieselbe liefert folgende Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten A_k und B_k:

$$\left.\begin{array}{l} A_k=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n=12}(h_n-h_0)\cos\frac{kn}{6}\pi \\ B_k=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n=12}(h_n-h_0)\sin\frac{kn}{6}\pi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots 47$$

wobei $k=1, 2, 3\ldots$ Man kann auch die Konstanten A_1 und B_1 aus den Gleichungen 46 eliminieren, wozu man nur die erste und die siebente, die zweite und die achte usw. Gleichung 46 zu addieren hat. Aus den so erhaltenen sechs Gleichungen kann man

*) Etwa die dritte und die sechste.

zuerst A_2 und B_2 mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, um dann mit schon bekannten A_2 und B_2 wieder in die Gleichungen 46 einzugehen. Eine allgemeingültige Regel kann hier nicht gegeben werden, da man das Verfahren den Umständen nach modifizieren muß.

Wenn es sich um Koeffizienten bei langperiodischen Gliedern handelt, dann können und müssen die Rechnungen etwas anders durchgeführt werden; aber das ist eine zu spezielle Frage, mit welcher wir uns nicht beschäftigen können. Dagegen werden wir der „Phasenverspätung" ein paar Worte widmen.

Wir setzen in 41:

$$\frac{2\pi}{\tau} = \beta, \quad A = H\cos\lambda, \quad B = H\sin\lambda,$$

somit:

$$H = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{B}{A},$$

wodurch die Formel 41 sich in:

$$h = h_0 + \Sigma H_n \cos(\beta_n t - \lambda_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48$$

verwandelt. Andererseits haben wir zu Ende des vorigen Paragraphen für das fluterzeugende Potential die Formel 40 gefunden:

$$V' = \Sigma C_n \cos(\beta_n t - u_n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49$$

Nehmen wir jetzt in den Gleichungen 48 und 49 einander entsprechende Glieder mit derselben Winkelgeschwindigkeit β_n und bilden wir die Differenz ihrer Argumente:

$$\beta_n t - u_n - (\beta_n t - \lambda_n) = \lambda_n - u_n = k_n,$$

so kann die Formel 48 folgendermaßen geschrieben werden:

$$h = h_0 + \Sigma H_n \cos(\beta_n t - u_n - k_n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48'$$

Die Konstante k_n heißt Phasenverspätung, denn je nachdem sie gleich Null, positiv oder negativ ist, treten die Phasen der Gezeitenwelle gleichzeitig*), später oder früher auf als die Phasen des entprechenden Gliedes im Potential der fluterzeugenden Kraft.

---

*) Dabei setzen wir voraus, daß C_n und H_n dasselbe Vorzeichen haben; ist das Vorzeichen von H_n vom Vorzeichen von C_n verschieden, so fügt man π zum Argument $\beta_n t - \lambda_n$ hinzu und verwandelt das Vorzeichen von H_n in das entgegengesetzte. Wohlverstanden sind die Koeffizienten H_n den C_n nicht genau proportional, obwohl im allgemeinen ein gewisser Parallelismus unter den Koeffizienten nicht zu verkennen ist.

Die Methode der harmonischen Analyse gibt gute Resultate; die Voraussage bestätigt sich nicht bloß bezüglich der Phasen, sondern auch bezüglich der Höhe, mit Ausnahme der Tage, an denen starke Winde das Wasser zu- oder wegtreiben. — Bei dieser Gelegenheit wollen wir bemerken, daß halbjährliche Gezeiten, welche sich mit verschiedenen meteorologischen Einflüssen durchkreuzen, sich schlecht in die harmonische Analyse fügen; aber ihre Amplitude ist immer sehr klein, und infolgedessen ist die Unsicherheit bezüglich der Höhe und Phase ohne Bedeutung für die Praxis. Weit wichtiger sind unregelmäßige Störungen durch starke Winde.

§ 10. Gezeiten in Kanälen und Flußmündungen. Die Bore. Irdische und atmosphärische Gezeiten.

Schon in § 6 wurde der Einfluß der Konfiguration des Meeresbodens und der Küsten auf die Gezeiten erwähnt. Etwas Bestimmtes darüber sagen, auf lokale Verhältnisse eingehen, können wir nicht, da die theoretische Grundlage fehlt. Man muß bei ganz allgemeinen, direkt einleuchtenden Sätzen bleiben. So erklärt sich die überall wiederkehrende Vergrößerung der Amplitude in Buchten und Kanälen dadurch, daß sich die Gezeitenwelle beim Eindringen in einen sich verengenden Raum staut. Übrigens bildet sich in Buchten und Kanälen keine selbständige merkliche Gezeitenwelle; die Gezeiten in Buchten und Kanälen sind von den Gezeiten im offenen Meer abhängig, sie kommen aus dem Meere als eine Art Übertragungswelle.

In den Kanal *La Manche* kommt die Welle von zwei Seiten*) her: aus dem Atlantischen Ozean und aus der Nordsee. Diese beiden Wellen verstärken einander auf der Linie *Penzance* (engl. Küste) — Insel *Ouessant* (Frankreich) und auf der Linie *Hastings — Tréport*. Dazwischen, auf der Linie *Lulworth — Cap la Hogue*, findet sich ein Minimum der Gezeitenamplitude, indem die kleinere Nordseewelle die größere atlantische teilweise neutralisiert. Im irischen Kanal, wo ebenfalls eine Welle von Norden und eine zweite von Süden kommt, sind beide gleichstark; an einigen Stellen ist die Interferenz vollständig, die vertikale Bewegung ist Null, dafür

*) J. P. van der Stok (Études des Phénomènes de Marée. K. Nederlandsch Meteorolog. Institut. 90, II, S. 3) hält an der entgegengesetzten älteren Meinung von Kelvin fest. Er meint, daß die Doverstraße ein unüberwindliches Hindernis für die Gezeitenwellen bildet.

sind die horizontalen Strömungen sehr stark. Andererseits findet sich südwestlich der Insel *Man* ein begrenztes Gebiet, wo trotz großer Gezeitenamplitude (4,9 bis 6,0 m) zu keiner Zeit*) eine Gezeitenströmung auftritt. Hier haben sich zwei fortschreitende Wellen zu einer stehenden Schwingung zusammengesetzt (vergl. neuntes Kapitel, S. 360); die Stellen ohne vertikale Bewegung entsprechen den Knoten, die Stellen ohne Strömung entsprechen den Bäuchen.

In ähnlicher Weise wie in die Kanäle dringt die Flut in Flußmündungen ein. Der Meeresspiegel an der Flußmündung steigt, das Gefälle im Flusse vermindert sich, die Geschwindigkeit des Flußwassers nimmt ab, und das Meerwasser dringt in die Mündung ein. In einigen Flüssen kehrt sich die Strömungsrichtung während des Maximums der Flut — wenn nicht bei allen, so doch wenigstens bei großen Syzygialgezeiten — gänzlich um, und das Meerwasser dringt weit hinauf in den Fluß ein. Dafür fließt der Strom während der Ebbe mit gesteigertem Gefälle, gesteigerter Geschwindigkeit und vergrößerter Wassermenge abwärts. Die Zeit, während welcher der Fluß normal abwärts fließt, ist immer größer als die Zeit, während welcher der Fluß zurückströmt. Der erste Zustand bleibt immer die Regel, der zweite eine Ausnahme; denn der Fluß fließt noch abwärts, wenn der Meeresspiegel sich schon über das Mittel gehoben hat, seine Strömungsrichtung kehrt erst dann um, wenn das Gefälle umkehrt, was erst kurz vor dem Maximum der Flut geschieht. Andererseit bildet sich schon bald nach dem Maximum der Flut, bevor die Meeresoberfläche den mittleren Stand erreicht hat, ein Gefälle vom Fluß zum Meer und das Flußwasser strömt oben wieder nach dem Meere. Übrigens hängen die Umkehrungsmomente der Flußströmung — insbesondere unten — mit den Umkehrungsmomenten der Meeresströmung zusammen.

Es ist klar, daß die Gezeiten zu Wechselströmungen an der Küste Anlaß geben müssen, nur bei absolut vertikalen Küsten könnte die Meeresoberfläche ohne Verschiebung der Horizontalgrenzen steigen und fallen. Während der Flut bildet sich eine Strömung nach, während der Ebbe eine Strömung von der Küste. Die Momente, wo der Strom „kentert", d. h. in den entgegen-

*) C. Börgen, Ableitung der Ausdrücke für die bei Kreuzung beider Gezeitenwellen auftretenden Erscheinungen. Annalen der Hydrographie, Bd. 36 (1908), S. 453 und 460.

gesetzten umschlägt, folgen in der Regel erst nach dem höchsten und dem niedrigsten Wasserstande. Die horizontale Geschwindigkeit ändert das Vorzeichen später als die vertikale. Der höchste Wasserstand ist schon überschritten, aber das Meerwasser strömt noch der Küste zu, es dringt noch in die Mündung ein und staut den Fluß an; sobald aber der Gezeitenstrom kentert, hört auch das Stauen des Flusses auf. Die andere Kenterung des Gezeitenstromes — nach dem niedrigsten Wasserstand — kann nicht sofort auf die Flußströmung reagieren; das Gefälle bleibt noch zu groß, als daß die beginnende Stauung den Fluß zum Kentern zwingen könnte. Er kämpft noch lange um die Oberhand und unterliegt erst um die Zeit der höchsten Flut. — Die Zeit, während welcher der Fluß in umgekehrter Richtung fließt, ist um so kürzer, je weiter vom Meer: in einer gewissen Entfernung von der Mündung reduziert sich diese Zeit auf Null*).

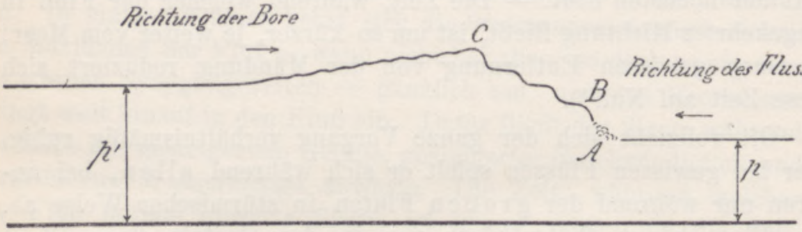
Oft vollzieht sich der ganze Vorgang verhältnismäßig ruhig, aber bei gewissen Flüssen spielt er sich während allen, bei anderen nur während der großen Fluten in stürmischer Weise ab. Die Flut dringt flußaufwärts vor in der Gestalt einer Übertragungswelle, mit Knall und Getöse. Der hintere Abhang der Welle ist flach, aber der vordere wird so abschüssig, daß das Wasser vom Kamm der Welle mit Getöse und unter Schaumbildung herunterfällt. Das ist die sogenannte „Bore“, in Frankreich *„la barre“* oder *„le mascaret“*, beim Amazonenfluß *„Pororoca“* (knallendes Wasser) genannt. Die Wasseroberfläche hinter der Bore ist höher als vorn, so daß für einen Zuschauer, der vom Lande nach dem Meere schaut, die kommende Bore als eine bewegliche, an den Ufern und in der Stromachse etwas zurückgebogene Wand erscheint. Vor der Bore, wo das Flußwasser noch ruhig abwärts strömt, ist die Wasseroberfläche glatt, hinter der Bore uneben und wellig. Der Querschnitt der Bore hat das in Fig. 48 schematisch dargestellte Aussehen.

Die Bore und ihre Begleiterscheinung: das Kentern des Stromes, ist für Schiffe gefährlich. Am großartigsten ist die Bore *(Pororoca)* im Amazonenfluß, wo sie zuweilen eine Höhe von 5 m erreicht. Der *Mascaret* in der Seine bei Quilleboeuf hat bis 3 m

*) Wir erinnern daran, daß die besprochene Erscheinung nur bei Flüssen, die in Meere mit starken Gezeiten münden, auftritt. Bei reißenden Strömen kommt sie gar nicht vor.

Höhe, er schreitet mit einer Geschwindigkeit von 8 m pro Sekunde fort. Im Fluß Petitcodiac, der in die Fundy-Bai mündet, hat die Bore bei Moncton (24 km von der Mündung) eine Höhe von 3 m*), aber auf die steile Vorderwand (in der Figur von *A* bis *B*) kommt nur 1 m, die übrigen 2 m kommen auf den weniger steilen, terrassenförmigen Abhang vom Wellenkamm bei *C* bis zum Oberrand der Steilwand (bei *B*). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bore im Petitcodiac beträgt ungefähr 3,8 m pro Sekunde**). Eine große Bore ist auch aus dem chinesischen Flusse Tsien-Tang-Kiang bekannt.

Fig. 48.



Je weiter flußabwärts, desto schwächer und niedriger ist die Bore. Im Amazonenfluß dringt sie angeblich einige hundert Kilometer weit von der Mündung aus vor, aber dies scheint ein Ausnahmefall zu sein. Gewöhnlich berichtet man nur von zwanzig, dreißig Kilometern. In Petitcodiac bildet sie sich bei Stony Creek, 13 km weit von der Mündung, und geht bis Salisbury Junction, 34 km oberhalb Stony Creek. Es ist sonst eine allgemeine Regel, daß die Bore nicht an der Mündung selbst, sondern etwas weiter hinauf, nämlich dort, wo das Flußbett sich verengt und seichter wird, entsteht. Bekannterweise haben die Flüsse, welche in ein Meer mit Gezeiten münden, trompetenartig erweiterte Mündungen. Die Bore bildet sich nicht in der erweiterten Mündung *(Ästuar)*, sondern erst dort, wo das Ästuar in das normale Flußbett übergeht. Angeblich tragen unterseeische, während der Ebbe bloßgelegte Sandbänke im Ästuar zur Bildung der Bore bei, falls sie nahe am Eingang in das Flußbett liegen.

---

*) Unter der Höhe der Bore versteht man die Höhe vom Fuße der Vorderwand (bei *A*) bis zum Wellenkamm (bei *C*).

**) Nach G. H. Darwin, The Bore at Moncton. Nature, Bd. LX (1899), S. 161 bis 163. Darwin schöpfte aus W. Bell-Dawson.

Comoy, der sich viel damit beschäftigt hat, behauptet, daß die Bore mit der Zeit abnimmt und verschwindet. Auf Grund alter Chroniken und Dokumente hat er sich überzeugt, daß die Bore noch im Mittelalter in einigen französischen Flüssen, in denen heute keine Spur mehr davon zu finden ist, existierte, in anderen wieder war sie ehemals gewiß größer und stärker als heute. Aber umgekehrt scheint die Bore heute in gewissen Flüssen stärker zu sein als vor Jahren: es ist sogar nicht ausgeschlossen, daß sie heute Flüsse, in denen man sie vor einigen hundert Jahren gar nicht kannte, heimsucht.

Die relativ geringe Lebensdauer der Bore erklärt sich durch ihre Heftigkeit. Es ist eine stürmische Welle mit starken Strömungen, welche das Flußbett stark aufwühlt und auswäscht*) und dadurch ihre eigenen Existenzbedingungen zerstört. Schwieriger ist die Erklärung der Neuentstehung einer Bore. Es ist zweifelhaft, ob sie, sozusagen spontan, durch die Tätigkeit des Flusses selbst entstehen kann. Viel wahrscheinlicher ist die Vermutung, daß äußere, vom Flusse unabhängige Ursachen einen Anlaß zur Entstehung der Bore geben. Es ist wohl möglich, daß das Meer durch Umlagerung der Sandbänke im Ästuar, durch Verlagern des Eingangs in das Flußbett usw. günstige Vorbedingungen für die Entstehung einer Bore schafft. Doch mangels einer exakten Theorie der Bore muß man sich auf Vermutungen beschränken.

Die Bore gehört gewiß zu Übertragungswellen, aber die Theorie des achten Kapitels ist nicht imstande, das Wichtigste, die so charakteristische Diskontinuität in der Front der Bore, zu erklären. — Dank dieser Diskontinuität gestaltet sich die mathematische Theorie der Bore zu einer schwierigen Aufgabe. Die Abhandlung Lord Rayleighs**) umgeht diese Schwierigkeit: unter Anwendung einer ähnlichen Methode wie in der Theorie des Zusammenstoßes leitet Rayleigh allgemeine Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten und Tiefen ab. Er findet für die Geschwindigkeit der Bore den Ausdruck:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} g (p + p') \frac{p'}{p}}$$

*) Wovon das stark getrübte, schlammige Wasser der Bore ein beredtes Zeugnis ablegt.

**) Lord Rayleigh, Note on Tidal Bores. Nature, Bd. 79 (1908), S. 267 bis 268. Wörtlich dasselbe in Proceedings Roy. Soc. 1908.

und für die Geschwindigkeit der Strömung hinter der Bore den Ausdruck:

$$\sqrt{{}^1/_2 g(p+p')\frac{p'}{p}} - \sqrt{{}^1/_2 g(p+p')\frac{p}{p'}},$$

wo g, wie üblich, die Beschleunigung der Schwerkraft, p*) die Tiefe des Wassers vor der Bore, p' die Tiefe hinter der Bore (wobei $p' > p$) bedeutet.

In der Abhandlung Rayleighs fehlt es nicht an vereinfachenden Annahmen: die Geschwindigkeit des Wassers vor der Bore ist Null, so daß die Lösung sich eigentlich nur auf die Fortpflanzung der Bore in stehendem Wasser bezieht. Rayleigh parallelisiert die Bore — wohl mit Recht — mit der Brandung.

Im dritten Bande seiner Vorlesungen über die Himmelsmechanik gibt Poincaré**) eine mathematische Theorie der Bore, welche wesentlich im folgenden besteht. Bekanntlich sind die Gezeiten in Flüssen nicht selbständige, es sind Meeresgezeiten, die sich im Fluß als progressive Wellen fortpflanzen. Nun ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flut (des Wellenkammes) wegen der größeren Wassertiefe***) größer als diejenige der Ebbe (des Wellentales). Infolgedessen wird der Querschnitt der Gezeitenwelle im Fluß asymmetrisch. Ebenso wie bei der Brandung wird der vordere Abhang immer steiler als der hintere, bis von einem gewissen Punkte ab die Welle vorn überkippt. Die fortschreitende Umkippungsstelle bildet die Bore.

Als eine mit den Gezeiten eng verknüpfte Erscheinung kehrt die Bore regelmäßig wieder. Man kann die Stunde ihrer Ankunft und ihre Höhe voraussagen.

Dieselben Kräfte, welche in den Meeren Gezeiten hervorrufen, wirken auch auf die Erde und das Luftmeer ein. Da die Erde kein absolut starrer Körper ist, so muß sie sich unter der Wirkung der fluterzeugenden Kräfte periodisch deformieren. Es müssen außer den ozeanischen auch irdische Gezeiten existieren. Von diesen Gezeiten war schon die Rede im vierten Kapitel; hier wollen wir nur hervorheben, daß seit den Untersuchungen Heckers irdische Gezeiten als experimentell nachgewiesen zu betrachten sind.

---

*) Vergl. Fig. 48.

**) Poincaré, a. a. O. S. 422 u. ff.

***) Vergl. achtes Kapitel, § 2.

Es ist ebenfalls ganz sicher, daß Gezeiten auch im Luftmeer vorhanden sind; aber am Grunde des Luftmeeres, wo wir Menschen uns befinden, können sich die Gezeiten nur durch sehr geringe periodische Änderungen des Luftdruckes äußern, die durch andere viel bedeutendere Druckvariationen ganz verdeckt werden.

Elftes Kapitel.

Strömungen.

§ 1. Geschwindigkeit und Dimensionen der Strömungen.

Während bei der Wellenbewegung die Form der Bewegung fortschreitet und die Teilchen um ihre Ruhelagen schwingen, führt eine Strömung die Wasserteilchen von einem Orte zum andern. Dank den Strömungen kann ein Wasserteilchen eine Reise um die Welt machen.

Die Geschwindigkeit der Strömung erreicht nie das Maß der Windgeschwindigkeit. Die größte, ganz außergewöhnliche Geschwindigkeit des Floridastromes während der Winterzeit erreicht 120 Seemeilen*) in 24 Stunden, was ungefähr 2,57 m pro Sekunde entspricht. Die deutsche „Valdivia"-Expedition fand einmal im Agulhasstrome (südlich von Afrika) eine Geschwindigkeit von 3,7 Seemeilen pro Stunde, d. h. etwa 1,9 m pro Sekunde. Zum Vergleich wollen wir anführen, daß die Geschwindigkeit der Donau bei Wien bei hohem Wasserstande auch etwa 2 m pro Sekunde

*) Die Länge einer Seemeile in Metern kann nicht so genau angegeben werden, wie etwa die Länge einer englischen Meile, denn sie hängt von den angenommenen Dimensionen der Erde ab. Die in der deutschen, französischen und in anderen Marinen gebrauchte Seemeile ist als $^1/_{60}$ eines mittleren Meridiangrades definiert. Da den meisten Tafeln die Erddimensionen nach Bessel zugrunde gelegt sind, so nimmt man die Länge eines Meridianquadranten zu 10000855,76 m an, was für eine Seemeile 1852,01 m ergibt. Deswegen wird sehr oft die runde Zahl 1852 m angegeben. Die englische *„geographical mile"* oder *„knot"* ist als $^1/_{60}$ eines Äquatorgrades definiert. Der „Almanach der k. u. k. Kriegsmarine für 1903" gibt als Äquivalent des *Knots* 1855,1 m an, wobei offenbar eine etwas kleinere äquatoriale Halbachse als diejenige Clarkes der Umrechnung zugrunde gelegt wurde. Derselbe Almanach gibt für die englische *„Nautical mile"* oder *„Admiralty knot"* 1853,1 m an.

beträgt. Das sind aber Ausnahmen; in der Regel ist die Geschwindigkeit der Meeresströmungen bedeutend kleiner; oft ist es schwer, die Strömung zu erkennen.

Die Horizontalabmessungen der Meeresströmungen sind sehr groß: die Breite ist nach Hunderten von Kilometern zu rechnen, die Länge erstreckt sich von einer Seite eines Ozeans zur anderen. Genaue Abmessungen können jedoch nicht gegeben werden, da bestimmte Grenzen fehlen. Mit Ausnahme des mächtigen Floridastromes reichen die Meeresströmungen nicht besonders tief. Schon im siebenten Kapitel, gelegentlich der Tiefentemperaturen, haben wir hervorgehoben, daß die Oberflächenströmungen nur bis zu ein paar Hundert Meter Tiefe reichen. Dafür haben die Tiefen ihre eigenen Strömungen.

Die Geschwindigkeit nimmt in der Regel von der Oberfläche an mit wachsender Tiefe ab. Es kann natürlich vorkommen, daß das Maximum der Geschwindigkeit nicht in der Oberfläche, sondern etwas tiefer erreicht wird — besonders wenn widrige Winde die Bewegung der Oberflächenschicht hemmen.

§ 2. Strömungen infolge von Dichtedifferenzen.

Schon im siebenten Kapitel wurden Dichteunterschiede zwischen dem äquatorialen und dem polaren Tiefenwasser als Ursache der Tiefenströmungen angegeben. Im allgemeinen sind die Dichteunterschiede in den großen Ozeanen gering; der Einfluß des Salzgehaltes wirkt sehr oft dem Einfluß der Temperatur entgegen. Die übrig bleibenden kleinen Differenzen reichen jedoch hin, um nicht nur auf Tiefen-, sondern auch auf Oberflächenströmungen einen namhaften Einfluß auszuüben. Sehr oft wird die Wirkung der Dichteunterschiede durch die Wirkung des Windes verdeckt; aber durch eine genaue Analyse der einschlägigen Verhältnisse kann man jene Wirkung entdecken.

Man kann im allgemeinen sagen, daß unter den ozeanischen Strömungen die Polarströmungen am meisten von Dichteunterschieden beeinflußt werden. Nach O. Petersson*) hat das von der Eisschmelze herrührende Wasser einen Salzgehalt von nur 14‰. Es hat bei 0° eine Dichte von 1,01123, während das atlantische

*) O. Petersson, Über den Einfluß der Eisschmelze auf die ozeanische Zirkulation. Öfversigt af k. Vetenskaps Akad. Förhandlingar, Ar 1899, S. 148 Stockholm 1900.

Wasser mit 35‰ Salzgehalt bei derselben Temperatur eine Dichte von 1,02813 besitzt. Es könnte auf dem atlantischen auch dann noch schwimmen, wenn dies letztere um volle 60° C wärmer wäre. Angesichts dessen ist es selbstverständlich, daß in polaren Gebieten kalte, nach niedrigeren Breiten gerichtete Oberflächenströmungen entstehen. Durch Mischung und Diffusion wird der Salzgehalt unterwegs erhöht; aber in seiner Heimat — in polaren Meeren — ist dieses kalte Oberflächenwasser so leicht, daß es nicht zu Boden sinkt, es schwimmt auf wärmerem Wasser. Unter dem wärmeren Wasser befindet sich wieder kaltes Wasser, welches aber von anderer Herkunft als das Oberflächenwasser ist: es rührt von dem starksalzigen, schweren Wasser her, welches nach der Ausscheidung des Eises übrig bleibt. Drastisch könnte man also sagen, daß das kalte Tiefenwasser von der Eisbildung, das kalte Oberflächenwasser von der Eisschmelze herstammt.

Ausschließlich oder doch hauptsächlich durch Dichtedifferenzen unterhaltene Strömungen sieht man in Meerengen, welche kleinere Meere mit größeren oder mit den Ozeanen verbinden.

Das Wasser des Roten Meeres ist sehr salzig. Im hiesigen heißen Trockenklima sollen nach einigen Angaben bis 4 m (?) Wasser jährlich verdampfen. Um den Verlust durch Verdampfung wettzumachen, muß dem Roten Meer Wasser aus anderen Meeren zugeführt werden. Der Zufluß aus dem Mittelmeer ist ohne Bedeutung, denn einerseits ist der Suezkanal zu eng und zu seicht — er hat nur 8,5 m Tiefe und 20 m Sohlenbreite — andererseits führt er durch die sogenannten Bitterseen, deren Wasser noch salziger als dasjenige des Roten Meeres ist. Der Zufluß aus dem Mittelmeer hat so wenig Einfluß auf den Salzgehalt im Roten Meer, daß die österreichische Pola-Expedition*) das salzigste Wasser im Nordwinkel des Golfes von Suez gefunden hat. Der Salzgehalt belief sich hier auf 42,7‰, was einer Dichte von 1,03263 bei 17,5° C entspricht.

Das Rote Meer wird beinahe ausschließlich durch den Zufluß aus dem Indischen Ozean genährt. Die Meeresstraße Bab-el-Mandeb wird durch die Insel Perim in zwei Kanäle geteilt. Der östliche Kanal ist seicht (29 m tief) und eng (ungefähr 2 Seemeilen = 3,6 km breit), der westliche hat bis 300 m Tiefe und bis 12 See-

*) J. Luksch, Sitzungsberichte der math.-naturw. Kl. der k. Akad. der Wiss. Wien, Bd. 105 I und 107 I.

meilen (22 km) Breite. Oben, hauptsächlich durch den westlichen Kanal, d. h. zwischen der Insel Perim und der afrikanischen Küste, fließt das leichtere Wasser des Indischen Ozeans nach dem Roten Meere, unten führt die entgegengesetzte Strömung das dichtere Wasser des Roten Meeres nach dem Indischen Ozean. Es ist schwer, die Grenze zwischen den beiden Strömungen anzugeben, aber soweit man aus den Beobachtungen urteilen kann, dürfte sie sich an verschiedenen Orten zwischen 100 und 180 m Tiefe halten.

Die Strömungen im Bosporus und in der Gibraltarstraße beschreibt Makarow*) in folgender Weise. Ein Liter Wasser aus dem Schwarzen Meere enthält etwa die Hälfte des Salzes, das in einem Liter Mittelmeerwasser gelöst ist; das Tiefenwasser in der Marmara ist nahezu identisch mit dem Wasser des Ägäischen Meeres, während in der Oberfläche bis, sagen wir, 10 *Sashen***) Tiefe der Salzgehalt zwischen dem Salzgehalte des Schwarzen- und des Mittelmeers liegt. Im Bosporus existieren zwei Strömungen: eine obere, welche vom Schwarzen Meer nach der Marmara führt, und eine untere, welche sich in der entgegengesetzten Richtung fortbewegt. Diese Strömungen variieren mit der Jahreszeit; speziell wird die Strömung aus dem Schwarzen Meer nach dem Donauhochwasser stärker, aber durchschnittlich können sie als stationär angesehen werden.

Nach J. Spindler***) befindet sich die untere Grenze der oberen Strömung im Bosporus zwischen Konstantinopel und Skutari in einer Tiefe von 9 Faden (16,5 m), in der Marmara zwischen 5 und 7 Faden (9 bis 13 m); am tiefsten, nämlich in 11 bis 12 Faden (20 bis 22 m), befindet sich die Grenze der oberen

---

*) Makarow, On some oceanographic Problems. Proc. R. Soc. Edinburgh, Bd. XXII, S. 391 bis 409. Das ist derselbe Admiral Makarow, der 1904 vor Port Arthur mit seinem Flaggenschiff Petropawlowsk zugrunde ging.

**) Der russische marine *Sashen* ist dem englischen „*Fathom*" gleich. Der *Fathom* hat zwei *Yards* zu je drei engl. Fuß. Nach den Untersuchungen von J. R. Benoît (Determination du rapport du Yard au Mètre. Travaux et mémoires du Bureau intern. des poids et mesures, Bd. XII [1902], S. 24) ist:

ein *Yard* = 0,9143992 m.

Daraus folgt: 1 engl. Fuß = 0,3047997 m, 1 *Fathom* = 1,8287984 m. Man kann somit annehmen: 1 engl. Fuß = 0,3048 m, 1 *Yard* = 0,9144 m, 1 *Fathom* = 1,8288 m.

***) J. Spindler, Die Marmara. Denkschriften der K. russ. Geogr. Gesellschaft, Bd. XXXIII, Nr. 2 (russ.).

Strömung in der Bai von Gallipoli. Nach Makarow ist die Tiefe der Grenzfläche etwas größer, aber er hat 1882, Spindler 1894 gemessen.

Infolge der geringeren Dichte muß der Spiegel des Schwarzen Meeres etwas höher als der Spiegel des Marmarameeres liegen. Makarow berechnet die Wasserstandsdifferenz im Juli 1882 zu 1,396 engl. Fuß, d. h. zu 42,5 cm. Die Einzelheiten der Rechnungen teilt er nicht mit, aber aus dem Zusammenhange kann man schließen, daß eine ähnliche Methode, wie bei Mohn (vergl. weiter § 5) verwendet wurde. Jedenfalls wurde die Frage als eine Frage hydrostatischen Gleichgewichtes aufgefaßt, obgleich das Problem eigentlich dynamisch ist. Aus diesem und aus anderen Gründen darf dieser Zahl keine besondere Bedeutung zugeschrieben werden, nur die Größenordnung der Wasserstandsdifferenz wird sie schon richtig angeben.

Die Geschwindigkeit hat Makarow nahezu in der Mitte des Bosporus am Orte der Schwelle gemessen. Die Tiefe maß hier 23 Faden (42 m). In der Oberfläche hatte die obere, aus dem Schwarzen Meer nach der Marmara gerichtete Strömung eine Geschwindigkeit von über 4 engl. Fuß (1,22 m) pro Sekunde. Mit der Tiefe nahm die Geschwindigkeit beinahe gleichmäßig ab, erst in 11 Faden (20 m) war sie Null, hier also befand sich die Grenze des oberen Stromes. Die Geschwindigkeit der unteren Strömung wuchs anfangs rasch, dann langsamer. Das Maximum befand sich in 13 Faden (24 m) Tiefe, es belief sich auf 2,6 engl. Fuß (0,8 m) pro Sekunde. Darunter nahm die Geschwindigkeit gleichmäßig ab bis zu 22 Faden (40 m), wo sie sich noch auf 1,3 engl. Fuß (0,40 m) pro Sekunde belief. Über 22 Faden hinaus hat man die Geschwindigkeit nicht gemessen.

Die Dichte in der oberen Strömung, auf die Temperatur von 17,5° C reduziert, war bis 10 Faden (18,3 m) Tiefe nahezu konstant und belief sich auf ungefähr 1,015. In der Grenzschicht zwischen den beiden Strömungen — d. i. zwischen 10 und 14 Faden (18,3 und 25,6 m) — wuchs sie, offenbar dank der Diffusion, ziemlich rasch. Bei 14 Faden (25,6 m) — d. i. schon in der unteren Strömung — war die Dichte 1,027, weiter unten wuchs sie langsam bis zum Grunde, wo sie ungefähr 1,031 erreichte.

Makarow hebt hervor, daß die untere Strömung im Bosporus mehr Analogie mit einem Flusse bietet als die obere. In der Tat

erinnert die Geschwindigkeitsverteilung in der unteren Strömung mehr an das vertikale Geschwindigkeitsgesetz der Flüsse als die Geschwindigkeitsverteilung im oberen Strome. Er sucht eine Erklärung dafür in der Tatsache, daß zwar die Oberfläche der oberen Strömung ein Gefälle in der Richtung der Bewegung (vom Schwarzen- zum Marmarameer) hat, aber die untere Grenze sich vom Schwarzen Meer zur Marmara hebt, während in den Flüssen — trotz der Unebenheit des Flußbettes — doch die Sohle durchschnittlich in der Richtung des Stromes abfällt.

In der Gibraltarstraße fließt oben das leichtere Wasser des Atlantischen Ozeans nach dem Mittelmeer, unten das schwerere Mittelmeerwasser zum Ozean. — Makarow berechnet, daß die Oberfläche des Ozeans um 0,54 Fuß (15,5 cm) höher steht als die Oberfläche des Mittelmeeres. Was von solchen Rechnungen zu halten ist, haben wir gelegentlich des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen- und dem Marmarameer bereits gesagt. Jedenfalls ist die von Makarow angegebene Zahl mit derjenigen, welche sich aus dem französischen Präzisionsnivellement*) ergeben hat, vergleichbar.

Die Geschwindigkeit der Strömung in der Gibraltarstraße unterscheidet sich wenig von der Geschwindigkeit im Bosporus: an der Oberfläche beträgt sie 3,7 bis 5,5 km pro Stunde, d. h. 1 bis 1,5 m pro Sekunde; sie variiert periodisch mit den Gezeiten und aperiodisch mit den Winden. Die Tiefe der Schwelle erreicht keine 400 m. Nahezu bis zur halben Tiefe der Schwelle reicht die Oberströmung, darunter herrscht die entgegengesetzte Strömung. Den Salzgehalt des atlantischen Wassers an der Oberfläche kann man auf 36,6 ‰ (?), den Salzgehalt des Mittelmeerwassers im Horizonte der Schwelle auf 39,4 ‰ (?) schätzen. Als mittlere Temperatur des Oberflächenwassers kann man 20° und des Wassers im Horizont der Schwelle 12,8° annehmen. Daraus ergibt sich auf Grund der Tabelle IV auf S. 263 für das erste Wasser eine Dichte von 1,0260, für das zweite von 1,0299.

In breiten Verbindungsstraßen zwischen Meeren von demselben Salzgehalte findet man keine übereinander gelagerten, entgegengesetzten Strömungen, dafür aber sind entgegengesetzte, nebeneinander herfließende Strömungen vorhanden. Dabei hält sich eine Strömung an ein Ufer, die andere an das andere Ufer.

*) Vergl. S. 6.

Solche Verhältnisse herrschen in der La Pérouse-Straße zwischen Yézo und Sachalin, in der Fu-Kien-Straße zwischen China und Formosa, im Kattegat zwischen Jütland und Schweden usw.

§ 3. Der Wind als Ursache der Strömungen.

Die Erfahrung lehrt, daß der Wind neben den Wellen auch eine Strömung erzeugt. Dank der Reibung wird die fortschreitende Bewegung der Luft dem Wasser mitgeteilt. An Küsten, welche quer zur Richtung der Strömung liegen, wird das Wasser gestaut und die Meeresoberfläche gehoben. Ein langer und starker Wind könnte das Wasserniveau sehr beträchtlich heben; aber bald bildet sich eine untere Kompensationsströmung, welche das gestaute Wasser wieder dem Meere zuführt. Ebenso drängt ein starker, vom Lande nach dem Meer zu wehender Wind das Wasser von der Küste weg und erniedrigt das Meeresniveau; aber auch hier tritt eine untere, entgegengesetzte Strömung auf, welche das Wasser zur Küste zurückführt. Beidemal erklären sich die Kompensationsströmungen durch Druckdifferenzen: im ersten Fall erzeugt die Wasserstauung an der Küste einen relativen Drucküberschuß, im zweiten ist das Wasserdefizit von einem relativen Druckdefizit begleitet: beidemal strebt die Kompensationsströmung, die Druckdifferenzen zwischen Küstenwasser und offenem Meer auszugleichen.

Im seichten Wasser wird die Bildung einer Kompensationsströmung durch Mangel an Raum und durch den gesteigerten Einfluß der Reibung am Grunde gehemmt. Deswegen erreicht die Hebung des mittleren Wasserstandes besonders große Beträge an Flachküsten. Drastische Beispiele hierfür kann man den an dänischen Küsten gesammelten Erfahrungen entnehmen. Der orkanartige Sturm*), der am 25. und 26. Dezember 1902 über Dänemark wütete, trieb so gewaltige Wassermengen in das Kattegat hinein, daß die nördlichen Gebiete der Insel Seeland unter Wasser standen. Die Wasserhöhe stieg im Kattegat von Norden nach Süden an. In Frederikshavn stieg der Wasserstand bis 111 cm über die mittlere Höhe; in Aarhus lag die Höhe der Oberfläche des Meeres 121 cm über dem normalen Werte. In Kopenhagen hob sich der Wasserstand bis 157 cm über den Normalwert. Während der größten

*) A. Paulsen, Die dänischen Wasserstandsmessungen ... Hann-Band der Meteor. Zeitschr. (1906), S. 108.

Stärke des Sturmes war der Wasserstand an den an der Ostsee liegenden Küstenstrichen außerordentlich niedrig. Bei der 30 km südwestlich von Kopenhagen liegenden Stadt Kjöge fiel der Wasserstand bis 300 cm unter die normale Höhe, und in Gjedser an der Südspitze der Insel Falster um 150 cm.

A. Colding*) hat eine Formel zur Berechnung der Niveauhebung $\triangle h$ durch den Wind gegeben, welche, ins Quadrat erhoben und aus dänischen Fuß in Meter umgerechnet, folgenden Wert hat:

$$\triangle h = 0{,}000000479 \frac{l}{p} v^2,$$

wo l die Länge der Strecke, auf welcher das Wasser gestaut ist, p die Tiefe, v die Windgeschwindigkeit (alles in Metern und Sek.) bedeutet. Die Formel Coldings gründet sich auf Beobachtungen über den Wasserstand an den dänischen Küsten während der denkwürdigen Sturmflut vom 12. bis 14. November 1872. Sie ist natürlich rein empirisch, und als solche stellt sie nur in gedrungener Form eine Art Resumé aus den genannten Beobachtungen dar. An einer anderen Küste, unter anderen Verhältnissen angewandt, wird sie ein nur der Größenordnung nach richtiges Resultat liefern; mehr darf man von ihr nicht verlangen.

Winde, die vom Lande nach dem Meer zu wehen, haben an den europäischen Küsten eine besondere Bedeutung für den Fischfang, sie drängen das wärmere Oberflächenwasser von der Küste weg; an ihre Stelle bringt die Kompensationsströmung kälteres Wasser aus tieferen Schichten und mit ihm mehrere feinere Fischgattungen, die sich in kälterem Wasser aufhalten. Aber das Auftauchen des kälteren Wassers an den europäischen Küsten ist eher Ausnahme als Regel, da hier westliche auflandige Winde vorherrschen; in der Tropenzone dagegen bildet das Auftauchen des kalten Wassers an den Westküsten der Kontinente die Regel, während das warme Wasser sich an den Ostküsten der Festländer sammelt. Beide Erscheinungen stehen in Zusammenhang mit der allgemeinen ozeanischen und atmosphärischen Zirkulation, indem die Passate von Osten nach Westen gerichtete Strömungen erzeugen, welche warmes Wasser in dieser Richtung fortführen und zu Kompensationsströmungen Anlaß geben.

---

*) A. Colding, Zeitschrift der Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, Bd. XVII (1882), S. 78.

In allen drei Ozeanen kann man zum Äquator symmetrische Oberflächenzirkulationen unterscheiden. Auf der Nordhalbkugel folgt die Zirkulation der Richtung des Uhrzeigers, auf der Südhalbkugel dreht sie sich in der entgegengesetzten Richtung; zwischen beide Zirkulationen schiebt sich am Äquator eine rückläufige Kompensationsströmung. Die genannten Stromsysteme erstrecken sich bis in die mittleren Breiten, wo sie Ausläufer nach den höheren Breiten aussenden. Diese Verzweigungen und andere in höheren Breiten herrschenden Strömungen sind weniger symmetrisch als die Strömungen der niedrigeren Breiten, wahrscheinlich wegen der Asymmetrie der Ozeane in hohen Breiten. Es fehlt an Symmetrie sowohl zwischen den Meeren beider Halbkugeln als auch zwischen den Ozeanen auf ein und derselben Halbkugel. Übrigens besteht im Indischen Ozean nur die südliche Zirkulation: aus Mangel an Raum konnte sich die nördliche nicht entwickeln.

In beiden Stromsystemen — dem nördlichen wie dem südlichen — steht der äquatornähere, von Osten nach Westen gerichtete Ast unzweifelhaft unter dem Einfluß der Passate. Es ist wohl wahr, daß die Richtung des Passats mit der Richtung der Strömung einen Winkel bildet — auf der Nordhemisphäre weht z. B. der Passat von Nordosten nach Südwesten, während die Strömung beinahe genau von Osten nach Westen gerichtet ist — aber man darf nicht vergessen, daß auf der Nordhemisphäre die Rotation der Erde alle Strömungen nach rechts ablenkt. Dazu gesellt sich noch der Einfluß der Dichtedifferenzen, die, sich selbst überlassen, eine Strömung in der Südnordrichtung (d. h. längs der Meridiane) erzeugt hätten. Es ist bekannt, daß infolge starker Regengüsse das Oberflächenwasser in der Äquatorialzone salzärmer ist als das Oberflächenwasser unter den Tropen, wo bei großer Trockenheit die Verdunstung eine stärkere Konzentration verursacht. So setzt sich eine von Süden nach Norden gerichtete Strömung mit einer von Nordosten nach Südwesten gerichteten — unter gleichzeitigem Einfluß der Erdrotation und anderer minder wichtigen Ursachen — zu einem von Osten nach Westen gerichteten Strom zusammen. Mutatis mutandis kann man dasselbe von der Passatströmung der Südhalbkugel sagen.

Die beiden polnäheren, in mittleren Breiten liegenden, von Westen nach Osten gerichteten Äste der Stromsysteme haben beinahe dieselbe Richtung, wie die in denselben Breiten herrschenden Winde. Besonders konstant und stark sind die westlichen Winde (die „braven Westwinde"), welche auf der Südhemisphäre in mitt-

leren Breiten wehen. Auch im Nordatlantischen Ozean ist das Vorherrschen westlicher und südwestlicher Winde in mittleren Breiten sehr ausgeprägt, nur im Nordpacifischen Ozean weht der Sommermonsun in entgegengesetzter Richtung; aber im Jahresmittel behalten die Winde mit der westlichen Komponente doch die Oberhand.

So erkennt man selbst an großen Stromsystemen den Einfluß der Winde, obgleich hier auch andere Ursachen gewiß mitwirken. Was die temporären, variabeln — und infolgedessen seichten — Strömungen anbetrifft, so sind sie gewiß in einer überwiegenden Mehrzahl der Fälle durch den Wind erzeugt.

Die Geschwindigkeit der Winddrift ist gewöhnlich am größten an der Oberfläche, d. h. in unmittelbarer Nähe desjenigen Mediums, aus welchem die Strömung ihre Energie schöpft. Wohlverstanden hat diese Regel zahlreiche Ausnahmen, die aber nicht gegen, sondern für den Einfluß des Windes sprechen. Wenn z. B. während einer gewissen Zeit der Wind in eine entgegengesetzte Richtung umschlägt, so wird das Oberflächenwasser aufgehalten, und das Maximum der Geschwindigkeit verschiebt sich von der Oberfläche nach einer etwas tieferen Schicht. Unterhalb des Maximums nimmt die Geschwindigkeit ab und wird in Tiefen von einigen hundert Metern unmeßbar; nur eine so ausnahmsweise mächtige Strömung wie der Floridastrom — der übrigens nicht dem Winde allein seine Existenz verdankt — reicht tiefer.

Selbst an der Oberfläche bleibt die Geschwindigkeit der Strömung hinter der Geschwindigkeit des Windes zurück, nicht bloß bei erst ansetzendem, sondern auch bei langandauerndem Winde. Nach Cialdi soll das Verhältnis zwischen Strom und Windgeschwindigkeit dem umgekehrten Verhältnis aus den Quadratwurzeln der Dichten gleich sein. Das Verhältnis der Dichte der Luft im Meeresniveau zur Dichte des destillierten Wassers ist 0,001293. Die Quadratwurzel aus dieser Zahl ist 0,03596. Auf Grund der englischen „*Charts of Meteorological Data for Square 3 and for nine ten degrees Squares*“ leitete H. Mohn das Verhältnis 0,0322 der Strom- zur Windgeschwindigkeit ab, welchen Wert G. Wegemann mit Krümmels Reduktionszahlen für die Beaufortsche Skala auf 0,0466 erhöht. Eine einleuchtende theoretische Ursache dafür, daß das Verhältnis der Geschwindigkeiten dem umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Dichten gleich sei, gibt es nicht. In Abwesenheit der Wellenbewegung sollte bei lange

genug andauerndem Winde angenähert ein Ausgleich der beiden Geschwindigkeiten in der Grenzfläche*) zwischen Luft und Wasser eintreten. Da aber der Wind außer der Strömung auch Wellen erzeugt, wird die Frage komplizierter, und die Theorie ist — wenigstens heute — unfähig, das erwähnte Verhältnis der Geschwindigkeiten vorauszusagen. Es bleibt somit nichts übrig, als sich der empirischen Werte zu bedienen.

§ 4. Der Einfluß der Erdrotation. Die Kraft von Coriolis.

Jede Bewegung auf der Erde wird von der Rotation beeinflußt. Um diesen Einfluß zu erforschen, betrachten wir Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes in bezug auf rechtwinklige, mit der Erde fortschreitende, aber an der Rotation nicht beteiligte Koordinatenachsen. Den Anfangspunkt der Koordinaten versetzen wir in den Erdschwerpunkt, von der z-Achse setzen wir voraus, daß sie mit der Rotationsachse zusammenfällt, die x- und die y-Achse können beliebig in der Äquatorebene orientiert sein. Hier werden wir voraussetzen, daß die positive x-Achse von der Papierebene auf uns zu gerichtet ist und die positive y-Achse von der x-Achse nach rechts weist. Die Bewegungsgleichungen schreiben sich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial x},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial z},\quad \ldots \quad 1$$

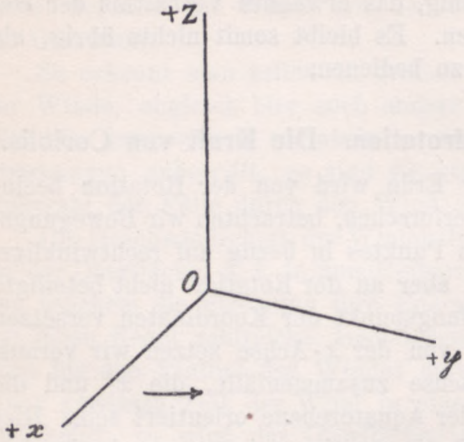
wo m die Masse, x, y, z die Koordinaten des in Bewegung begriffenen Punktes und V das Attraktionspotential bedeuten. In den rechtsseitigen Gliedern haben wir nur die Attraktion berücksichtigt, indem in geophysikalischen Aufgaben andere Kräfte selten in Betracht kommen. Dagegen kommt häufig noch eine Bedingung hinzu, etwa die, daß der Punkt sich auf einer gegebenen Fläche bewege. Dieselbe kann aber nachträglich von Fall zu Fall eingeführt werden.

Nehmen wir jetzt andere, mit der Erde rotierende Achsen, wobei die z-Achse mit der alten zusammenfallen soll, während die beiden übrigen zwar mit der Erde rotieren müssen, aber im übrigen in der Äquatorebene beliebig orientiert sein können. Wir setzen nur voraus, daß die relative Lage der x- und der y-Achse zueinander dieselbe ist wie die der alten. Wir bezeichnen die Winkelgeschwindigkeit der Erde mit ω, die neuen Koordinaten mit x', y', z'.

*) Die Geschwindigkeit der Luft dicht an der Wasseroberfläche ist gewiß geringer als die Windgeschwindigkeit. Das folgt aus den Methoden der Schätzung bzw. Messung der Windstärke.

(Fig. 49). Dann existieren bei einer Rotation von Westen nach Osten folgende Gleichungen zwischen den alten und den neuen Koordinaten:

Fig. 49.



$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \quad 2$$

Wir substituieren die Werte von x, y und z aus den Gleichungen 2 in die Gleichungen 1, multiplizieren die erste Gleichung 1 mit $\cos \omega t$, die zweite mit $\sin \omega t$ und addieren beide. Dann multiplizieren wir die erste Gleichung 1 mit $-\sin \omega t$, die zweite mit $+\cos \omega t$ und addieren wieder. Endlich setzen wir der Einfachheit wegen $m = 1$ und erhalten die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} - \omega^2 x' = \frac{\partial V}{\partial x'}$$
$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt} - \omega^2 y' = \frac{\partial V}{\partial y'}$$
$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z'}$$

Bei der Ableitung der rechtsseitigen Glieder haben wir die bekannte Eigenschaft der Potentialkräfte benutzt, bei allen Achsentransformationen Differentialquotienten des Potentials zu bleiben. Bekannterweise sind $\omega^2 x$ und $\omega^2 y$ Komponenten der Zentrifugalkraft. Sie haben auch ein Potential:

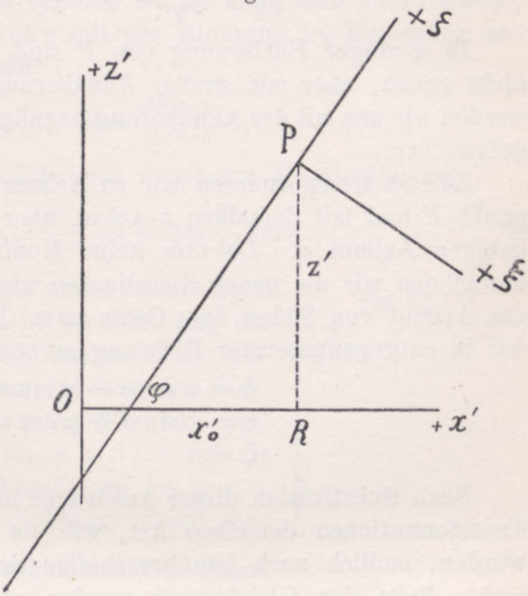
$$v = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Wir wollen noch das Potential der Schwerkraft $W = V + v$ einführen und die obigen Gleichungen in der Gestalt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial x'} \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial y'} \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial z'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Aber die Gestalt 3 ist nur in gewissen Aufgaben, z. B. in Aufgaben, die sich auf die allgemeine atmosphärische Zirkulation beziehen, bequem; zur Beschreibung lokaler Bewegungen eignen sich die Gleichungen 3 nicht. Wir werden die Gleichungen 3 in andere Koordinaten, deren Anfang sich in einem beliebigen Punkte P der Erde befindet, transformieren. Es sei φ die geographische Breite des Punktes P; die Vertikale dieses Punktes machen wir zur ξ-Achse (Fig. 50), wobei die positive Richtung nach dem Zenit weisen soll. Den Schnitt zwischen der Meridianebene und der Horizontalebene des Punktes P machen wir zur ξ-Achse, wobei die positive Richtung nach dem Südpunkt des Horizontes weisen soll. Endlich machen wir eine zu den beiden anderen rechtwinklige Gerade zur η-Achse und wählen die Richtung nach Osten als positiv. Da die Allgemeinheit der Ableitung dadurch nicht eingeschränkt wird, aber die Formeln wesentlich vereinfacht werden, nehmen wir an, daß die $z'x'$-Ebene der vorigen Koordinaten durch den Punkt P geht. Auf diese Weise werden die Ebene $z'x'$ im alten und die Ebene $\zeta\xi$ im neuen Koordinatensystem identisch, und die Beziehungen zwischen den x'-, y'-, z'- und ξ-, η- und ζ-Koordinaten werden:

Fig. 50.



$$\left.\begin{aligned} x' &= x_0' + \xi \sin\varphi + \zeta \cos\varphi \\ y' &= \eta \\ z' &= z_0' - \xi \cos\varphi + \zeta \sin\varphi \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots 4$$

wobei

$$x_0' = OR, \quad z_0' = PR.$$

Durch Substitution der Formeln 4 in 3 leitet man in ganz ähnlicher Weise, wie die Gleichungen 3 aus der Gleichung 1 abgeleitet wurden, die Gleichungen ab:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}\sin\varphi &= \frac{\partial W}{\partial\xi}\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}+2\omega\left(\frac{d\xi}{dt}\sin\varphi+\frac{d\zeta}{dt}\cos\varphi\right) &= \frac{\partial W}{\partial\eta}\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}-2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos\varphi &= \frac{\partial W}{\partial\zeta}\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\quad 5$$

Dank der getroffenen Wahl der Koordinatenachsen hat man im Punkte P genau

$$\frac{\partial W}{\partial\xi}=\frac{\partial W}{\partial\eta}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial\zeta}=-g.\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\quad 6$$

In geringer Entferuung von P sind die Gleichungen 6 zwar nicht genau, aber mit großer Annäherung erfüllt. Im Folgenden werden wir uns mit der Annäherung begnügen und die Gleichungen 6 gebrauchen.

Zuletzt transformieren wir zu Achsen mit demselben Anfangspunkt P und mit derselben z-Achse, aber mit der x-Achse im beliebigen Azimut α. Da nun keine Konfusion zu befürchten ist, bezeichnen wir die neuen Koordinaten wieder mit x, y, z, rechnen das Azimut von Süden über Osten usw. (im dritten Kapitel haben wir in entgegengesetzter Richtung gerechnet) und schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ \eta &= x\sin\alpha+y\cos\alpha\\ \zeta &= z\end{aligned}\right\}.\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\quad 7$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen 5, nach Transformationen derselben Art, wie sie schon früher verwendet wurden, endlich nach Hinüberschaffen der Glieder mit ω auf die rechte Seite der Gleichungen werden wir unter Benutzung der Gleichungen 6 bekommen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\left(\frac{dy}{dt}\sin\varphi-\frac{dz}{dt}\cos\varphi\sin\alpha\right)\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega\left(\frac{dx}{dt}\sin\varphi+\frac{dz}{dt}\cos\varphi\cos\alpha\right)\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 2\omega\cos\varphi\left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha+\frac{dy}{dt}\cos\alpha\right)-g\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\quad 8$$

Die Ausdrücke rechter Seite der Gleichungen 8 mit dem Koeffizienten 2ω sind die Komponenten der (scheinbaren) Kraft, in welcher sich der Einfluß der Erdrotation auf die Bewegung der Körper äußert. Diese Kraft wird zuweilen die Kraft von Coriolis

genannt, nach einem französischen Ingenieur und Mathematiker, der sich mit den Gesetzen der Bewegung der Körper auf der Erdoberfläche befaßte.

Wenn es sich um Meeres- oder Luftströmungen handelt, kann die vertikale Geschwindigkeit und Beschleunigung in den Komponenten der Corioliskraft vernachlässigt werden. Man kann somit

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

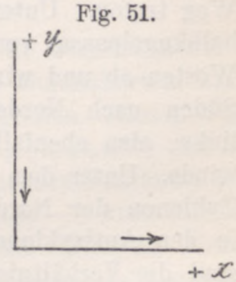
setzen und die dritte Gleichung 8 als unnötig*) beiseite lassen. Da weiter das Azimut α ganz beliebig ist, so kann man voraussetzen, daß die x-Achse momentan mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt; dann hat man:

$$\frac{dy}{dt} = 0, \text{ aber } \frac{d^2y}{dt^2} \gtrless 0,$$

und die beiden ersten Gleichungen 8 nehmen die Gestalt an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \frac{dx}{dt} \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

Fig. 51.



Aus diesen Gleichungen ersieht man sofort, daß bei horizontaler Bahn in der Richtung der Bewegung keine, wohl aber senkrecht zur Bewegungsrichtung und horizontal dazu eine Komponente der Corioliskraft wirkt (Fig. 51). Auf der Nordhalbkugel, wo $\sin\varphi > 0$, wirkt sie rechts; auf der Südhalbkugel, wo $\sin\varphi < 0$, links von der Bewegungsrichtung. Setzt man $\frac{dx}{dt} = u$, wo u die Geschwindigkeit bezeichnet, so kann man sagen, daß bei horizontaler Bewegung die Corioliskraft, auf die Masseneinheit bezogen, den absoluten Wert:

$$2\omega u \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

besitzt. Ferner kann man sagen, daß diese Kraft horizontal und senkrecht zur Bewegungsrichtung, aber auf der Nordhalbkugel rechts und auf der Südhalbkugel links wirkt.

*) Eigentlich muß man dann in der dritten Gleichung 8 rechter Seite noch einen Widerstand R hinzufügen, welcher den materiellen Punkt zwingt, in einer und derselben Horizontalebene zu verbleiben, und auf diese Weise die Wirkung der Schwerkraft neutralisiert. Erst nachher kann man die dritte Gleichung 8, als für sich und unabhängig von den übrigen befriedigt, beiseite lassen.

Die Corioliskraft ist sehr klein: es sei z. B. $u = 1$ m pro Sekunde, $\varphi = 50^0\ 3'\ 52''$ (Breite von Krakau). Da

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}00007292\ldots,$$

so wird die Corioliskraft nur etwa 0,000112 m pro Sek.^{2} betragen, das ist etwas mehr als 0,01 Dyne, während z. B. g ungefähr 980 Dynen beträgt. Aber die Horizontalkomponente der Corioliskraft wirkt in einer anderen Richtung als die Schwerkraft und hat nur mit Kräften derselben Größenordnung zu rivalisieren. Besonders äußert sich ihr Einfluß bei Bewegungen auf weitere Entfernungen, bei denen sie Zeit hat, die Bahnrichtung durch kleine kontinuierliche Ablenkungen um endliche große Winkel zu ändern.

Der Einfluß der Erdrotation auf die Luftströmungen ist noch deutlicher als der Einfluß auf die Meeresströmungen: erstens weil die Corioliskraft mit der Geschwindigkeit wächst, die Geschwindigkeit der Luftströmungen aber diejenige der Meeresströmungen bedeutend überflügelt, zweitens weil den Luftströmungen keine Festlandsküsten als unüberwindliche Hindernisse in den Weg treten. Unter dem Einfluß der Erdrotation biegt der Nordhalbkugelpassat von seinem nordsüdlichen Wege rechts, also nach Westen ab und wird zu einem Nordostwinde — ebenso, statt von Süden nach Norden zu strömen, biegt der Südhalbkugelpassat links, also ebenfalls nach Westen ab und wird zu einem Südostwinde. Unter dem Einfluß der Erdrotation kreist die Luft in den Zyklonen der Nordhalbkugel entgegengesetzt dem Uhrzeiger und in den Antizyklonen mit dem Uhrzeiger. Auf der Südhalbkugel sind die Verhältnisse gerade umgekehrt: in den Zyklonen kreist die Luft mit dem Uhrzeiger, in den Antizyklonen entgegengesetzt dem Uhrzeiger.

Der Widerstand der Küsten, entgegenwirkende Druckverhältnisse usw. neutralisieren zuweilen den Einfluß der Erdrotation, aber in der Mehrzahl der Fälle entscheidet die Erdrotation über die Richtung der Strömungen. Auf der Nordhalbkugel kreisen die Küstenströmungen*) in den Seen wie die Luft in den Zyklonen gegen den Uhrzeiger; die Strömungen um die Inseln im Meere sowie die Luft in den Antizyklonen mit dem Uhrzeiger. — Die Flutströmung, welche in die Nordsee**) von Norden her eintritt, wird

*) Makarow, a. a. O., S. 395.

**) A. Buchan, Tidal Currents of the North Sea. Proc. R. Soc. Edinburgh. Bd. XXII, S. 478—481.

nach rechts abgelenkt und folgt der Küste Schottlands und Englands; der Ebbestrom, welcher von der Nordsee nach Norden austritt, wird ebenfalls nach rechts abgelenkt und an die Küste Dänemarks und Norwegens gedrängt. Die Strömungen, welche zu den großen ozeanischen Zirkulationen gehören, werden auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links abgelenkt, d. h. sie kreisen antizyklonisch, ebenso wie die Küstenströmungen in Seen.

§ 5. Die Theorien der Strömungen.

Mit der mathematischen Theorie der Strömungen verhält es sich ebenso wie mit der mathematischen Theorie der Gezeiten: wegen großer und mannigfacher Schwierigkeiten existiert keine exakte mathematische Theorie der Meeresströmungen. Es existieren nur Lösungen spezieller Aufgaben, welche eine gewisse Verwandtschaft mit der Theorie der Strömungen haben. Solche Lösungen haben Helmholtz, Kirchhoff, Oberbeck, Zöppritz, V. Bjerknes und andere gegeben.

Handelt es sich um eine Anwendung auf die wirklichen Strömungen, so bleibt nichts anderes übrig, als zu angenäherten, halb rechnerischen, halb graphischen Methoden zu greifen. Diesen Weg hat H. Mohn*) eingeschlagen; ihm sind G. Wegemann**) und R. Engelhardt***) gefolgt. Sie betrachten stationäre Zustände, sie setzen voraus, daß Strömungen, Winde, Dichten — kurz alle in Betracht kommenden Größen mit der Zeit nicht variieren. Dementsprechend nehmen sie als Grundlage der Rechnung Jahresmittel des Druckes, der Windstärke usw.

Mohn berechnet die Windrichtung und die Windstärke aus den Isobaren, ebenso handelt auch Wegemann. Aber während Mohn die Berechnung mit Hilfe seiner und Guldbergs†) bari-

*) H. Mohn, Die Strömungen des europäischen Nordmeeres. Ergänzungsheft zu Petermanns Mitteilungen Nr. 79. Gotha 1885.

**) G. Wegemann, Die Oberflächenströmungen des Nordatlantischen Ozeans nördlich von 50° n. Br. Archiv der deutschen Seewarte. Bd. XXII (1899), Nr. 4.

***) R. Engelhardt, Untersuchungen über die Strömungen der Ostsee. Die Dichtigkeitsfläche, a. d. O. Nr. 6.

†) Ursprünglich abgeleitet in „Etudes sur les mouvements de l'Atmosphère". Programme de l'Université pour le 2e Sem. 1876. Christiania 1876.

schen Windformeln ausführt, leitet Wegemann aus guten Beobachtungen empirische Beziehungen (vergl. S. 8 seiner Abhandlung) zwischen Windstärken und Gradient ab. Der Ablenkungswinkel*), d. i. der Winkel zwischen der Richtung des Gradienten und der Richtung des Windes (man zählt den Ablenkungswinkel von der Richtung des Gradienten aus rechts herum), wird dabei als in einer gegebenen Breite konstant angenommen, z. B. für 35° nördl. Br. Ablenkungswinkel 67,3°, für 45° — 71,3°, für 55° — 73,3°, für 65° — 75,2°. Auf diese Weise gewinnt man eine Windkarte für das ganze untersuchte Gebiet. Aus den Winden leitet man entsprechende Meeresströmungen ab, in der Voraussetzung, daß die Stromstärke (Stromgeschwindigkeit) in einem konstanten Verhältnis zur Windstärke steht. Schon im vorigen Abschnitt haben wir gesagt, daß Mohn das Verhältnis 0,0322, Wegemann 0,0466 akzeptiert. Fern von den Küsten oder dort, wo der Wind längs der Küste weht, wird die Stromrichtung als mit der Windrichtung identisch angenommen, wo aber der Wind schräg oder senkrecht zur Küste weht, läßt man die Strömung der Küste folgen. Auch die Geschwindigkeit muß in der Nähe der Küsten modifiziert werden, was nach verschiedenen plausiblen, aber im Grunde genommen etwas willkürlichen Gesichtspunkten geschieht. Das von den Winden erzeugte Stromsystem ruft Abweichungen der Meeresoberfläche von der Niveaufläche hervor. Die so deformierte Meeresoberfläche nennt Mohn Windfläche. Mohn nimmt an, daß die Oberfläche des Wassers sich nach rechts hebt, wenn man in der Richtung der Bewegung schaut und daß in der schiefen Wasseroberfläche die Komponente der Rotationskraft *(Corioliskraft)* der Komponente der Schwere das Gleichgewicht hält. Von der Zentrifugalkraft und Reibung wird abgesehen. Daraus folgt, daß der Winkel η zwischen Windfläche und Niveaufläche durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{2\,\omega \sin \varphi\, u}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11$$

gegeben wird. Bei der Konstruktion der Windfläche hat Mohn verschiedene Methoden angewandt; zuletzt hat er die Vertikalschnitte der Windfläche als Parabelstücke aufgefaßt. Auf die Einzelheiten der Konstruktion der Windfläche können wir an diesem Orte nicht eingehen. Endlich wird die Windfläche durch

*) In der Ablenkung äußert sich der Einfluß der Erdrotation.

Isohypsen graphisch dargestellt. Als zweite Ursache der Strömungen kommen die Dichtedifferenzen in Betracht: schon infolge der Dichtedifferenzen kann die Meeresoberfläche keine Niveaufläche sein, vielmehr wird sie sich über das Niveau des tiefsten Punktes um so mehr erheben, je kleiner das spezifische Gewicht und die Schwere*) sind. Dadurch wird**) ein Gefälle und ein System von Strömungen geschaffen, welche die Einsenkung auszufüllen streben. — Der Druck in den tieferen Schichten unter der Einsenkung wird vermehrt und unter der Erhöhung vermindert, somit würde in den tiefen Niveauflächen eine den höheren entgegengesetzte Druckverteilung hervorgerufen und demgemäß auch ein System entgegengesetzt gerichteter Strömungen entstehen. Zwischen diesem unteren und oberen System soll sich nach Mohn eine „Grenzfläche“ befinden, in welcher es keine Druckunterschiede gibt, wo der Druckgradient und die Bewegungsrichtung das Vorzeichen wechseln. Er hält die „Grenzfläche“ für identisch mit einer der Niveauflächen und versetzt sie in etwa ein Sechstel der Meerestiefe. Nach der Feststellung der „Grenzfläche“ ist es schon ein Leichtes, die Höhe der einander äquilibrierenden Wassersäulen zu berechnen. Man braucht nur genug Daten bezüglich des spezifischen Gewichtes und der Temperatur zu haben. Zieht man von diesen Höhen die entsprechenden Höhen der obersten Niveaufläche ab, so erhält man die Höhen der „Dichtigkeitsfläche“ über der obersten Niveaufläche. Auf diese Weise erhält man neben der „Windfläche“ die „Dichtigkeitsfläche“. Aus beiden setzt man nun die „Stromfläche“ zusammen, indem man die Höhen beider algebraisch summiert. Die „Stromfläche“ dient zur Berechnung der Strömungen. Die Stromrichtung wird durch den Verlauf der Isohypsen gegeben. Man setzt nämlich voraus, daß die Strömung den Isohypsen der Stromfläche in solcher Weise folgt, daß die größere Höhe rechts, die geringere links bleibt, wenn man in der Richtung des Stromes blickt. Erlaubt die Richtung der Küsten dies nicht, so muß man annehmen, daß das Wasser der Küste folgt. Die Stromgeschwindigkeit berechnet man aus der Formel 11. Man setzt in derselben

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{\triangle h}{\triangle x},$$

---

*) Die Höhen der Wassersäulen müssen umgekehrt proportional der Schwere sein, um einander das Gleichgewicht zu halten.

**) Wegemann, a. a. O. S. 16.

wo $\triangle h$ den Vertikalen, $\triangle x$ den horizontalen Isohypsenabstand (beide in Metern) bezeichnet, man löst sie nach u auf und erhält:

$$u = \frac{\triangle h}{\triangle x} \cdot \frac{g}{2\,\omega \sin \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12$$

Mit Recht bemerkt Wegemann, daß die Bildung der Windfläche einen unnötigen Umweg an sich darstellt. Sobald die Richtung und Stärke der durch den Wind erzeugten Strömungen berechnet worden sind, kann man die Konstruktion der Windfläche ganz unterlassen. Nur die „Dichtigkeitsfläche“ muß man konstruieren, worauf die Richtung und Stärke der „Dichteströmungen“ nach den soeben aus Anlaß der „Stromfläche“ angegebenen Regeln und Formeln zu berechnen sind. Die Geschwindigkeiten der „Dichteströmungen“ sind mit den Geschwindigkeiten der „Windströmungen“ nach den Regeln des Parallelogramms zu endgültigen Stromgeschwindigkeiten zu kombinieren.

Der Erfolg der Methode ist besser als man nach den zahlreichen willkürlichen Annahmen erwarten könnte: das erhaltene Bild ist zwar nicht getreu aber der Wahrheit nicht unähnlich, vielleicht deswegen, weil der gesunde Menschenverstand den Forscher dort rettet, wo eine strikte Anwendung der Regeln zu einem unmöglichen Resultat geführt hätte. Speziell gilt diese Bemerkung von der Darstellung der Strömungen in der Nähe der Küsten.

Wie es scheint, ist die Denivellation der Stromfläche größer als die in der Natur beobachteten Denivellationen (vergl. S. 5—8). Bei Mohn ist die höchste Isohypse mit 2,8 m, die niedrigste mit 0 m kotiert. Eine Niveaudifferenz von 2,8 m zwischen dem Skagerrak (+ 2,8 m) und dem Punkte etwa in 68° nördl. Breite und 0° Länge von Greenw. (zwischen Island und den Lofoten) erscheint zu groß.

Auf einen Punkt der Methode müssen wir für eine Weile zurückkommen, nämlich auf die Definition der „Grenzfläche“, die bei der Berechnung der Dichteströmungen eine so wichtige Rolle spielt. Laut Definition ist die Grenzfläche gleichzeitig Fläche konstanten Druckes und des Zeichenwechsels der Geschwindigkeit. Während im Zustand der Ruhe alle drei Geschwindigkeitskomponenten in der ganzen Flüssigkeit gleich Null sind und die Flächen konstanten Druckes mit den Niveauflächen zusammenfallen, ist dies im Zustand der Bewegung keineswegs der Fall. Es besteht ferner keine Notwendigkeit, daß die zu einer Fläche konstanten Druckes tangentiale Geschwindigkeitskomponente gleich Null sei; sie wird im Gegenteil

im allgemeinen infolge des Gefälles dieser Fläche von Null verschieden sein.

Aber nach der Definition soll die Grenzfläche diejenige unter den Flächen konstanten Druckes sein, in welcher der Zeichenwechsel der Geschwindigkeit eintritt. Es wird nicht deutlich gesagt, welcher Geschwindigkeit. Es will aber scheinen, daß dies die zur Fläche konstanten Druckes tangentiale Komponente sein soll. Dann wird man wirklich zu dem Schluß geführt, daß das Gefälle der Fläche konstanten Druckes überall gleich Null sein, folglich diese letzte mit einer der Niveauflächen zusammenfallen muß.

Es fragt sich nun, ob eine solche Fläche wirklich immer existieren muß? Eine theoretische Notwendigkeit gibt es nicht, und die Erfahrung widerspricht der Annahme einer „Grenzfläche", in welcher beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind. In der Tat muß die Grenzfläche nach dem oben Dargelegten eine der Niveauflächen sein und sie wird auch als solche von Mohn und anderen betrachtet. Indes stößt die Festlegung der „Grenzfläche" auf Widersprüche. „Es scheint", sagt R. Engelhardt*), „daß die Grenzfläche in gewissem Grade von der Tiefe abhängig ist; ferner, daß in genügend tiefem Wasser die Lage derselben ziemlich konstant ist, dagegen, wenn die Grundfläche (der Boden) der Grenzfläche sich nähert und eine gewisse Entfernung von ihr erreicht hat, die Grenzfläche anfängt, sich — wenn auch in geringerem Maße — dieser Erhebung anzuschließen." „Die Grenzfläche des Nordmeeres soll in 300 Faden Tiefe liegen, diejenige der Ostsee in 18 m. Im Skagerrak treffen sich beide: wie soll sich da der Übergang vollziehen?" — Gewiß ist die Grenzfläche keine Niveaufläche: eine Niveaufläche kann nicht in der Ostsee 18 m und in der Nordsee 300 Faden tief liegen. Ist das eine Fläche konstanten Druckes? Auch nicht — es wird ja niemand behaupten, daß der Druck in 18 m und in 300 Faden Tiefe gleich sein kann.

Den Einfluß der Erdrotation auf die Richtung des Windes hat Mohn, wie oben erörtert wurde, in Rechnung gezogen, aber bei der Bestimmung der Winddrift (d. i. der vom Winde allein erzeugten Strömung) hat er angenommen, daß dieselbe die Richtung des Windes einschlägt. Nun hat Nansen gefunden, daß die Drift in der Nordhemisphäre rechts vom Winde abweicht. Im

*) R. Engelhardt, a. a. O. S. 23.

Polarmeere sollte der Ablenkungswinkel für die ganze Driftreise der „Fram“ 37,5° betragen. Die Behauptung Nansens ist gewiß begründet. Es ist bekannt, daß der Wind mit der Höhe über dem Boden seine Richtung ändert; warum sollte denn nicht die Richtung der Strömung mit der Tiefe variieren? warum sollte in der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser, wo die Dichte einen plötzlichen Sprung macht, nicht auch der Ablenkungswinkel einen plötzlichen Sprung machen? Dazu hat V. W. Ekman*) eine mathematische Theorie aufgestellt. Er geht von den durch Reibungsglieder ergänzten Eulerschen Gleichungen (vergl. S. 453, Gleichungen 2) aus; er betrachtet einen unendlich ausgedehnten, durch eine Horizontalebene begrenzten Ozean und setzt voraus, daß die Strömung geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit von $-\infty$ bis $+\infty$ fließt. Da die Trägheitsbahn auf der Oberfläche einer rotierenden Erde krumm ist, so hat er dadurch außer dem Einfluß des Windes noch einen Zwang eingeführt, der kein Analogon in der Wirklichkeit hat. Aber wir werden ihm daraus keinen Vorwurf machen, da Ekman ohne Zweifel nur notgedrungen diese Beschränkung eingeführt hat, um hydrodynamische Gleichungen integrieren zu können. Es steht aber in seiner Theorie ein Satz, der leider nur Verwirrung stiften kann. Ekman findet nämlich, daß auf der Nordhemisphäre die Strömung in allen Breiten um 45° rechts vom Winde und auf der Südhemisphäre in allen Breiten um 45° links vom Winde abweicht. Es ist einleuchtend, daß ein solches diskontinuierliches Gesetz (am Äquator springt der Ablenkungswinkel um 90°) nicht wahr sein kann. Es hat ja Ekman zu der sonderbaren Behauptung geführt**), daß unter dem Äquator eine stationäre Bewegung überhaupt unmöglich ist. Tatsächlich beruht dieser sonderbare Satz einfach darauf, daß Ekman bei der Aufstellung der Grenzbedingungen den passiven Widerstand, welchen die Luft der zum Winde senkrechten Strömungskomponente entgegensetzt, gänzlich außer acht gelassen hat. Hätte er diesen Widerstand in Rechnung gezogen, so hätte er für den Ablenkungs-

*) V. W. Ekman, On the Influence of Earths Rotation on Ocean Currents. Arkiv för Mathematik, Bd. 2 (1905), Nr. 11, S. 1—52. — Ferner: „Beiträge zur Theorie der Meeresströmungen“ im 34. Bde. (1906) der Annalen der Hydrographie, endlich die Polemik zwischen Ekman, Schiötz und Mohn im 36. und 37. Bde. (1908 und 1909) derselben Annalen.

**) V. W. Ekman, Annalen der Hydrographie, Bd. 34 (1906), S. 476 unten und an anderen Orten.

winkel statt des konstanten Wertes von 45° die von Schiötz*) gefundene Formel:

$$\tan g\,\varepsilon = \frac{\sqrt{\mu \varrho \omega \sin \varphi}}{k + \sqrt{\mu \varrho \omega \sin \varphi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

bekommen. In der Formel 13 bedeutet μ den Koeffizienten der inneren Reibung, k den Koeffizienten der Reibung zwischen Luft und Wasser, ε den Ablenkungswinkel, während die übrigen Buchstaben die gewöhnliche Bedeutung haben. Aus der Formel 13 ersieht man sofort, daß der Ablenkungswinkel mit der Breite abnimmt und unter dem Äquator — wo $\varphi = 0$ — zu Null wird, wie es sein soll.**)

Man hat versucht, der Frage des Ablenkungswinkels von der empirischen Seite näher zu treten. R. Witting***) findet aus Beobachtungen an Feuerschiffen in der Ostsee, im Kattegat und auf dem Ladogasee eine mittlere Abweichung der Strömung vom Winde um 19° nach rechts. C. Forch†) hat im westlichen Mittelmeer in der Regel eine Ablenkung nach links, im östlichen nach rechts (durchschnittlich um 44°) gefunden. P. H. Gallé††) findet aus Beobachtungen im Indischen Ozean in 173 von den 189 Fällen, wo in Winddriftgebieten Wind und Stromrichtung verglichen werden konnten, eine Abweichung nach links, wie es auch sein soll, da die Beobachtungen aus der Südhalbkugel stammen. Er findet Winkel sowohl unterhalb als oberhalb 45°, nämlich in einzelnen Feldern 41 bis 62°. Leider hat Gallé einige Felder, die in die Ekmansche Regel nicht paßten, unter dem Vorwand, daß hier keine reine Winddrift vorliegt, ausgeschaltet. Man könnte aber

*) Schiötz, Annalen der Hydrographie, Bd. 36 (1908), S. 442.

**) Wohlverstanden wird die Formel 13 auf der Südhalbkugel unbrauchbar; aber es folgt direkt aus den Integralen Ekmans eine ähnliche Formel für die Südhalbkugel, die natürlich ebenfalls unter dem Äquator $\varepsilon = 0$ liefert. Bezüglich der Bedingungen in der Oberfläche des Wassers vergleiche man die schon zitierte Abhandlung von Schiötz: Bemerkungen über die durch den Wind erzeugten Meeresströmungen: Annalen der Hydrographie, Bd. 36 (1908), S. 429–446.

***) R. Witting, Zur Kenntnis des vom Winde erzeugten Oberflächenstromes. Annalen der Hydrographie, 37. Bd. (1909), S. 193–203.

†) C. Forch, Über die Beziehungen zwischen Wind und Strom im Mittelmeer, a. a. O. S. 435–447.

††) P. H. Gallé, Zur Kenntnis der Meeresströmungen. Mededeelingen en Verhandelingen. Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut Nr. 102. Utrecht 1910.

umgekehrt fragen, wer dafür bürgen kann, daß in denjenigen Feldern, die Gallé beibehalten hat, die Drift nur vom Winde abhängt.

Zum Schluß müssen wir noch eine prinzipielle Frage berühren. Es ist fraglich, ob hydrodynamische Gleichungen — selbst durch Reibungsglieder ergänzt (vergl. Gleichungen 2 des nächsten Kapitels) — auf die Strömungen anwendbar sind. Warum, das werden wir im nächsten Kapitel (§ 2 bis § 5) bei der Besprechung der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen erfahren.

Zwölftes Kapitel.

Die Flüsse.

§ 1. Einige Definitionen.

In diesem Kapitel werden wir die Untersuchungen der Hydrotechniker vielfach benutzen. Aus Anlaß des Baues von Schleusen, Kanälen, Dämmen usw. mußten sie sich seit jeher mit den Gesetzen des Flußlaufes beschäftigen. Sie haben selbst eine besondere Disziplin: die Hydraulik, geschaffen. Die Hydraulik ist älter als die Hydrodynamik und weniger exakt als die jüngere Schwesterdisziplin, aber in praktischen Anwendungen viel bequemer.

Wir werden auch die Untersuchungen von Geologen und Geographen, welche die Rolle der Flüsse in der Modellierung des „Antlitzes der Erde“ aufgeklärt haben, zu Rate ziehen.

Zu Beginn werden wir an einige schon benutzte Ausdrücke und Definitionen erinnern, andere noch nicht gebrauchte einführen.

1. Stationär oder beständig wird eine Bewegung genannt, in welcher alle drei Geschwindigkeitskomponenten an jeder Stelle von der Zeit unabhängig sind, folglich als Funktionen der Raumkoordinaten allein ausgedrückt werden können.

2. Gleichmäßig heißt eine in allen Querschnitten des Flusses oder des Kanals gleiche Bewegung. Selbstverständlich müssen sämtliche Querschnitte untereinander gleich sein.

3. Variabel heißt eine Bewegung, in welcher die Geschwindigkeitskomponenten von der Zeit abhängig sind.

4. Ungleichmäßig heißt eine in verschiedenen Querschnitten verschiedene Bewegung.

§ 2. Zwei Arten der Bewegung des Wassers.

Nehmen wir ein einfaches Beispiel an: das Hinunterfließen einer Flüssigkeit in einem geneigten geraden zylindrischen Rohr. Nehmen wir an, daß die Flüssigkeit das Rohr ausfüllt und daß die Bewegung stationär ist. In einem engen, sagen wir lieber kapillaren Rohre ist die Geschwindigkeit gering und die einzelnen Flüssigkeitselemente bewegen sich gleichmäßig, geradlinig und parallel zur Achse des Rohres. Es ist erlaubt, die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen anzuwenden, da aber die innere Reibung hier eine entscheidende Rolle spielt, so müssen die Gleichungen Eulers (S. 308) durch Reibungsglieder von Navier, Poisson und Stokes ergänzt werden. Obgleich gegebenenfalls die Bewegung stationär sein soll, werden wir der Allgemeinheit wegen Gleichungen für variable Zustände schreiben. Nur eine Vereinfachung werden wir uns erlauben: in allen Aufgaben, welche sich auf die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen beziehen, sind die Dichtevariationen absolut belanglos; man kann folglich $\varrho = 1$, ferner

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1$$

setzen und die Gleichungen in folgender Gestalt schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \mu\nabla^2 u + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \mu\nabla^2 v + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \mu\nabla^2 w + \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 2$$

Die Bedeutung der Buchstaben brauchen wir nicht anzugeben, da sie schon aus früheren Kapiteln bekannt ist.

Die Gleichungen 2 können im Fall der stationären Bewegung in einem zylindrischen Rohr sehr vereinfacht werden. Es sei die x-Achse mit der Achse des Rohres und die positive Richtung mit der Richtung der Bewegung identisch. Da die Geschwindigkeit von der Zeit nicht abhängt und die Flüssigkeitselemente sich parallel zur Achse des Rohres bewegen, so hat man innerhalb des ganzen Rohres:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v = w = 0.$$

Auf Grund dieser letzten Gleichungen findet man zuerst aus Gleichung 1:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

dann findet man, daß die linksseitigen Glieder in den Gleichungen 2 verschwinden. Die übrigbleibenden rechtsseitigen Glieder in der zweiten und dritten Gleichung 2 liefern Beziehungen zwischen den Differentialquotienten von W und p, die uns weiter nichts angehen, während die erste Gleichung 2 in

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

übergeht. Man kann noch der Einfachheit halber annehmen, daß der Druck an beiden Enden des Rohres denselben Wert besitzt. Das wird nämlich dann der Fall sein, wenn die Flüssigkeit am oberen Ende des Rohres ohne Überdruck eintritt und am unteren frei ausfließt. Beide Enden befinden sich dann unter dem atmosphärischen Druck und man ist berechtigt anzunehmen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Andererseits ist:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g \sin i,$$

wo i den Neigungswinkel des Rohres oder das sogenannte Gefälle bezeichnet. Jetzt nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g \sin i = 0$$

oder, wenn der Querschnitt kreisförmig ist:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{g}{\mu}\sin i, \quad \ldots\ldots \quad 3$$

wo

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Die Gleichung 3 werden wir unter der Voraussetzung integrieren, daß die Flüssigkeit an der Wand des Rohres haftet. Wenn der Radius des Querschnittes mit R bezeichnet wird, so ergibt sich daraus die Bedingung:

$$u = o \text{ für } r = R. \quad \ldots\ldots \quad 4$$

Man erhält sofort das Integral:

$$u = (R^2 - r^2)\frac{g \sin i}{4\mu}, \quad \ldots\ldots \quad 5$$

welches zeigt, daß Flüssigkeitsteilchen, die sich in einem gegebenen Zeitmomente in einem gegebenen Querschnitte befinden, mit der Zeit ein immer mehr und mehr ausgezogenes Paraboloid bilden. Man hat diese Bewegung nicht mit Unrecht mit dem Ausziehen eines Fernrohres verglichen.

Die Erfahrung bestätigt die Formel 5. Berechnet man nämlich auf Grund der Formel 5 diejenige Wassermenge, welche in der Zeiteinheit aus dem Rohre ausfließt*), so findet man eine gute Übereinstimmung zwischen der berechneten und der beobachteten Wassermenge.

Doch ist die Tragweite der soeben angegebenen Lösung beschränkt: selbst bei kleinem Gefälle, aber bei genügend großem Querschnitt des Rohres bewegen sich die Flüssigkeitselemente keineswegs geradlinig, sondern in gewundenen, geschlängelten Bahnen, und die beobachtete Ausflußmenge ist von der aus Formel 5 berechneten total verschieden. Besonders beachtenswert sind die Versuche O. Reynolds**) mit gefärbtem Wasser in Rohren, deren Querschnitte so gewählt waren, daß bei kleinem Gefälle eine geradlinige Bewegung zustandekommen konnte. Solange die Bewegung geradlinig blieb, zog sich das gefärbte Wasser wie eine gerade Linie von einem Ende des Rohres zum anderen; sobald aber das Gefälle eine gewisse Grenze überstieg und die Geschwindigkeit einen gewissen Wert erreichte, ging die geradlinige Bewegung in eine unregelmäßig gewundene über. Das gefärbte Wasser

---

*) Laut Definition ist die Ausflußmenge (Wassermenge, sekundliche Wassermenge) $\int u d\sigma$, wo u die Geschwindigkeit und $d\sigma$ das Flächenelement des Querschnittes bezeichnet, während die Integration sich auf den ganzen Querschnitt bezieht. Die Geschwindigkeit u ist aus Formel 5 oder für andere, nicht kreisförmige Querschnitte aus äquivalenten Formeln einzusetzen.

**) O. Reynolds, On two Modes of the Flow of Water. Phil. Trans. R. Soc. London, Bd. 174, Th. III (1883), S. 935 u. ff. Ähnliche Versuche wurden auch von E. G. Coker und S. B. Clement ausgeführt: On the Variation of the Critical Velocity of Water with Temperature, Phil. Trans. R. Soc. London, Bd. 201 A (1903), S. 45—61. Mit Luft haben J. H. Grindley und A. H. Gibson (On frictional Resistances to the Flow of Air through a Pipe, Proc. R. Soc. London, Bd. 80 A [1908], S. 114—139) experimentiert. In einem Bleirohr von 3,2 mm Durchmesser fanden sie eine kritische Geschwindigkeit von 58 bis 61 cm pro Sekunde. Eine Abhängigkeit von der Temperatur haben sie nicht entdecken können. Es wäre zu wünschen, daß diese letzten Versuche noch wiederholt und erweitert würden.

mischte sich mit dem ungefärbten, so daß außer einem kurzen Stücke dicht beim Eintritt das ganze Rohr mit einer nahezu gleichmäßig gefärbten Mischung ausgefüllt erschien.

Nehmen wir jetzt die Formel 5 und berechnen die mittlere Geschwindigkeit:

$$u_m = \frac{1}{\sigma}\int u\,d\sigma = \frac{g}{\mu}\,\frac{R^2}{8}\sin i. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Reynolds hat nun gefunden, daß Wasser in zylindrischen Röhren nur so lange geradlinig fließen kann, als

$$u_m < \frac{P}{BD} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

Hier bedeutet $D = 2R$ den Durchmesser des Rohres, ferner mit den Einheiten Meter, Sekunde und Grad C:

$$B = 43{,}79, \quad P = \frac{1}{1 + 0{,}0236\,T + 0{,}0022\,T^2}, \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

wo T die Temperatur bezeichnet.

Sobald die mittlere Geschwindigkeit u_m die in der Ungleichheit 7 angegebene Grenze überschritt, wurde die Bewegung des Wassers unregelmäßig, wurden die Bahnen der Teilchen gewunden. Coker und Clement haben gefunden, daß die Grenze Reynolds etwas zu tief liegt. Aber es ist schwer, dieselbe scharf zu bestimmen, da schon in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit die geradlinige Bewegung ziemlich instabil wird und leicht aus irgendeinem Anlaß in die andere Bewegung übergeht. Außerdem haben sowohl die Versuche Reynolds als auch diejenigen Cokers gezeigt, daß außer der kritischen Geschwindigkeit, bei welcher die geradlinige Bewegung in die unregelmäßige übergeht, eine andere existiert, bei welcher umgekehrt die unregelmäßige Bewegung notwendig in die regelmäßige geradlinige übergeht. Reynolds schätzt diese zweite „kritische Geschwindigkeit" auf etwa ein Sechstel der ersten. Unterhalb der zweiten Grenze können selbst große Störungen die geradlinige Bewegung nicht zerstören.

Die „kritische Geschwindigkeit" ist, wie aus der zweiten Gleichung 8 ersichtlich, eine Funktion der Temperatur. Diese Abhängigkeit kommt dadurch zustande, daß die kritische Geschwindigkeit direkt proportional dem Reibungskoeffizienten μ ist, welcher seinerseits von der Temperatur abhängt. Besonders schön wurde dieser Satz durch die Versuche von Coker und Clement bestätigt.

Die genannten Forscher haben gefunden, daß die kritische Geschwindigkeit umgekehrt proportional wie

$$1 + 0{,}03368\, T + 0{,}000156\, T^2$$

variiert, während μ (für Wasser) sich umgekehrt proportional wie

$$1 + 0{,}03368\, T + 0{,}000221\, T^2$$

verhält.

Nehmen wir jetzt als Beispiel ein Rohr von 10 cm Durchmesser und Wasser von 15° C. Wir haben nach Reynolds $B = 43{,}79$, $D = 0{,}1$, $P = \frac{1}{1{,}849}$; somit berechnet sich die kritische Geschwindigkeit $\frac{P}{BD}$ auf 0,1235 m pro Sekunde. Nehmen wir rund $u_m = 13$ cm pro Sekunde und setzen dies in die Formel 6 ein. Indem in C. G. S.-Einheiten $g = 981$ und nach Thorpe und Rücker bei 15° C $\mu = 0{,}0113$ ist, so erhält man $\sin i = 0{,}00005$ und $i = 10''$. So klein ist die „kritische Geschwindigkeit" und das „kritische Gefälle", selbst für ein Rohr von 10 cm Durchmesser.

Man darf sich also nicht wundern, wenn das geradlinige, oder sagen wir allgemeiner das „direkte", Fließen nur in kapillaren Röhren beobachtet werden kann; in allen weiteren Röhren, in allen Flüssen und Kanälen beobachtet man mit den seltensten Ausnahmen nur das andere, das gewundene, indirekte Fließen. Es gibt somit zwei Arten der Bewegung des Wassers: eine, welche den kapillaren Kanälen und Röhren eigentümlich ist, und eine zweite, welche in weiteren Röhren, Flüssen und Kanälen auftritt.

Man versuchte diesen Dualismus auf Grund der Theorie der Stabilität der Bewegung zu erklären. Keine geringeren als Lord Kelvin und Lord Rayleigh haben diesen Weg betreten, andere sind ihnen gefolgt, vor allem ist W. M. Fadden Orr*) zu nennen, der dieser Frage eine umfangreiche Monographie gewidmet hat. Doch kann man nicht sagen, daß ein entsprechender Erfolg diese Bemühungen gekrönt hätte: die einzelnen Autoren kamen zu divergenten Resultaten; es gelang nicht, eine allgemeine Theorie aufzustellen.

Die von Kelvin und anderen eingeschlagene Richtung scheint rationell; schon im achten Kapitel haben wir die Theorie von

*) W. M. Fadden Orr, The Stability of the Steady Motions of a Liquid. Proc. Roy. Irish Academy, Bd. XXVII (1907), Sect. A, S. 9–138.

Helmholtz dargelegt, welche die Wellenbewegung ebenfalls auf die Stabilitätstheorie zurückführt. Nach Helmholtz ist die Wellenbewegung (mit Strömung) im Gegensatz zu einer reinen Strömung in parallelen Schichten eine stabilere Bewegungsform und das ist die Ursache, weshalb der Wind Wellen erzeugt. Ganz analog dürfte eine Strömung auf geneigter Fläche unter dem Einfluß der Schwerkraft ebenfalls eine instabile Bewegungsform sein; aber dank anderen Bedingungen geht sie nicht in Wellenbewegung über, sondern in ein gewundenes „indirektes" Fließen, bei welchem die Flüssigkeitsteilchen komplizierte Bahnen beschreiben, von der Mitte der Strömung nach den Wänden und in umgekehrter Richtung wandern, sich mischen usw.

Man kann aber die Erscheinung in einer anderen Weise interpretieren, indem man nach einer Analogie in der Elastizitätstheorie sucht. Die Erfahrung lehrt, daß das Bersten fester Körper nicht nur von der Größe der Deformation, d. i. von der Größe der Verschiebungen, sondern auch von der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Deformation vollzieht, abhängt.

Feste Körper ertragen eine viel größere aber langsame Deformation, ohne zu bersten, und brechen bei einer viel kleineren aber zu rasch vollzogenen.

In seiner Theorie des inneren Baues fester Körper sagt Maxwell, daß eine gewisse Zeit erforderlich ist, damit der Körper sich neuen Gleichgewichtsbedingungen anpasse. Geschieht die Deformation so rasch, daß der Körper keine Zeit hat, seine innere Struktur zu ändern, so erfolgt eine diskontinuierliche Deformation, der Stoff wird zerrissen; ist sie aber langsam genug, daß die Umlagerung im Innern den Änderungen der Gleichgewichtsbedingungen folgen kann, so wird die Kontinuität nicht aufgehoben, der Stoff reißt nicht.

Diese allgemeinen Prinzipien können auf den uns interessierenden Fall in folgender Weise angewandt werden. Beim Strömen in einem Kanal oder in einem Rohr ist die Geschwindigkeit der Deformation mit der Geschwindigkeit der Bewegung identisch, indem das Fließen auf der Deformation flacher Scheiben in Paraboloide beruht. Deswegen reißt die Flüssigkeit erst dann, wenn die Geschwindigkeit der Bewegung eine gewisse Grenze überschreitet. Diese Grenze, die „kritische Geschwindigkeit", muß um so höher liegen, je größer der Koeffizient der inneren Reibung μ, denn dieser Koeffizient ist ein Maß für die Kraft, mit welcher die

Flüssigkeitsteilchen untereinander zusammenhängen. Auf diese Weise kommen wir zu dem Schluß, daß die kritische Geschwindigkeit eine mit μ wachsende Funktion sein muß. Andererseits wissen wir, daß das Bersten fester Körper und überhaupt die Deformation auch von den Dimensionen der Körper abhängen. So z. B. deformiert sich ein kleiner, an beiden Enden unterstützter Eisenstab durch sein eigenes Gewicht nur sehr wenig, aber ein Eisenstab von zweimal so großen Dimensionen (d. h. zweimal so großer Länge, Dicke und Breite) biegt sich in der Mitte nicht zweimal, sondern viermal so stark usw. Das rührt davon her, daß die Schwerkraft proportional dem Volumen, d. h. der dritten Potenz der Lineardimensionen, und der Widerstand nur proportional dem Querschnitt, d. h. der zweiten Potenz der Lineardimensionen, wächst. Führt man eine ähnliche Überlegung für eine deformierte Flüssigkeitsscheibe aus, so kommt man zu dem Schluß, daß dieselbe um so leichter zerreißen wird, je größer ihre Dimensionen, d. h. je größer der Querschnitt des Rohres. Daraus folgt, daß die kritische Geschwindigkeit mit wachsendem Querschnitt abnehmen muß. Die einzige Beziehung aber, welche zwischen der kritischen Geschwindigkeit u_c, welche die Dimensionen $\left|\frac{L}{T}\right|$ und dem Koeffizienten der inneren Reibung, welcher die Dimensionen $\left|\varrho\frac{L^2}{T}\right|$ hat, bestehen kann, ist:

$$u_c = \frac{k}{\varrho} \cdot \frac{\mu}{L}, \quad \dots\dots\dots 9$$

wo k eine absolute Zahl, ϱ die Dichte und L eine Länge*) bedeutet. Es ist klar, daß die kritische Geschwindigkeit abnimmt, wenn die Länge L wächst. Diese Länge muß also in direkter Beziehung zu den Abmessungen des Rohrquerschnittes stehen. Bei einem kreisförmigen Rohr ist es am zweckmäßigsten, für L den Durchmesser (oder den Radius) zu nehmen. Betrachtet man aber die Formel 9 näher, so sieht man, daß u_c genau die von O. Reynolds experimentell gefundene Form:

$$u_c = \frac{P}{BD}$$

besitzt, denn P ist proportionell dem Reibungskoeffizienten μ und D bezeichnet den Durchmesser des Rohres.

---

*) So wie T irgendeine Zeit bedeutet.

Worin liegt nun der Unterschied zwischen der Theorie Kelvins und der hier versuchten Erklärung? Dort führt man alles auf die Theorie der Stabilität der Bewegung zurück, wobei man im Rahmen der klassischen Hydrodynamik bleibt, speziell die Gleichungen 2 dieses Kapitels zum Ausgangspunkt der Untersuchung macht.

Hier tritt man aus dem Rahmen der klassischen Hydrodynamik heraus; man läßt ein beständiges Zerreißen und Durcheinandermischen der Flüssigkeit zu, während die Gleichungen der Hydrodynamik in der Voraussetzung der Kontinuität der Flüssigkeit abgeleitet sind. Wollte man die Gleichungen 2 der hier skizzierten Erklärung anpassen, so müßte man annehmen, daß unzählige Diskontinuitäten in der Flüssigkeit beständig auftreten und wieder verschwinden. Das ist aber kaum ausführbar, denn selbst bei Verwendung statistischer Methoden würde sich die Analyse außerordentlich kompliziert gestalten.

§ 3. Die pulsierende Bewegung.

Wir werden von jetzt ab für die zweite Art der Bewegung der Flüssigkeiten den bei den Hydrotechnikern oft vorkommenden Namen „pulsierende Bewegung“ gebrauchen. Dieser Name rührt her von beständigen, schnellen, kleinen und unregelmäßigen Variationen der Geschwindigkeit. Es wird nicht versucht, die instantane, beständig wechselnde Geschwindigkeit zu bestimmen; als Gegenstand der Beobachtung und Berechung treten mittlere, lokale Geschwindigkeiten auf. Die Variationen der Geschwindigkeit sind so rasch, daß einige Minuten schon genügen, um ein brauchbares Mittel zu liefern. Sind die Mittel aus gleichen Zeitintervallen immer untereinander gleich, so nennt man die Bewegung trotz unregelmäßiger Variationen stationär.

Im folgenden werden wir uns beinahe ausschließlich mit der pulsierenden Bewegung befassen, infolgedessen werden wir nur von den Zeitmitteln der Geschwindigkeit sprechen. Speziell interessant sind für uns die Mittel aus der Geschwindigkeit parallel zur Achse des Rohres, bzw. des Kanals oder des Flusses. Es sei die instantane Geschwindigkeit parallel zur Achse des Rohres v, die Zeit, auf welche sich das Mittel bezieht, τ und die mittlere lokale Geschwindigkeit V. Nach der Definition ist:

$$V = \frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau} v\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 10$$

Stationär heißt die Bewegung, bei welcher V von t nicht abhängt. Es ist klar, daß man mit der Geschwindigkeit V ebenso operieren kann, wie mit der wahren instantanen Geschwindigkeit. Denke man sich, daß V für alle Punkte eines gegebenen Querschnitts bestimmt wurde; als mittlere Geschwindigkeit wird die Geschwindigkeit:

$$V_m = \frac{1}{\sigma}\int V d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

bezeichnet, wobei σ den Querschnitt bedeutet und die Integration über den ganzen Querschnitt ausgedehnt werden soll. Die Geschwindigkeit V_m spielt dieselbe Rolle wie u_m bei geradlinigem Fließen, und es fragt sich, welches ist die Beziehung zwischen V_m und dem Gefälle i des Rohres bei einer stationären Bewegung? Eine Theorie, aus welcher diese Beziehung abgeleitet werden könnte, existiert nicht; wir können nur unter den empirischen Beziehungen wählen. Wir wählen die Beziehung:

$$V_m^2 = kR \sin i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

die sich unter den Praktikern einer großen Beliebtheit erfreut. Mit der Beziehung 6 verglichen zeigt sie große Unterschiede. Dort war die mittlere Geschwindigkeit selbst dem $\sin i$ proportional, hier das Quadrat derselben; dort war die mittlere Geschwindigkeit dem Quadrate des Radius des Rohres proportional, hier ist das Quadrat der Geschwindigkeit der ersten Potenz des Radius proportional; dort ist die Geschwindigkeit dem Koeffizienten der inneren Reibung μ umgekehrt proportional und infolgedessen merklich von der Temperatur abhängig: sie wächst nämlich mit wachsender Temperatur, hier zeigt die Erfahrung keine Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Temperatur, so daß der Faktor k entweder den Reibungskoeffizienten μ gar nicht oder doch nur in solcher Weise enthält, daß dessen Einfluß ganz zurücktritt. Statt dessen wird der Faktor k, wie wir weiter sehen werden, von der Beschaffenheit der Wände des Rohres, somit von der Reibung an den Wänden, in hohem Grade beeinflußt.

§ 4. Anwendung auf Flüsse und Kanäle.

Indem die entscheidenden Versuche Reynolds und seiner Nachfolger sich auf die Röhre bezogen, haben wir bisher nur von Röhren, dazu von zylindrischen Röhren gesprochen; aber mutatis mutandis bezieht sich alles Obengesagte nicht nur auf Röhren von anderem

Querschnitt, sondern auch auf Flüsse und Kanäle. Man sieht sofort, daß selbst in kleinen Flüssen und Kanälen das geordnete Fließen in parallelen Stromfäden nur sehr selten zustande kommen kann, indem die mittlere Geschwindigkeit in der Regel die „kritische" übertrifft. In § 2 haben wir für ein Rohr von 10 cm Durchmesser bei 15° C eine kritische Geschwindigkeit von nur 13 cm pro Sek. gefunden; für ein Rohr von 1 m Durchmesser wäre sie zehnmal so klein, d. h. nur 1,3 cm pro Sek. Diese Grenzwerte sind etwas zu klein, indem nach Coker und Clement die Formeln Reynolds überhaupt etwas zu kleine Werte liefern. Nichtsdestoweniger können wir behaupten, daß in allen Flüssen, Bächen und Kanälen die unregelmäßige, pulsierende Bewegung herrscht. Nur in den kleinsten Flüßchen, in kleinen Berieselungskanälen, ferner in stillem Wasser weit von der Stromachse kann die geordnete Bewegung in parallelen Stromfäden hie und da auftreten. Ausschließlich herrscht sie nur in der Bewegung des Grundwassers, da diese in kapillaren Röhren stattfindet.

Stellen wir uns nun noch die Frage, wie groß die Geschwindigkeit der Flüsse wäre, wenn die in kapillaren Röhren und Kanälen gültigen Gesetze auch auf weite Röhren und Kanäle anwendbar wären. Nach der Formel 6 beträgt die mittlere Geschwindigkeit in einem Rohr von 1 m Durchmesser bei 15° C und bei einem Gefälle von $i = 0{,}0001$ *) ungefähr 27 m pro Sek., indes beträgt die wahre mittlere Geschwindigkeit — und zwar bei sehr glatten Wänden — kaum 0,4 m pro Sek. In diesem Falle ist die hypothetische Geschwindigkeit 68 mal so groß als die wahre. Für einen großen Fluß wäre das Verhältnis zwischen der hypothetischen und der wahren Geschwindigkeit noch bedeutend größer. Man kann sich vorstellen, wie das Antlitz der Erde ausgesehen haben würde, wenn die Hypothese zu einer Tatsache würde.

Bei großen Flüssen nnd Kanälen ist die wahre pulsierende Bewegung weniger „ökonomisch" als das geordnete Fließen in parallelen Stromfäden. In komplizierten Bewegungen, welche die Wasserteilchen ohne Nutzen für das Fortschreiten in der Richtung des Flusses ausführen, wird die potentielle Energie der Schwer-

*) Das ist ein sehr kleines Gefälle. Das mittlere Gefälle der Elbe in Böhmen beträgt 0,00035, des Rheines von Straßburg bis Rotterdam 0,00045, der Donau zwischen Donaueschingen und Wien 0,00049, zwischen Wien und dem Schwarzen Meere 0,00009, also ist das hier angenommene Gefälle nur um $^1/_{10}$ kleiner als das Gefälle der Donau zwischen Wien und der Mündung.

kraft in weit größerem Maße durch Reibung vernichtet als beim direkten Fließen. Auch das beständige Entstehen von Diskontinuitäten, die übrigens sofort wieder ausgeglichen werden, verursacht einen verhältnismäßig großen Energieverbrauch, indem die Reibung um so größer ist, je größer die Geschwindigkeitsdifferenzen auf derselben Entfernung sind. Theoretisch wird die Reibung unendlich groß, wenn eine Diskontinuität der Geschwindigkeit eintritt; da aber die Dauer der Diskontinuitäten auf unendlich kurze Zeit beschränkt ist, so ergibt sich nur ein endlicher Energieverbrauch.

Aus Gründen, von denen später die Rede sein wird, existiert in den Flüssen eine Querzirkulation, welche Wasser von den Wänden und von der Sohle an die Oberfläche und von da zurück befördert. Dank der vereinten Wirkung der Querzirkulation und der pulsierenden Bewegung wird das Flußwasser gemischt und die Trübung bald über die ganze Wassermasse verteilt. Dieselben Ursachen haben noch eine andere Folge: selbst in großen Flüssen lassen sie keine großen Temperaturdifferenzen bestehen; sie bewirken, daß die Temperaturen am Grunde und an der Oberfläche, in der Mitte und an den Ufern sich wenig voneinander unterscheiden. Bei einem Fließen in parallelen Stromfäden würden die Temperaturdifferenzen ohne Zweifel bedeutend größer sein, etwa so groß wie in den Landseen.

§ 5. Empirische Formeln für die pulsierende Bewegung.

Wir haben schon gesagt, daß eine exakte Theorie der pulsierenden Bewegung nicht existiert. Die pulsierende Bewegung ist zu kompliziert, als daß man alle Einzelheiten analytisch beschreiben könnte; nur statistische Methoden können angewandt werden; sie führen aber zu Ausdrücken, die man nicht berechnen kann, da Anhaltspunkte dafür fehlen. Es bleibt nichts übrig, als zu halbempirischen Aushilfsmitteln zu greifen. Statistisch und halbempirisch ist auch die sonst vorzügliche Theorie von J. Boussinesq*).

*) J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires des savants étrangers, Bd. XXIII (1870). Nach vielen Jahren hat Boussinesq seine Theorie in einer vervollkommneten und verbesserten Gestalt in zwei Abhandlungen, welche den Titel „Théorie de l'écoulement tourbillonant . . .“ (Paris 1907) führen, ein zweites Mal dargelegt. Ein Resumé der Theorie Boussinesqs hat Spataro unter dem Titel „La nouvelle hydrodynamique“ in der Zeitschrift für Gewässerkunde, Bd. II (1899), S. 127—160 und 321—337 gegeben.

Indes kann die Praxis auf die Auffindung einer exakten Theorie nicht warten, Ingenieure und Techniker müssen die Geschwindigkeit und die Ausflußmenge in Kanälen und Flüssen vorausberechnen. Sie bedienen sich dazu gewisser empirischer Formeln, welche die mittlere Geschwindigkeit V_m im gegebenen Querschnitt geben. Streng genommen beziehen sich diese Formeln nur auf die stationäre gleichmäßige Bewegung; aber man erlaubt sich gewisse Extrapolationen, wenn z. B. der Querschnitt von Ort zu Ort nur allmählich und langsam variiert oder wenn die Bewegung sich mit der Zeit zwar ändert, aber die Variation sehr langsam vor sich geht. Natürlich muß man bei solchen Extrapolationen sehr vorsichtig sein, da bekannterweise eine jede empirische Formel nur innerhalb derjenigen Grenzen gültig ist, in denen die zugrunde gelegten Beobachtungen enthalten sind.

Die empirischen Formeln, welche zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in geraden Kanälen bei einer stationären und gleichmäßigen Bewegung dienen sollen, sind sehr verschieden. In der Regel enthalten sie folgende Variabeln: die mittlere Geschwindigkeit V_m (vergl. die Definition in § 3, speziell die Formel 11), das Gefälle i und den sogenannten „hydraulischen Radius“ L. Bezüglich des Gefälles i müssen wir zwei Bemerkungen machen. Erstens: da das Gefälle immer eine sehr kleine Größe ist, schreibt man einfach i statt $\sin i$, nur muß natürlich i nicht im Winkelmaß, d. i. nicht in Minuten und Sekunden, sondern in Bogenmaß, d. i. in Bruchteilen der Zahl π gegeben werden, übrigens ist i nichts anderes als die Höhendifferenz zweier Punkte, dividiert durch ihren Abstand. Zweitens wird unter dem Gefälle das Gefälle der Wasseroberfläche verstanden. Diese Wahl wurde mit Rücksicht auf die Flüsse getroffen, wo der Grund uneben ist und die Bestimmung des Gefälles desselben mit großen Schwierigkeiten verbunden wäre. Übrigens sieht man die Sohle des Flusses nicht, während die Wasseroberfläche der Beobachtung unmittelbar zugänglich ist. Unter dem „hydraulischen Radius“ L versteht man das Verhältnis des Querschnittes zur benetzten Peripherie desselben Querschnittes. Auf diese Weise wird derjenige Teil der Peripherie, welcher an die Luft grenzt, ausgeschlossen. Nach dieser Definition hat man z. B. in einem halbzylindrischen Kanal:

$$L = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{1}{2} R \text{ usw.}$$

Außer V_m, i und L enthalten die Formeln gewisse Konstanten, die wir mit $a, b, c \ldots$ bezeichnen werden. Übrigens werden wir sehen, daß die Größen $a, b, c \ldots$ den Namen von Konstanten kaum verdienen. Sie hängen nicht nur von anderen Variabeln als i und L — wie z. B. von der Reibung an den Wänden — ab, sondern in einem gewissen Maße auch von i und L.

Gewisse ältere Formeln hatten die Gestalt:

$$Li = aV_m + bV_m^2,$$

andere (von St. Venant, O. Reynolds, Coker und Clement) die Gestalt:

$$Li = bV_m^n,$$

wo n eine von 2 wenig verschiedene Zahl bezeichnet, andere wieder (von Kutter und anderen Autoren) haben die Form:

$$Li = bV_m^2.$$

Außerdem gibt es Formeln von einer weit komplizierteren Gestalt, wie z. B. diejenige, welche Humphreys und Abbot aus den Messungen am Mississippi abgeleitet haben.

In der letzten Zeit haben einige Hydrotechniker versucht, für natürliche Wasserläufe statt des hydraulischen Radius die mittlere Tiefe im Querschnitt einzuführen. Es hat sich dabei ein Streben kundgegeben, den von der Rauheit der Wände abhängigen Koeffizienten los zu werden. Man behauptet nämlich, daß die Rauheit des Bettes als Funktion des Gefälles angesehen werden kann. Übrigens unterscheiden sich Formeln des neuen Typus untereinander nicht weniger (vielleicht noch mehr) als die Formeln des alten. In gewissen Fällen empfiehlt man Formeln, in denen die Geschwindigkeit der ersten Potenz, in anderen, wo sie der Potenz $^3/_4$ oder $^3/_2$ der mittleren Tiefe usw. proportional ist. Ob durch die neuen Formeln etwas gewonnen werden kann, mag dahingestellt bleiben.

Unter den Formeln des älteren Typus haben die Formeln von der Gestalt:

$$Li = bV_m^2$$

manche Vorteile für sich; sie zeichnen sich durch Einfachheit und weite Anwendungsgrenzen (auf sehr große Flüsse scheinen sie allerdings nicht anwendbar zu sein) aus, dazu lassen sie sich bis zu einem gewissen Grade rationell begründen. Wir werden hier ebenfalls eine Formel dieser Art bevorzugen, und zwar werden wir die Formel Bazins nehmen, indem dieser Forscher sehr sorgfältige und viel-

seitige Versuche behufs Bestimmung der Konstante b unter verschiedenen Bedingungen ausgeführt hat. Doch werden wir die Formel nicht in der ursprünglichen Gestalt, die ihr Bazin gegeben hat, sondern in der von Gravelius*) umgeänderten Gestalt anführen. Bazin schreibt nämlich die Formel so, wie sie hier geschrieben wurde, während Gravelius die Wurzel zieht, $b^{-1/2} = C$ setzt und somit

$$V_m = C\sqrt{Li} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

schreibt. Wie schon oben allgemein bemerkt wurde, ist C keine eigentliche Konstante, sie hängt nicht bloß von der Beschaffenheit der Wände — was selbstverständlich erscheint — sondern auch von L und i ab. Gravelius hat die von Bazin für b angegebene Formel umgerechnet und gibt für C mit den Einheiten Meter und Sekunde die Formel:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{L}}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14$$

wo L dieselbe Bedeutung wie oben besitzt, während für γ folgende Werte einzusetzen sind:

$\gamma = 0{,}06$ für sehr glatte Wände (Zement, gehobelte Bretter usw.);
$\gamma = 0{,}16$ für glatte Wände (Quadersteine, gewöhnliche Bretter usw.);
$\gamma = 0{,}46$ für ein gemauertes Bett;
$\gamma = 0{,}85$ für ein sehr regelmäßiges künstliches Erdbett;
$\gamma = 1{,}30$ für ein gewöhnliches Erdbett;
$\gamma = 1{,}75$ für ein sehr unebenes, verwachsenes Erdbett.

Die Formeln 13 und 14 samt der Tabelle für die γ-Werte sind innerhalb weiter Grenzen — jedoch nicht für so große Flüsse wie etwa der Mississippi — gültig. In der Formel 14 ist der Zusammenhang zwischen C und L rationell, während in gewissen Formeln, z. B. derjenigen Kutters — die übrigens praktisch ganz brauchbare Werte liefert — die Abhängigkeit der Konstante C von L und i solcher Art ist, daß sich in gewissen Spezialfällen ganz widersinnige Resultate ergeben.

---

*) Gravelius, Die Geschwindigkeitsformel. Zeitschrift für Gewässerkunde, Bd. I (1898), S. 196—208.

§ 6. Die Geschwindigkeit am Grunde und an den Ufern. Die Geschwindigkeit in der Oberfläche. Maximale Geschwindigkeit usw.

So wie im vorigen Paragraphen verstehen wir auch hier unter der Geschwindigkeit nicht die momentane Geschwindigkeit, sondern die mittlere (Mittel aus einer gewissen Zeit) lokale Geschwindigkeit V laut Definition aus § 3. Am Grunde und an den Ufern des Flusses ist V am kleinsten, in der Oberfläche größer, am größten ist sie in einer gewissen Tiefe, dabei nicht etwa in der Mitte des Querschnitts, sondern gewöhnlich etwas seitlich, da die Querschnitte und die Verteilung der lokalen Geschwindigkeit V in der Regel unsymmetrisch sind. Der Ort der größten Geschwindigkeit, die sogenannte Stromachse oder dynamische Achse, befindet sich über der tiefsten Stelle des Bettes und nähert sich mit der letzten zusammen den unterwaschenen konkaven Ufern. Die Stromachse befindet sich in $^1/_4$ bis $^1/_3$ der Tiefe, zuweilen näher an der Oberfläche. Man darf darin zuerst den Einfluß der Reibung an der Luft erblicken. Die Erfahrung lehrt, daß bei einem flußabwärts wehenden Winde die Stromachse sich der Oberfläche nähert und umgekehrt bei einem flußaufwärts wehenden Winde sich senkt. Insbesondere deutlich ist der Einfluß des Windes bei großen Flüssen: bei dem Mississippi liegt die Stromachse bei stillem Wetter in 0,317 der Tiefe, bei einem flußaufwärts wehenden starken Winde von 12 m pro Sekunde senkt sie sich bis zu 0,56 der Tiefe herab, bei einem flußabwärts wehenden Winde von derselben Stärke hebt sie sich bis zu 0,08 der Tiefe.

Aber schon daraus, daß selbst ein so starker, dem Strome vorauseilender Wind die Stromachse noch nicht ganz in die Oberfläche verlegen kann, zeigt, daß außer der Luftreibung noch etwas anderes dabei wirksam ist. Die Erfahrung lehrt, daß die Stromachse — ceteris paribus — um so tiefer liegt*), je tiefer und langsamer der Fluß. Bazin**) meint, daß wegen des geringen Widerstandes irreguläre, unregelmäßige Bewegungen an der Oberfläche leichter als irgend anderswo entstehen und einen ausnahms-

*) Bazin, Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts. Mém. Sav. Etr. Bd. XIX, S. 238.

**) Bazin, Recherches hydrauliques. Paris 1865. S. 180.

weise großen Teil der Energie verzehren, so daß für die fortschreitende Bewegung nur ein relativ kleiner Teil der Energie übrigbleibt. Diese Erklärung erscheint nicht besonders überzeugend, um so mehr, als sie sich mit der allgemein verbreiteten Meinung, daß die rauhen, unebenen Wände des Flußbettes es sind, welche die irreguläre Bewegung vor allem befördern, schlecht reimt. Mehr ansprechend ist die Erklärung A. H. Gibsons*), welcher die Erscheinung auf die Querzirkulation zurückführt. Nach ihm erheben sich an den Ufern aufwärtsstrebende Strömungen, von den Ufern fließt das Wasser in der Oberfläche nach der Mitte zu, in der Mitte senkt es sich, um auf dem Boden wieder auswärts nach den Ufern zu fließen. Gibson behauptet, solche Ströme an vielen Flüssen beobachtet zu haben. Ob die Querzirkulation sich in allen Einzelheiten so gestaltet, wie sie Gibson beschrieben hat, ist eine Frage, die wir hier nicht näher zu erwägen brauchen. Uns genügt die Feststellung, daß Wasser von einem Ufer nach der Stromachse hin in der Oberfläche geführt wird; darüber kann aber kein Zweifel bestehen. — Daß das in der Oberfläche vom Ufer nach der Mitte zu fließende Wasser eine geringere Geschwindigkeit mit sich bringt und auf diese Weise den Ort der maximalen Geschwindigkeit herabdrücken muß — ist ohne weiteres einleuchtend.

In der Stromachse ist die Geschwindigkeit 1,2 bis 2 mal so groß als die mittlere Geschwindigkeit V_m; am kleinsten ist sie an demjenigen Ufer, welches weiter von der Stromachse liegt: hier kann zuweilen selbst eine negative — d. i. flußaufwärts gerichtete — Geschwindigkeit auftreten. Sowohl in horizontaler als in vertikaler Richtung nimmt die Geschwindigkeit V mit wachsender Entfernung von der Stromachse in solcher Weise ab, daß — wenn die Abstände von der Stromachse als Abszissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten genommen werden — die Kurve das Aussehen einer Parabel, bald einer gewöhnlichen, bald einer kubischen, bald einer Parabel höherer Ordnung hat. Aber die Ähnlichkeit ist gewöhnlich so roh, daß nach Ansicht des Verfassers das Hineinzwängen der Beobachtungen in eine Parabelformel keinen Sinn hat.

A. H. Gibson, On the Depression of the Filament of Maximum Velocity in a Stream flowing through an open Channel. Nature, Bd. 80 (1909), S. 147.

§ 7. Flüsse und Bäche.

Ist die mittlere Geschwindigkeit V_m größer als $\sqrt{gp}$, wo g, wie gewöhnlich, die Beschleunigung der Schwerkraft und p die mittlere Tiefe bedeutet, dann können selbst die längsten Wellen nicht flußaufwärts wandern. Einen Wasserlauf, auf den dies zutrifft, nennt man „Bach". Ist dagegen die mittlere Geschwindigkeit V_m kleiner als $\sqrt{gp}$, dann können gewisse Wellen, wenigstens die längeren, flußaufwärts wandern. Einen solchen Wasserlauf nennt man „Fluß".

Das soeben gegebene Kriterium kann nicht immer in aller Strenge angewandt werden, und zwar aus zwei Gründen. Erstens bezieht sich die Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer Wellen eigentlich auf den Fall eines Wassers konstanter Tiefe, während ein Flußbett in der Regel eine in demselben Querschnitt von Ort zu Ort variable Tiefe hat. Zweitens ist die Geschwindigkeit in einem und demselben Querschnitt von Ort zu Ort verschieden: örtlich kann sie größer oder kleiner als die Geschwindigkeit langer Wellen sein. Infolgedessen ist die mittlere Geschwindigkeit V_m für die Fortpflanzung der Wellen nicht ausschließlich maßgebend. Dementsprechend fügen sich diejenigen Wasserläufe, bei denen die mittere Geschwindigkeit V_m dicht ober- oder unterhalb $\sqrt{gp}$ liegt, schlecht in die obige Klassifikation: sie bilden einen Übergangstypus. Deutliche Merkmale eines Flusses darf man nur bei Wasserläufen suchen, bei denen V_m wesentlich kleiner als $\sqrt{gp}$, deutliche Merkmale eines Baches, bei denjenigen, bei denen V_m wesentlich größer als $\sqrt{gp}$ ist.

Daraus, daß bei Bächen selbst die längsten Wellen sich nicht flußaufwärts verbreiten können, folgt, daß keine Störung sich vom Unterlauf dem Oberlauf mitteilen kann: der Oberlauf bleibt davon, was in dem Unterlaufe vorgeht, unabhängig. Bei einem Fluß hingegen pflanzen sich alle Störungen nicht nur abwärts, sondern auch aufwärts fort: der Lauf des Flusses ist davon, was im Unterlauf vorgeht, abhängig. Um den Unterschied zwischen Bach und Fluß klarzustellen, sehen wir zu, wie sie sich beim Übersetzen einer Schwelle verhalten.

Der Lauf eines Baches oberhalb der Schwelle bleibt davon unbeeinflußt; der Bach fließt so herunter, als wenn die Schwelle gar nicht existierte. Erst dicht vor der Schwelle entsteht eine

stürmische Bewegung, das Wasser wird zurückgeworfen: sprudelnd, schäumend, mit Gerassel setzt der Bach über die Schwelle. Der ganze Vorgang erinnert an die Meeresbrandung. Nach dem Übersetzen der Schwelle läuft der Bach weiter, ohne stehende Wellen zu bilden*). — Bei einem Fluß hingegen reagiert die Schwelle auf den Oberlauf: mit Annäherung an die Schwelle nimmt das Gefälle und die Geschwindigkeit allmählich ab und die Tiefe allmählich zu; das Übersteigen des Hindernisses geschieht ohne oder nur mit schwacher Brandung, erst nach der Schwelle entstehen flache stehende Wellen, je nach Umständen kann es selbst nach dem Übersetzen der Schwelle zu einer mehr unruhigen Bewegung kommen.

Über Vertiefungen des Grundes erniedrigt sich die Oberfläche des Baches ein wenig, über Buckeln bildet sie kleine Erhebungen. Bei den Flüssen entspricht einer Vertiefung am Grunde ein Buckel in der Oberfläche, einem Buckel am Grunde eine Vertiefung in der Oberfläche. Übrigens sind die Unebenheiten der Wasseroberfläche bei Flüssen weit weniger merklich als bei Bächen. Sie sind um so flacher, je größer die Tiefe im Verhältnis zu den Dimensionen der Unebenheiten des Grundes und je langsamer der Lauf.

Infolge der Unabhängigkeit von den Vorgängen am Unterlauf ist die Bewegung des Wassers in einem Bache der Bewegung fester Körper ähnlicher als die Bewegung des Wassers in einem Flusse. Das Wasser läuft voran, wird von den Hindernissen zurückgeworfen, es wirbelt und schäumt, die Bewegung ist stürmisch, die Änderungen der Richtung geschehen plötzlich. Die Horizontalprojektion eines Baches hat schärfere Umrisse als diejenige eines Flusses.

Dank der Unabhängigkeit von den Vorgängen im Unterlauf wird die Oberfläche des Wassers in einem Bache von den Gezeiten an seiner Mündung nicht gehoben, eine Bore pflanzt sich in einem Bache nicht aufwärts fort.

§ 8. Die Energie der Flüsse. Der Transport festen Materials.

Jedes Wasserelement in einem Flusse oder Bache besitzt ein gewisses Quantum potentieller und ein gewisses Quantum kine-

---

*) W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 205. Leipzig 1900.

tischer Energie. Die potentielle Energie drückt sich durch das Produkt mgh aus, wo m die Masse, g die Beschleunigung der Schwerkraft (also mg das Gewicht des Wasserelementes) und h dessen Höhe über dem Meeresspiegel bedeutet. Die kinetische Energie desselben Elementes drückt sich durch $\frac{1}{2} m v^2$ aus, wo v seine ganze instantane Geschwindigkeit bezeichnet. Am Meere angelangt, hat das Wasser seine ganze potentielle Energie verloren ($h = 0$!). Es besitzt aber in der Regel auch eine viel geringere kinetische Energie als im Oberlauf, denn die Erfahrung lehrt, daß in einer überwiegenden Mehrzahl der Fälle sämtliche Geschwindigkeiten mit Annäherung an die Mündung abnehmen.

Was ist aus der verlorenen Energie geworden? Ein Teil wurde durch die innere Reibung bei fortschreitender Bewegung und bei den komplizierten Bewegungen, welche unter dem Namen der pulsierenden Bewegung zusammengefaßt werden, verbraucht, ein zweiter wurde durch die Reibung an den Ufern und an der Flußsohle zerstört, ein dritter diente zur Erosion der Ufer und der Sohle und zum Transport festen Materials. Gröberes Material: Steine, Geschiebe, Schotter und Sand rollen auf dem Grunde und übereinander. Nach J. L. Leconte*) führt der Mississippi bei Hochwasser eine 3 bis 4 m dicke Schotter- und Sandschicht, welche die Sohle ihrer ganzen Breite nach bedeckt. Diese Bewegung erinnert an die Bewegung eines Gletschers oder noch besser an das Fließen des Schlammes, nur sind die festen Teilchen viel größer als beim Schlamm. So sieht die Massenbewegung aus, denn die Bewegung der einzelnen Körner ist viel komplizierter, oft von Ruhepausen unterbrochen. Kinematisch kann die Bewegung der einzelnen Körner als eine Kombination des Gleitens und des Rollens bezeichnet werden.

Ruhende Steine und Geschiebe werden durch den Stoß anderer Steine oder den Anprall des Wassers in Bewegung versetzt. Der Charakter, die Richtung und die Geschwindigkeit der Bewegung hängen von verschiedenen Umständen ab: 1. von den Massen der beiden zusammenstoßenden Körper; 2. von der Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers bezw. des Wassers; 3. von der Richtung

*) J. L. Leconte, zitiert bei Maksimow „Вопросы рѣчного быта“ (russ.) (Die Fragen des Lebens eines Flusses.) S. 609. Petersburg 1905. Das Buch ist eine Sammlung von originellen und übersetzten Abhandlungen über verschiedene Fragen der Flußkunde.

und von der Stelle des Zusammenstoßes; 4. von der statischen Reibung usw. — In einzelnen Fällen treten verschiedene bestimmende Ursachen in verschiedenen Kombinationen und Variationen auf, so daß jeder einzelne Fall zum Gegenstand einer besonderen mechanischen Aufgabe werden kann. Aber die Einzelfälle interessieren uns nicht, wichtig ist der Integraleffekt der Zusammenstöße. Es ist klar, daß die Anzahl der Stöße, ferner die Größe und Geschwindigkeit der durch Zusammenstöße aus dem Ruhezustand in Bewegung versetzten festen Körper — ceteris paribus — um so größer ist, je größer die Zahl, die Dimensionen und die Geschwindigkeit der bereits gerollten Steine und Gerölle.

Die Dimensionen der Gerölle, die das Wasser selbst in Bewegung versetzen kann, hängen vor allem von der Geschwindigkeit des Wassers ab. Der Widerstand eines auf dem Boden ruhenden Körpers ist ein Produkt aus dem Gewichte P des Körpers und dem Koeffizienten f der statischen Reibung. Der Körper setzt sich in Bewegung, wenn die Druckdifferenz in horizontaler Richtung dem Widerstand gleichkommt. Man kann annähernd annehmen, daß der Druck auf die Vorderseite des Körpers sich auf den statischen Druck beschränkt, während auf die Rückseite außer dem statischen noch ein dynamischer, der kinetischen Energie des Wassers und der Fläche S des zur Geschwindigkeit normalen Querschnittes proportionaler Druck wirkt. Dabei kann man den Umstand benutzen, daß die Dimensionen des zu bewegenden Körpers meist klein sind, und voraussetzen, daß alle anprallenden Wasserteilchen dieselbe Geschwindigkeit v besitzen und daß der statische Druck auf der ganzen Oberfläche des Körpers denselben Wert hat. — Bei der Bildung der Druckdifferenz zwischen der Vorder- und der Rückseite des Körpers heben sich die statischen Drucke auf; es bleibt nur der dynamische Druck übrig. Auf diese Weise erhält man die Gleichung:

$$^1/_2 k \varrho v^2 S = fP = f(\varrho_1 - \varrho) g \omega \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 15$$

Die Bedeutung der meisten Buchstaben wurde schon oben angegeben. Wir fügen nur noch hinzu, daß v die instantane wahre Geschwindigkeit des Wassers, ϱ dessen Dichte, ϱ_1 die Dichte des Gesteins, ω das Volumen, endlich k eine von der Gestalt des Körpers abhängige Konstante bedeutet. Diese Konstante, sowie f sind absolute Zahlen. Es wurde in die Gleichung 15 die wahre instantane Geschwindigkeit v eingesetzt, denn es ist klar, daß nicht

das Mittel V, sondern die instantane Geschwindigkeit v, die zuweilen V bedeutend übertreffen kann, über die Überwindung des statischen Widerstandes entscheidet.

Die Gleichung 15 kann offenbar folgendermaßen geschrieben werden:

$$v^2 = C \frac{\omega}{S}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16$$

wobei die Konstante

$$C = 2 \frac{f}{k} \frac{(\varrho_1 - \varrho)}{\varrho} g \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17$$

für alle Körper derselben Dichte und Gestalt denselben Wert hat.

Betrachten wir jetzt die Gleichung 16 etwas näher: es steht im rechtsseitigen Gliede im Zähler ein Volumen, im Nenner eine Fläche; somit hat der Bruch $\frac{\omega}{S}$ die Dimension einer Länge. Daraus folgt, daß die Wassergeschwindigkeit, welche den festen Körper in Bewegung setzt — ceteris paribus —, der Quadratwurzel aus seinen Lineardimensionen proportional ist: zur Bewegung einer Kugel von 4 cm Durchmesser ist eine nur doppelt so große Wassergeschwindigkeit nötig, als zur Bewegung einer Kugel von 1 cm Durchmesser.

Zur dritten Potenz erhoben gibt die Gleichung 16:

$$v^6 = C^3 \left(\frac{\omega}{S}\right)^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18$$

Da $\frac{\omega}{S}$ die Dimensionen einer Länge hat, so ist die Dimension von $\left(\frac{\omega}{S}\right)^3$ diejenige eines Volumens. Für eine Kugel ist z. B. $\frac{\omega}{S} = \frac{4}{3} r$, $\left(\frac{\omega}{S}\right)^3 = \frac{16}{9\pi} \cdot \omega$. Man kann somit die Gleichung 18 in der Weise deuten, daß die bewegende Wassergeschwindigkeit — ceteris paribus — der sechsten Wurzel aus dem Volumen des Körpers proportional ist.

Sehen wir jetzt zu, inwieweit dieser von W. Airy aufgestellte Satz durch die Beobachtung bestätigt wird. Nehmen wir z. B. die Versuche Blackwells*):

---

*) Nach F. H. Hooker, zitiert bei Maksimow, S. 476.

Art des Materials	Volumen der Körner	Geschwindigkeit am Grunde, bei welcher die Körner schon fortgeführt wurden
Ziegelstücke	42,4 ccm	53— 61 cm pro Sek.
„	78,0 „	69 — 76 „ „ „
„	303,1 „	84— 91 „ „ „
Oolithe . .	39,2 „	61— 69 „ „ „
„ . .	289,7 „	76— 84 „ „ „
Gerölle . .	32,2 „	76— 84 „ „ „
„ . .	169,9 „	91—100 „ „ „

Leichte Überschlagsrechnungen zeigen sofort, daß diese Versuche sich mit dem Gesetze der Proportionalität der Geschwindigkeit zur sechsten Wurzel des Volumens nicht übel vertragen. Abweichungen können zum Teil dadurch erklärt werden, daß man mit keinen regulären Körpern experimentierte, zweitens dadurch, daß die festen Körper oft erst in dem Momente bewegt werden, wo die beständig schwankende Geschwindigkeit v ein Maximum erreicht, während die Messung die Geschwindigkeit V ergibt. Freilich wachsen die Maxima von v zusammen mit V, aber beide sind doch nicht identisch.

Nehmen wir noch die Versuche Sainjons*):

Gerölle vom Durchmesser	Fortführende Geschwindigkeit am Boden
0,25 cm	25 cm pro Sek.
1,0 „	50 „ „ „
4,0 „	100 „ „ „
10,0 „	150 „ „ „
17,0 „	200 „ „ „
38,0 „	300 „ „ „
67,0 „ (?)	400 „ „ „ (?)

Die Quadrate der Zahlen der zweiten Kolumne verhalten sich annähernd so wie die Zahlen der ersten Kolumne, was wiederum mit dem Satze von Airy in seiner ersten Form stimmt. Aber die Beobachtungen Zschokkes**) fügen sich schlecht in das Gesetz von Airy. Andere Beobachtungsreihen konnten nicht zur Kontrolle herangezogen werden, da die meisten Autoren keine genauen Dimensionen der Gerölle angeben. Übrigens muß man stets im

*) Sainjon, a. a. O. S. 485.

**) Zschokke, a. a. O. S. 560.

Auge behalten, daß das in Bewegung Versetzen auch — und zwar in hohem Grade — von der Gestalt der Körper und ihrer Lagerung abhängt. Kugelförmige und zylindrische Steine werden viel leichter bewegt als z. B. flache, scheibenförmige. Nun drückt sich der Einfluß der Gestalt durch den Koeffizienten k, derjenige der Lagerung und der Beschaffenheit der Oberfläche durch f aus. Bei der Anwendung des Airyschen Satzes wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die Konstante C einen und denselben Wert für alle verglichenen Körper behält. Das kommt praktisch (vergl. Gleichung 17) darauf hinaus, daß das Verhältnis $\frac{f}{k}$ für alle verglichenen Körper denselben Wert haben soll. Man kann folglich zur Verifikation des Airyschen Satzes Beobachtungen, wo bei größerer Geschwindigkeit flaches Geschiebe und bei kleinerer rundes Gerölle fortgeführt wird, nicht verwenden.

In der letzten Tabelle steht am Ende eine Geschwindigkeit von 4 m pro Sekunde. In der Natur sind solche Bodengeschwindigkeiten äußerst selten; sie kommen nur bei reißenden Gebirgsbächen vor. In der Regel beläuft sich die Bodengeschwindigkeit auf Dezimeter, sie reicht aber aus, um weiche Bodenarten, Sande und Schotter zu erodieren. Weiche, feinkörnige Bodenarten werden schon bei einer Bodengeschwindigkeit von 8—10 cm pro Sekunde erodiert, gröberkörnige Bodenarten oder feiner Sand bei ca. 20 cm, grober Schotter von 1 cm Durchmesser bei 50 bis 70 cm, Gerölle, kleinere Steine bei ungefähr 1 m usw.

Die kleinsten festen Körper, welche die sogenannte Trübung bilden, werden nicht auf dem Boden gerollt, sondern vom Wasser getragen. Die Art und Weise, wie sie transportiert werden, verdient eine besondere Beachtung. — Das Fallen der Körper im Wasser wird durch die Schwerkraft beschleunigt, aber nur bis zu einem gewissen Grade. Der Widerstand des Mittels vermindert die Beschleunigung und setzt der Geschwindigkeit eine Grenze. Theoretisch wird die Beschleunigung erst nach unendlicher Zeit auf Null reduziert, aber in der Wirklichkeit verhält es sich anders: speziell wenn es sich um sehr kleine Körper handelt, wird die Beschleunigung schon nach einem Bruchteil einer Sekunde ganz unmerklich, und es ist erlaubt, die Geschwindigkeit als konstant und der Grenzgeschwindigkeit gleich zu betrachten.

Es gibt zwei Typen von Formeln zur Bestimmung der Grenzgeschwindigkeit: einerseits die Formel von Stokes, andererseits

Formeln von Vauthier und Rittinger*). Die Formel von Stokes, aus den hydrodynamischen Gleichungen (Gleichungen 2 dieses Kapitels) abgeleitet, bezieht sich, so wie diese, auf die geordnete Bewegung. Sie sieht folgendermaßen aus:

$$w = \frac{2}{9} \frac{\varrho_1 - \varrho}{\mu} g a^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

wo die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung wie vorher haben, während w die endgültige Fallgeschwindigkeit und a den Radius der Kugel bezeichnet. Wir haben eben vergessen zu sagen, daß die Formel von Stokes sich auf eine fallende Kugel bezieht.

Die Formeln Vauthiers und Rittingers sind den hydraulischen Formeln des dritten Typus, z. B. der Formel 13 nachgebildet; sie haben die Gestalt:

$$w = \text{Konst.} \times \sqrt{2a(\varrho' - \varrho)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20$$

Im C. G. S.-System hat die Konstante bei Vauthier den Wert 51,64, bei Rittinger 24,4. Den Vorzug darf man der Formel Stokes' (Formel 19) geben. Es ist erstens gar unwahrscheinlich, daß bei so kleinen Geschwindigkeiten, wie es die Geschwindigkeiten der fallenden Trübung sind, eine unregelmäßige Bewegung entstehe. Zweitens haben Versuche (in der Luft) mit Wachskügelchen die Formel von Stokes bestätigt; früher beobachtete Abweichungen von dieser Formel erklären sich dadurch, daß man mit Pflanzensporen operierte, die keine genaue Kugelform besitzen. Die Formel 19 liefert für sehr kleine Kügelchen kleinere Werte als die Formel 20. Nehmen wir z. B. ein Kügelchen mit 0,001 cm Durchmesser von der Dichte $\varrho_1 = 2$, wobei $\varrho = 1$ zu setzen ist. Im C. G. S.-System und bei 15° C hat μ den Wert 0,0113, $g = 981$ und die Formel 19 gibt 0,019 cm pro Sekunde. Indes gibt die Formel 20 für dasselbe Kügelchen mit Rittingers Konstante $w = 0{,}77$ cm pro Sekunde. — Nach Formel 19 braucht ein Kügelchen von 0,001 cm Durchmesser 14 Stunden und 23 Minuten, um in einem 10 m tiefen Wasser von der Oberfläche bis zum Boden zu sinken, ein Kügelchen von 0,0001 cm (ein Mikron) Durchmesser braucht hundert mal so viel Zeit, d. i. 59 Tage und 15 Stunden, um dieselbe Strecke zu durchfallen.

Doch scheint noch etwas anderes außer der Kleinheit der Teilchen die Ursache des langen Schwebens der Trübung zu sein.

*) Maksimow, a. a. O. S. 568.

Man hat versucht, die vertikale Komponente der pulsierenden Bewegung zu Hilfe zu ziehen, aber eine einfache Überlegung zeigt die Nichtigkeit dieser Ursache. Die vertikale Komponente der pulsierenden Bewegung ist hier aufwärts, dort abwärts gerichtet, auch an einer und derselben Stelle wechselt sie beständig das Vorzeichen: einmal wirkt sie in der Richtung der Schwerkraft, ein anderes Mal wirkt sie der Schwerkraft entgegen, nach längerer Zeit muß ihre Wirkung sich nahezu auf Null reduzieren. Dasselbe kann man von den Strömungen, die zur Querzirkulation gehören, sagen: hier befördern sie die Trübung hinauf, dort hinunter. Übrigens sinkt die Trübung mit derselben fabelhaften Langsamkeit auch in ganz ruhigem Wasser zu Boden. So hat sich Brewer*) überzeugt, daß hermetisch verschlossenes Flußwasser noch nach sechs Jahren opalisierte, was beweist, daß die feinste Trübung noch nicht ausgeschieden war.

Die Ursache liegt darin, daß Mineralien mit dem Wasser kolloidale Lösungen bilden. Die Körnchen sind von einer Aureole geschwellter kolloidaler Substanz umgeben. Die Dichte des so geschwellten Körnchens ist weit kleiner als die Dichte des trockenen Minerals und wahrscheinlich von der Dichte des Wassers wenig verschieden**). Den besten Beweis dafür, daß hier etwas wie eine Lösung stattfindet, gibt die bekannte Erscheinung, daß die Trübung sofort niederfällt, wenn eine Säure oder ein Salz dem Wasser zugesetzt wird. Ebenso ist es wohlbekannt, daß die Trübung ausfällt, wenn Flußwasser ins Meer gelangt und sich mit Meerwasser mischt. Es ist möglich, daß in Gegenwart des Salzes die feinsten Teilchen sich zu etwas größeren Klümpchen zusammenballen. Aber das ist nur eine Vermutung; man weiß nicht, was da eigentlich geschieht, nur die Tatsache steht fest, daß der Salzgehalt den Niederschlag der Trübung befördert. Wohlverstanden sinkt die Trübung auch im Salzwasser verhältnismäßig langsam, wie man sich durch

---

*) Brewer, On the Suspension and Sedimentation of Clays. Amer. Journ. of Sc., Ser. 3, Bd. 29.

**) Quincke, The Clearing of Turbid Solutions. Rep. Br. Ass. (Glasgow 1901).

W. Spring, La floculation des milieux troubles. Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas, Bd. 19 (1900), S. 222—294.

W. B. Hardy, Proceedings Roy. Soc. London, Bd. 66 (1900), S. 111–119.

R. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide. Jena 1905.

die Anwendung der Formel 19 bzw. 20*) auf kleine Partikeln überzeugen kann. Jedenfalls fällt sie aber unvergleichlich schneller als im Süßwasser.

Dank dem außerordentlich langsamen Sinken der Trübung ist das Transportvermögen eines Flusses in bezug auf die kleinsten Teilchen praktisch von der Geschwindigkeit des Laufes unabhängig. Was einmal im Wasser schwebt, wird bis an die Mündung befördert.

§ 9. Erosion und Ablagerung.

Im Unterlauf führen viele Flüsse nur die Trübung und etwas Sand auf der Sohle, so daß aus der Trübung eine gewisse Vorstellung von der Quantität der zum Meer hinausgetragenen festen Stoffe gewonnen werden kann. In einem Jahre führt die Donau 150 bis 250 Kubikkilometer Wasser in das Schwarze Meer, je nachdem das Jahr trockener oder nasser war. Diese Wassermenge enthält 50 bis 80 Millionen Tonnen Schlamm, und so viel wird in einem Jahre in das Schwarze Meer befördert. Andererseits folgt aus denselben Zahlen, daß ungefähr 330 g Trübung auf einen Kubikmeter Donauwasser entfallen. Gewisse Schätzungen geben etwas geringeren Schlammgehalt an. Der Schlammgehalt der Elbe und des Rheins ist bedeutend kleiner als der Schlammgehalt der Donau. Dagegen führen gewisse Alpenflüsse, wie der Var, die Durance, bedeutend mehr Schlamm: der Var an der Mündung 3577 g und die Durance bei Mérindol 1454 g pro Kubikmeter**). Viel Schlamm führen einige der großen Flüsse Asiens, nämlich Amu-Darja, Indus und Ganges, weniger schlammreich sind der Nil und der Mississippi, doch führt der Nil im August während des Hochwassers bis 1500 g Schlamm (Trübung) pro Kubikmeter und der Mississippi ebenfalls im August bis 1000 g.

Die Menge der chemisch gelösten Salze, Silikate usw. ist gewöhnlich kleiner als die Menge des im Wasser schwebenden Schlamms (der Trübung), aber mit jener vergleichbar. — Das Wasser der Themse oberhalb London enthält 289 g chemisch gelöster Stoffe pro Kubikmeter Wasser, das Wasser der Donau bei Budapest 187 g, des Amazonenflusses nur 79 g, des Nils 231 g, dagegen des kleinen Cheliff in Algerien 780 g***).

*) Besonders 19 gibt sehr kleine Geschwindigkeiten.

**) Zitiert nach Penck.

***) Ebenfalls.

Selbstverständlich muß man diese Zahlen mit Vorbehalt annehmen, da die Resultate, besonders bei den exotischen Flüssen, oft auf einer geringen Anzahl von Wasserproben beruhen. Immerhin reichen sie aus, um eine Vorstellung von den in Betracht kommenden Größen zu geben. Nach J. Roth enthält ein Kubikmeter Flußwasser durchschnittlich 167 g chemisch gelöster, fester Stoffe.

Der prozentuale Gehalt an chemisch gelösten Substanzen schwankt im Laufe des Jahres; er nimmt zu während des Niedrigwassers, wenn der Fluß sich hauptsächlich aus den Quellen nährt. Quellwasser ist reich an chemisch gelösten Bestandteilen. Denn bevor das Wasser zur Quelle gelangte, hat es oft einen langen Weg durch die Gesteine zurückgelegt; beim Durchsickern aber hat es Zeit gehabt, Mineralien in Lösung aufzunehmen. — Während des Hochwassers enthalten die Flüsse viel Regenwasser oder Wasser von der Schneeschmelze, das rasch auf der Erdoberfläche abgeflossen ist und keine Zeit hatte, Mineralien aufzulösen. Deswegen sind die Flüsse während des Hochwassers gewöhnlich an chemisch aufgelösten Bestandteilen ärmer.

Individuelle Differenzen zwischen einzelnen Flüssen hängen vor allem ab von der Löslichkeit der Gesteine im Entwässerungsgebiet des gegebenen Flusses.

Die Löslichkeit der Karbonate, speziell der Kalkkarbonate, wurde schon im siebenten Kapitel (§ 7) besprochen: es wurde dort hervorgehoben, daß kohlensäurefreies Wasser 13,1 g normalen Kalziumkarbonats pro metrische Tonne*) auflöst, wenn aber Kohlensäuregas im Wasser gelöst ist, so wird noch Kalziumbikarbonat gelöst. Die Menge dieses letzteren Salzes hängt direkt von der Quantität der in Lösung befindlichen freien Kohlensäure ab und kann die Quantität des normalen Karbonats mehrfach übertreffen. Durchschnittlich enthält Flußwasser nach J. Roth etwa 100 g Karbonate in einer metrischen Tonne, in einzelnen Flüssen jedoch ist der Kalkgehalt bedeutend größer. Die freie Kohlensäure wird zum Teil der Luft, zum Teil aber direkt den Pflanzen entnommen. Wenn Regenwasser auf einen mit Pflanzen bewachsenen Boden fällt, nimmt es — in Berührung mit den Pflanzen — Kohlensäure auf. Wenn es gleich nachher auf Kalkgesteine trifft, so kann

*) Eine metrische Tonne ist einem Kubikmeter Wasser äquivalent.

es selbstverständlich viel Kalziumbikarbonat aufnehmen. Dasselbe kalkreiche Wasser gelangt später in die Flüsse.

Natürlich ist das Transportvermögen chemisch aufgelöster Stoffe von der Geschwindigkeit des Flusses unabhängig.

Nach dieser Digression kehren wir zu der mechanischen Erosion und dem mechanischen Transport fester Stoffe zurück. Schon im vorigen Paragraphen wurde die zur Bewegung der Geschiebe nötige Bodengeschwindigkeit besprochen. — Selbstverständlich hat diese Geschwindigkeit an verschiedenen Stellen des Querschnittes etwas verschiedene Werte, und dementsprechend gibt es in demselben Querschnitte Orte, wo der Fluß gröberes und andere, wo er nur feineres Material transportieren kann.

Die Transportfähigkeit eines Flusses ist variabel, sie wächst gleichzeitig mit der Geschwindigkeit während des Hochwassers, nimmt ab während des Niedrigwassers. Sehr oft wird das gröbere Material nur während des Hochwassers transportiert, indem die Bodengeschwindigkeit während der übrigen Zeit das zum Transport nötige Maß nicht erreicht. Nach dem Hochwasser hört der Transport des gröberen Materials auf; es wird im Flußbett in Bänken abgelagert. Die Bänke bilden sich dort, wo bei fallendem Wasser die Sohlengeschwindigkeit zuerst unter das zur Beförderung des gröberen Materials nötige Maß herabgedrückt wird. Auf diese Weise hört zuerst der Transport des gröberen Geschiebes auf, dann des minder groben usw. Die Geschiebebänke warten, bis das nächste Hochwasser die Transportfähigkeit des Flusses wieder erhöht. Dann wandern sie eine Strecke flußabwärts, um nach beendetem Hochwasser sich wieder abzulagern.

Das transportierte Material besitzt eine gewisse Geschwindigkeit, eine gewisse Energie, die der Energie des Wassers entlehnt ist. Die vom Wasser auf das Geschiebe, den Sand, den Schotter übergegangene Energie ist dem Fluß in seinem Erosionswerk höchst nützlich, insbesondere dort, wo das Flußbett aus hartem Fels besteht. Sand und Schotter steigern die Erosionskraft des Wassers in hohem Grade: besonders wirksam sind die scharfkantigen, harten Quarzkörner, welche alle anderen Mineralien kratzen und schleifen. Trotzdem geht die Erosion im festen Fels immer langsam vor sich. Man kann sie nur durch feine Messungen oder auf Grund alter Urkunden feststellen.

Hier sind einige Fälle, in denen die Geschwindigkeit der Erosion bestimmt werden konnte.

Nach Brittlebank*) erodieren der Werribee und seine Zuflüsse (Australien) eine Zentimeterschicht

im Basalt in	100	Jahren
„ silurischen Sandstein in	66	„
„ Granit in	50	„
in glazialen Schichten**) .	40	„

Nach Häberle***) hat der Glanfluß (Pfalz) bei Rehborn seit der Römerzeit — also in etlichen 1800 Jahren — sein Bett um 3 m vertieft. Er fließt in einem Tonschiefer. Gegebenenfalls hat der Fluß eine Zentimeterschicht durchschnittlich in sechs Jahren erodiert. Bei dem Semna-Katarakte in Ägypten (eigentlich ist es nur eine Stromschnelle, d. i. eine Stelle, wo der Fluß ein ausschließlich großes Gefälle und eine ausschließlich große Geschwindigkeit besitzt, gleichzeitig ist das Bett verengt) befinden sich alte Hochwassermarken und Inschriften aus der Pharaonenzeit. Sie liegen weit höher als das höchste Niveau, bis zu welchem die Hochwasser des Nils gegenwärtig reichen. Auf Grund der Hochwassermarken aus der Zeit Amenemhats (2300 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung) berechnet J. Ball†) die Vertiefung des Flußbettes während 4200 Jahren auf 7,9 m, was einer Vertiefung von 1 cm in 5,3 Jahren entspricht. Die Gesteine, in die das enge Flußbett eingeschnitten ist, sind harte Gneise und Syenite. Die Wassermenge, welche in einem Jahre durch den Semna-Katarakt fließt, wird auf 100 000 Millionen Tonnen (100 Kubikkilometer) geschätzt. Die mittlere Geschwindigkeit soll verhältnismäßig gering sein: bloß 4,5 km pro Stunde, d. i. 1,25 m pro Sekunde während des Hochwassers, nur die Hälfte davon während des Niedrigwassers. Doch behauptet Ball, daß der Nil Steine von der Größe eines Menschenhauptes rollt. Bei der mäßigen mittleren Geschwindigkeit wäre die Sohlengeschwindigkeit gewiß nicht ausreichend, um so große Steine zu befördern. Wenn also die Angaben Balls richtig sind, so müssen wir die Erklärung darin suchen, daß der Boden des

---

*) Brittlebank, The Rate of Erosion of some River Valleys. Geol. Magazine 1900, S. 320 u. ff.

**) Wahrscheinlich sind die Konglomerate der angeblichen permischen Eiszeit gemeint.

***) Häberle, Zur Messung der Fortschritte der Erosion. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie 1907, Bd. II, S. 8.

†) J. Ball, The Semna Cataract or Rapid of the Nile. Quart. Journal of the Geol. Soc., Bd. 59 (1903), S. 65—79.

Flußbettes in der Stromschnelle stark geneigt ist und die Steine auf geneigter Fläche herunterrollen. Mit anderen Worten: man muß annehmen, daß die Schwerkraft hier zum Transport in merklicher Weise beisteuert, während in der Regel bei kleiner Neigung des Flußbettes der Anteil der Schwerkraft am Transport der Geschiebe kaum der Erwähnung wert ist. Ball berechnet, daß in einem Jahre ungefähr 60 Millionen Tonnen Sand, Gerölle und Steine die Stromschnelle passieren, wobei ungefähr 200 Kubikmeter (ungefähr 500 Tonnen) anstehenden Gesteins abgeschliffen werden.

So ist die Erosion in dem Semna-Katarakte bedeutend intensiver als die Erosion jener australischen Flüsse, von denen Brittlebank berichtet, aber man kann Beispiele einer noch weit intensiveren Erosion finden. Allgemein bekannt, von Lyell in seinen „Principles of Geology" zitiert, ist das Beispiel des Simeto in Sizilien. Sein Tal wurde 1603 während eines Ausbruches des Ätna durch einen Lavastrom abgedämmt. Es bildete sich ein See oberhalb des Dammes, der sich bald über die Lava ergoß. Das Gefälle war natürlich kolossal, der Fluß befand sich im Zustand eines reißenden Baches. Seit 1603 bis 1828, als ihn Lyell besuchte, hat der Simeto ein Bett von 15 bis 100 m Breite und 12 bis 15 m Tiefe ausgewaschen. Freilich ist die Lava weniger hart als der Syenit in der Semna-Stromschnelle.

Der kleine Wallibufluß*) auf der Insel St. Vincent hat in weniger als einem Monat ein Bett von 24 m Tiefe in den weichen, heißen Aschen, welche der Vulkan Soufrière 1902 ausgeworfen hat, ausgewaschen. Ebenso schnell, oft noch schneller, geht die Erosion vor sich, wenn künstliche Teiche und Seen sich über den Damm ergießen. Es entstehen dann auf kurzen Strecken ausnahmsweise große Gefälle: das Wasser strömt kataraktartig, Steine werden durch das eigene Gewicht auf geneigter Fläche befördert.

Eine sehr schnelle Erosion kann nicht lange dauern. Mit der Vertiefung des Flußbettes nimmt das Gefälle und mit ihm die Geschwindigkeit ab. Sobald aber die Geschwindigkeit abgenommen hat, vermindert sich unter gleichbleibenden äußeren Bedingungen auch die Erosion. Sie ist somit ein asymptotisch ausklingender, an Intensität stets einbüßender Prozeß. Die Zeit, nach welcher die Intensität, sagen wir auf die Hälfte, auf ein Zehntel ihres ur-

---

*) Tempest Anderson, Recent Volcanic Eruptions in the West Indies, Comptes Rendus du Xme Congrès Géologique, S. 739. Mexico 1906.

sprünglichen Betrages fällt, ist verschieden und von äußeren Bedingungen — vor allem von der Härte der Gesteine — abhängig. Ebenso ist die Zeit, während welcher unter gleichen übrigen Bedingungen eine bestimmte Vertiefung zustande gebracht wird, von der Härte der Gesteine abhängig. An obigen Beispielen haben wir gesehen, daß dieselbe Vertiefung, welche in sehr harten Gesteinen ganze Jahrhunderte erfordert, in weniger harten innerhalb weniger Jahre, in weichen sogar innerhalb einiger Stunden erzeugt wird.

Das Vorhandensein von Geschiebe und Sand ist eine notwendige Bedingung der Erosion in harten Gesteinen; ohne sie fällt die Erosion praktisch auf Null. Aber das ist ein Zufall, der nur beim Austritt aus einem See, in welchem der Fluß sich geklärt hat oder sonst in selten realisierten Bedingungen vorkommt. In Kalkgesteinen kann die chemische Erosion ohne Mithilfe des schleifenden Geschiebes wirksam sein.

Eigentlich kann sich ein Fluß so lange vertiefen, bis sein Gefälle überall auf Null sinkt. Aber das ist eine theoretische Grenze, die nur nach einer unendlichen Zeit erreicht werden könnte. Praktisch hört die Vertiefung auf kleineren oder größeren Strecken auf, wenn das Gefälle und die Geschwindigkeit so weit abgenommen haben, daß der Fluß eben nur das vom Oberlauf oder von den Zuflüssen gebrachte Material transportieren kann. Dann befindet sich die genannte Strecke im Zustande des Gleichgewichts: aus einem gegebenen Abschnitt wird so viel Material in einem Jahre hinausbefördert, wie ihm innerhalb derselben Zeit vom Oberlauf zugeführt wurde. Wenn, sagen wir während des Niedrigwassers, die Akkumulation über der Erosion die Oberhand gewinnt, so überwiegt umgekehrt die Erosion während des Hochwassers. Von einem genauen Gleichgewicht ist natürlich keine Rede: in einem Jahre fällt das Endresultat zugunsten der Erosion, im anderen zugunsten der Akkumulation aus, so daß der Zustand des gegebenen Abschnittes um einen stationären oder quasi-stationären Zustand hin und her schwankt. Wir sagen „quasi-stationären" Zustand, denn wären wir imstande, lange Zeitspannen, z. B. ganze Jahrtausende zu übersehen, so hätten wir wahrscheinlich sehr langsame, sogenannte säkulare Änderungen konstatiert. In der Natur spielen sich eine Menge Prozesse ab, die relativ zur menschlichen Lebensdauer, selbst relativ zu historischen Zeitperioden als stationär erscheinen; erst wenn man ein größeres Zeitmaß, sagen wir, die

Dauer einer geologischen Epoche nimmt, stellen sie sich doch als mit der Zeit variabel heraus.

Der Zustand des angenäherten Gleichgewichts tritt gewöhnlich bei kleinem Gefälle und kleiner Geschwindigkeit ein, wenn der Fluß schon nur feineres Material transportiert. Aber (vergleiche die Gleichung 13) um eine bestimmte, zum Transport eines gegebenen Materials notwendige Geschwindigkeit beizubehalten, muß ein kleinerer, mit einem kleineren hydraulischen Radius L behafteter Fluß ein größeres Gefälle haben. Daraus folgt, daß bei gleichem zu befördernden Material kleinere Flüsse den Gleichgewichtszustand bei relativ größerem Gefälle erreichen. Indem durch Vereinigung der Zuflüsse ein Fluß in der Regel in der Richtung nach der Mündung wächst, so folgt des weiteren noch, daß das Gefälle im Gleichgewichtszustand in der Richtung nach der Mündung abnehmen muß. Dazu gesellt sich noch ein anderer Umstand: das feste Material wird flußabwärts feiner, indem durch Zusammenstöße und Reibung die Körner verkleinert und abgeschliffen werden. Dementsprechend nimmt die zur Beförderung des festen Materials nötige Geschwindigkeit flußabwärts ab, und das Gefälle muß um so mehr abnehmen.

Bei alten Flüssen, welche schon seit langer Zeit auf dem größten Teil ihres Laufes den Gleichgewichtszustand erreicht haben, kann man in der Regel das Abnehmen des Gefälles mit Annäherung an die Mündung konstatieren. So hat die Elbe in Böhmen ein mittleres Gefälle von 0,00035 und nahe bei Hamburg von 0,0000315, der Rhein von Konstanz bis Straßburg im Mittel 0,00114 und von Straßburg bis Rotterdam 0,00045, die Donau zwischen Donaueschingen und Wien im Mittel 0,00049, zwischen Wien und der Mündung 0,00009; der Mississippi bei Cairo hat ein Gefälle von 0,000094, bei Columbus wieder 0,000108, von hier nimmt das Gefälle allmählich ab und erreicht das Minimum 0,000022 vor der Verästelung in das Delta, die Arme haben ein Gefälle zwischen 0,000031 und 0,000037. Die Zunahme des Gefälles in den Armen bestätigt die allgemeine Regel; sie haben nämlich kleinere Querschnitte und kleinere hydraulische Radien als der ungeteilte Hauptstrom.

Nehmen wir einen Fluß, dessen Gefälle stetig vom Oberlauf zum Unterlauf abnimmt. Es ist klar, daß der Vertikalschnitt seiner Oberfläche eine nach oben konkave, sich asymptotisch der Horizontalen nähernde Kurve darstellt. Nach einigen Autoren soll

diese Kurve ein Parabelstück, nach anderen ein Zykloidenstück sein. Eine gewisse Ähnlichkeit ist nicht zu verkennen, aber es ist bloß eine Ähnlichkeit. Die Kurven, welche die Natur erzeugt, sind beinahe ausnahmslos transzendent.

In diesen Überlegungen haben wir von geologischen Deformationen ganz abgesehen. Dieselben vollziehen sich meist mit einer solchen Langsamkeit, daß ihr Einfluß nur bei säkularen Variationen des Flußzustandes in Rechnung zu ziehen ist. In welchem Sinne wirken sie nun aber?

Eine allgemeine Antwort auf diese Frage gibt es nicht: die Deformationen sind so mannigfaltig, ihre Einflüsse so kompliziert, daß die Geschichte jedes einzelnen Flusses in dieser Hinsicht für sich analysiert werden muß. Nur eine Kategorie der Deformationen wirkt in der Mehrzahl der Fälle in einem und demselben Sinne, nämlich die der isostatischen Deformationen. Dieselben heben die abgetragenen Gebirge und Hochländer in die Höhe und drücken die Akkumulationsgebiete in die Tiefe, folglich wirken sie im Sinne der Erhaltung der relativen Höhenunterschiede. Daß sie dieses Ziel nicht vollkommen erreichen können, wurde bereits oben (sechstes Kapitel, § 7) hervorgehoben. Jedenfalls verzögern sie die Einebnung und befördern auf diese Weise die Erhaltung der Gleichgewichtszustände bei den Flüssen.

§ 10. **Mäander.**

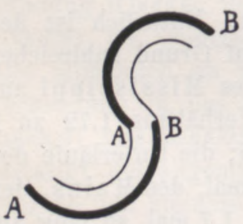
Ein Blick auf eine geographische Karte zeigt, daß die Flüsse in Windungen laufen, sehr oft ist es möglich, eine ideale Linie — gleichsam eine Axe des Laufes — zu ziehen, von welcher der wahre Lauf bald links, bald rechts abweicht. Natürlich ist der wahre Lauf länger als jene ideale Linie. Auf Grund zahlreicher Daten fand J. Y. Buchanan, daß der Lauf des Mississippi auf einer Strecke von 1000 engl. Meilen*) im Verhältnis 1,72 zu 1 länger ist als der ideale Lauf ohne Windungen; die Unterläufe der Donau, des Rheins und der Aar sind zweimal, des Mains, der Maas und der Themse 1,68 mal, der Lahn 1,7 mal so lang als der ideale Lauf ohne Windungen. Die Windungen sind eine allgemeine, allen kleinen sowie großen Flüssen gemeinsame Erscheinung, sie sind weder durch die Topographie noch durch den

*) J. Y. Buchanan, Windings of Rivers, Nature, Bd. 77, S. 100—102.

geologischen Bau des betreffenden Gebietes bedingt, was man am besten daraus erkennt, daß die windungsreichsten Läufe sich in Alluvialebenen befinden. Hier ist das Gebiet, innerhalb dessen das Flußbett liegt, vom Fluß selbst geschaffen: die Erklärung der Windungen durch den Einfluß der Topographie und des geologischen Baues führt somit zu einem offenbaren Zirkelschluß. Doch war diese Erklärung ehemals sehr verbreitet: der berühmte Guglielmini (italienischer Hydrolog, der um das Ende des 17. Jahrhunderts lebte) sagt ausdrücklich, daß der natürliche Flußlauf geradlinig sein muß und daß die allgemeine Ursache der Windungen im ungleichen Widerstand der Gesteine zu suchen ist. Noch zu Anfang des 19. Jahrhunderts mußte Lecreulx*) diese Meinung bekämpfen.

Die Windungen erscheinen gewöhnlich nicht isoliert, sondern reihenweise. Sehr oft kann man die Meinung hören, daß das reihenweise Auftreten der Windungen davon herrührt, daß das von einem Ufer zurückgeworfene Wasser zum entgegengesetzten Ufer eilt, um dort wieder zurückgeworfen zu werden. Der Grundgedanke ist gewiß richtig, doch läßt sich die Bewegung des Wassers im Flusse nicht ohne weiteres auf die Gesetze der Reflexion fester elastischer Körper zurückführen. Die Erfahrung lehrt, daß reihenweise auftretende Windungen vor allem bei langsamen, sich nicht vertiefenden, in weiche Bodenarten eingebetteten Flüssen beobachtet werden. Bei solchen Flüssen konzentriert sich die Erosion auf die Ufer; es wird nämlich abwechselnd je ein Ufer ausgewaschen, während am gegenüberliegenden festes Material abgelagert wird.

Fig. 52.



Damit wollen wir nicht behaupten, daß Windungen bei schnellen oder in harte Gesteine eingebetteten Flüssen fehlen. Eine solche Behauptung stünde mit den Tatsachen in Widerspruch. Wir wollten nur die günstigsten Existenzbedingungen für Windungen anführen. — Jeder, der Gelegenheit hatte, einen gewundenen Flußlauf innerhalb weicher Alluvionen zu beobachten, konnte sich überzeugen, daß konvexe**) Ufer unterwaschen werden, daß an konkaven Sedimente

*) Lecreulx, Recherches sur la formation des rivières, S. 52. Paris 1804.

**) Konvex sind die mit dicken, konkav die mit dünnen Linien bezeichneten Ufer. (Fig. 52.)

abgelagert werden, daß Windungen durch seitliche Erosion entstehen und wachsen.

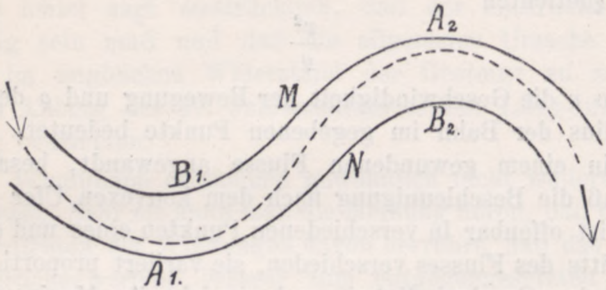
Um den Mechanismus der Windungsentwicklung zu verstehen, muß man zuerst die Eigenschaften der Bewegung in einer krummen Bahn ins Auge fassen. Bei einer krummlinigen Bewegung besteht immer eine senkrecht auf die Tangente zur Bahn und längs des Krümmungsradius von der konkaven nach der konvexen Seite der Bahn gerichtete Zentrifugalbeschleunigung. Der Größe nach ist sie dem Quotienten

$$\frac{v^2}{\varrho}$$

gleich, wo v die Geschwindigkeit der Bewegung und ϱ den Krümmungsradius der Bahn im gegebenen Punkte bedeutet. Auf das Wasser in einem gewundenen Flusse angewandt, besagt diese Regel, daß die Beschleunigung nach dem konvexen Ufer gerichtet ist. Sie ist offenbar in verschiedenen Punkten eines und desselben Querschnitts des Flusses verschieden, sie variiert proportional zum Quadrate der Geschwindigkeit und erreicht ihr Maximum in der dynamischen Axe. Die Variation des im Nenner stehenden Krümmungshalbmessers hindert daran nicht: wir werden sofort sehen, daß der Krümmungshalbmesser seinerseits in der Stromaxe sein Minimum erreicht. Dank der größeren Zentrifugalbeschleunigung muß die Stromaxe nach dem konkaven Ufer verschoben werden, was die Erfahrung auch bestätigt. Da dies in jeder Windung — also einmal rechts, einmal links abwechselnd — geschieht, so hat die dynamische Axe im allgemeinen größere Krümmungen als die Mittellinie des Flusses, sie geht von einem Ufer zum anderen über. Dadurch erklärt sich die obige Bemerkung, daß in den Konvexitäten die Krümmungsradien der Stromaxe kleiner sind als die Krümmungsradien anderer Stromfäden. — Im allgemeinen werden die Stromfäden nach der Geschwindigkeit geordnet: je größer die Geschwindigkeit, desto mehr wird der betreffende Stromfaden zum konvexen Ufer verschoben. Daraus folgt, daß neben der fortschreitenden Bewegung längs des Flusses noch eine Querzirkulation vorhanden sein muß. Während das schneller laufende Wasser nach dem konvexen Ufer gedrückt wird, muß das langsamer fließende zum entgegengesetzten Ufer ausweichen. Das erste Wasser befindet sich jedoch in der Stromaxe und ihrer Umgebung, also oben, das zweite unten; somit bildet die nach dem konvexen Ufer gerichtete Strömung den oberen, die nach dem konkaven Ufer gerichtete den

unteren Ast der Querzirkulation. An den Ufern biegt das Wasser von einem Aste zum andern um. In der beifolgenden Zeichnung (Fig. 53) sind zwei Windungen abgebildet: in der ersten, linksseitigen, im Querschnitt $A_1 B_1$, zirkuliert das Wasser in Vertikalebenen im Sinne des Uhrzeigers, in der zweiten, rechtsseitigen, im Querschnitt $A_2 B_2$, entgegengesetzt (der Fluß fließt von links nach rechts); im Querschnitt MN, wo die dynamische Axe sich in der

Fig. 53.



Mitte des Flusses befindet, gibt es keine ausgesprochene Zirkulation*). Mit der fortschreitenden Bewegung zusammengesetzt gibt die Querzirkulation Schraubenbewegungen.

Wenn wir jetzt voraussetzen, daß der Fluß von weichen Gesteinsarten umgeben ist, so können wir leicht zum folgenden Bild der Entwicklung der Mäander gelangen. Die dynamische Axe ist nach den konvexen Ufern verschoben, diese werden unterwaschen, besonders in der Gegend von A_1 und A_2, wo die Stromaxe sich den Ufern am meisten nähert. Das erodierte Material wird von der unteren Strömung auf die andere Seite weggeführt und flußabwärts — teils noch in derselben Windung, teils erst in den folgenden — abgesetzt. Die Akkumulation erfolgt an den konkaven Ufern, hauptsächlich um B_1 und B_2, wo die Geschwindigkeit ihr Minimum erreicht. Gelangt das am konvexen Ufer erodierte Material größtenteils noch in derselben Windung zum Absatz, so wird die Sedimentierung das Stück nach B_1 bzw. nach B_2 (in der Richtung des Flusses gerechnet) bevorzugen. Übrigens verschieben

*) Von anderen Ursachen der Querzirkulation, sowie von der gleichzeitigen pulsierenden Bewegung können wir vorläufig absehen.

Wo die Stromaxe tief liegt, ist die Ausbildung einer zweiten Zirkulation oberhalb der ersten nicht unmöglich. Der obere Kreis müßte in entgegengesetzter Richtung wie der untere durchlaufen werden.

sich die Orte der Erosion und der Sedimentation mit der Entwicklung der Windungen, und zwar können sie sich je nach den Umständen bald vorwärts, bald rückwärts verschieben.

Die Keime der Entwicklung birgt jede Windung in sich selbst. Ist die Horizontalprojektion des Flußbettes auch noch so wenig gekrümmt, so muß infolge der Zentrifugalbeschleunigung die dynamische Axe nach dem konvexen Ufer verschoben werden. Dieses Ufer wird unterwaschen und muß zurücktreten, während am konkaven Ufer, wo die Geschwindigkeit minimal ist, Sedimente abgelagert werden. — Sobald sich nur eine auch noch so wenig gekrümmte Windung gebildet hat, müssen sich andere Windungen bilden, indem die dynamische Axe vom Scheitel A des konvexen Ufers schief zur geometrischen Axe des Flusses auf die gegenüberliegende Seite übergeht. Dabei wirkt nicht nur die Trägheit, sondern auch das Gefälle: infolge der Verschiebung der schnelleren Stromfäden zum konvexen Ufer bildet sich um A herum eine kleine Erhebung der Wasseroberfläche, so daß das größte Gefälle nicht parallel zur Mittellinie, sondern etwas schief zu dieser verläuft. Andererseits bewirkt die Reaktion auf die stromaufwärts gelegenen Querschnitte eine Verlegung der dynamischen Axe auf die gegenüberliegende Seite, auch oberhalb der gebildeten Windung, so daß auch oberhalb der ersten Windung eine einseitige Erosion platzgreift und mit der Zeit eine neue Windung erzeugt. Auf diese Weise entsteht eine Reihe von Windungen nicht nur unterhalb, sondern auch oberhalb der ersten Windung.

Selbst bei einem künstlichen geraden (natürlich nicht ausgemauerten) Kanal können und müssen Windungen entstehen. Irgendeine kleine Krümmung des Bettes, eine lokal stärkere einseitige Erosion — durch geringere Widerstandsfähigkeit einer Wand oder durch irgendeine lokale Störung verursacht — gibt den Anlaß zur Bildung einer schwachen Windung, welcher bald andere, sowohl stromabwärts wie stromaufwärts, folgen. Mit der Zeit verwandelt sich der gerade Kanal in einen gewundenen. Einen großartigen experimentellen Beleg dafür hat man in den Kanälen, welche in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts behufs Entwässerung der *Polesie*-Sümpfe (*Pripet*-Sümpfe) in Rußland gezogen wurden: heute sind sie schon voll Windungen.

Kurz und gut: ein gerader Flußlauf ist eine instabile Bewegungsform. Eine auch noch so kleine Störung oder Abweichung kann einen geraden in einen gewundenen Lauf verwandeln. Die

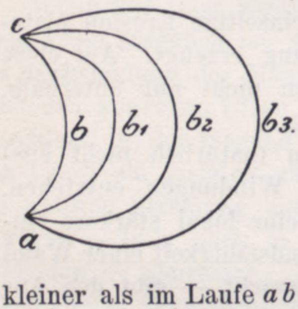
Neigung zur Bildung von Mäandern liegt in der Natur der Flüsse: nicht für das Vorhandensein, sondern für die Abwesenheit der Mäander muß eine äußere Ursache gesucht werden.

Kleine Flüsse bilden kleine, große Flüsse bilden große Windungen. Es ist klar, daß die Windungen großer Flüsse ebenfalls größer sein müssen, da die Dimensionen einer Windung die Breite des| Flusses wenigstens einigemal übertreffen müssen: der Fluß kann doch nicht sich selbst kreuzen. Weiter beanspruchen innerhalb einer größeren Wassermasse die reziproken Reaktionen verschiedener Teile mehr Zeit als in einer kleineren, woraus folgt, daß die Richtung der Bewegung sich nicht so schnell ändert.

Wir haben oben gesagt, daß jede Windung die Keime der Weiterentwicklung in sich birgt; jetzt müssen wir sagen, daß jede Windung auch die Keime ihrer Vernichtung enthält. Um uns davon zu überzeugen, brauchen wir nur die Entwicklung der Windungen weiter zu verfolgen.

Wir wissen schon, daß die Zentrifugalkraft, welche die dynamische Axe zum konvexen Ufer verschiebt, proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Krümmungsradius ist. Mit dem Wachstum der Windung wächst die Länge der zwischen a und c enthaltenen Strecke*). Aber die Höhendifferenz zwischen a und c bleibt erhalten, folglich nehmen Gefälle und Geschwindigkeit ab. Anfangs nimmt noch der Krümmungsradius ab; so ist z. B. im Laufe $a b_1 c$ die Krümmung durchschnittlich größer, d. h. der Krümmungsradius durchschnittlich kleiner als im Laufe $a b c$; noch im Laufe $a b_2 c$ ist der Krümmungsradius durchschnittlich kleiner als im Laufe $a b c$ usw. (Fig. 54.) Erst wenn die Windung die Gestalt einer Schlinge annimmt, hört die Abnahme des Krümmungsradius auf. Bei einer weiteren Ausdehnung bleibt der größte Teil der Windung angenähert einem

Fig. 54.

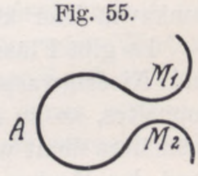


*) Der Einfachheit wegen sehen wir die Punkte a und c als unbeweglich an. Hätten wir diese Voraussetzung fallen lassen, so würden wir mit Ausnahme einiger Fälle dieselben Resultate wie vorhin, nur nach längeren Überlegungen erhalten. Übrigens führen die Ausnahmefälle zu interessanten, aber für das allgemeine Schema des Entwicklungsganges der Windungen bedeutungslosen Kombinationen.

immer weiter wachsenden Kreissegment ähnlich, wobei der Krümmungsradius wachsen muß. Folglich nimmt bei einer wachsenden Windung der Zähler des Bruches $\frac{v^2}{\varrho}$ beständig ab, während der Nenner nur bis zu einem gewissen Minimum abnimmt, um darnach zu wachsen. Daraus folgt, daß bei einer wachsenden Windung die Zentrifugalkraft anfangs wächst*), dann ein Maximum**) erreicht, um nachher beständig abzunehmen.

Was geschieht nun mit der Windung in diesem zweiten Entwicklungsstadium, wenn Geschwindigkeit und Zentrifugalkraft abnehmen? Die dynamische Axe wird nicht mehr so fest an das konvexe Ufer gedrückt; übrigens ist die Geschwindigkeit selbst auf dieser Axe bedeutend geringer als vorher, die Erosion des konvexen Ufers nimmt ab und hört zuletzt ganz auf. Damit ist der Entwicklung der Windung ein Ende bereitet. Sie kann jetzt nur noch so lange fortbestehen, bis eine Änderung im Zustande des Flusses ihre Lebensbedingungen ändert. Zuweilen verlegt ein Hochwasser den Lauf, zuweilen bildet sich eine neue Reihe von Windungen, welche die alten zerstören oder umbilden. Zuweilen gehen die Windungen durch eine Art Selbstmord zugrunde. Sehr weit fortgeschrittene Windungen können einander so weit nähern, daß (z. B. zwischen M_1 und M_2, Fig. 55) nur eine schmale Landenge dazwischen bleibt. Die Ufer bei M_1 und M_2 sind konvex, folglich werden sie unterwaschen und es kann geschehen, daß bei einer immer weiter fortschreitenden Entwicklung der Windungen die Landenge zuletzt durchbrochen wird. Dann wendet sich der Fluß nach der Richtung des größeren Gefälles und nimmt einen kürzeren Lauf, während durch den längeren Arm $M_1 A M_2$ nur ein Teil der Wassermenge fließt. Die Geschwindigkeit nimmt infolgedessen ab (vergl. oben § 9), das Bett wird von Sedimenten, besonders beim Ein- und Ausgang verstopft. Nach einer gewissen Zeit wird die alte Windung vom Flusse abgeschnitten und in einen halbmondförmigen See verwandelt. In der Alluvialebene des Mississippi sind solche halbmond-

Fig. 55.



*) Es versteht sich von selbst, daß diese Sätze sich auf durchschnittliche Verhältnisse beziehen; bei unsymmetrisch ausgebildeten Windungen können verschiedene lokale Ausnahmen stattfinden.

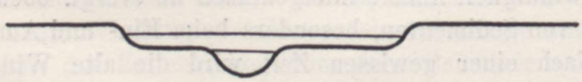
**) Die Zentrifugalkraft erreicht ihr Maximum immer, bevor der Krümmungsradius sein Minimum erreicht hat.

förmigen Seen sehr häufig, sie heißen dort *„ox-bows“*, an der Wolga heißen sie *„Starica“ (Staritza)*. — Die Vernichtung der Windung wird oft durch Hochwasser beschleunigt: niedrige schmale Landengen, wie sie besonders in Alluvialebenen vorkommen, werden während eines Hochwassers leicht überflutet und durchsägt.

Überhaupt bringen die Hochwasser die meisten Änderungen in der Konfiguration der Windungen hervor. Viele Flüsse mit großen Schwankungen der Wassermenge „arbeiten“ nur während des Hochwassers; dann werden die Ufer unterwaschen, Windungen entwickelt, verändert, zerstört oder abgeschnitten. Während des niedrigen Wasserstandes hört die Arbeit auf, der Fluß kann selbst das zu große Bett nicht ausfüllen, er schleppt sich träge im tiefsten Teil desselben dahin. Infolge geringer Geschwindigkeit ist die Zentrifugalkraft zu schwach, um die dynamische Axe zum konvexen Ufer zu drängen. Oldham*) behauptet sogar, daß bei einigen indischen Flüssen bei niedrigem Wasserstande der Strom stellenweise merklich rascher im Seichtwasser am konkaven Ufer als im tieferen Kanal am konvexen Ufer fließt. Die Erklärung dafür darf man im größeren Gefälle auf dem kürzeren Wege suchen. Es ist ja klar, daß zwischen zwei Punkten einer Windung, welche an entgegengesetzten Seiten des Scheitels liegen, der Weg am konkaven Ufer kürzer ist als am konvexen.

Es gibt Flüsse, die sich den geänderten Bedingungen bei Hoch- und Niedrigwasser in solcher Weise anpassen, daß sie sich ein doppeltes, so zu sagen zweistöckiges, Flußbett bilden: das untere schmälere dient während der übrigen Jahreszeit, das obere nur während des Hochwassers als solches. (Fig. 56.) Nach Richthofen soll der *Yang-tse-kiang* ein überaus ausgeprägtes zweistöckiges Bett in einem Teile seines Laufes haben.

Fig. 56.



Nach der hier entwickelten Anschauung muß jeder Fluß die Neigung haben, Windungen zu bilden, indem ein gerader Lauf eine instabile Bewegungsform an sich darstellt. Wir müssen also jetzt erklären, warum schnelle Flüsse und Bäche gewöhnlich

*) R. D. Oldham, The Windings of Rivers in Plains. Nature, Bd. 77 (1907), S. 55.

weniger gewunden sind als langsame, in Alluvialebenen fließende Ströme.

Ein schneller Fluß in weichen Bodenarten wird sich in wenigen Jahren vertiefen, das Gefälle bis zur Grenze, bei welcher die Vertiefung aufhört, herabdrücken und sich in einen langsamen Fluß verwandeln. Deswegen können wir in der Regel schnelle Flußläufe nur in harten Gesteinsarten beobachten. Aber in harten Gesteinsarten ist die seitliche Erosion schwach, denn zum Schleifen der Felsen braucht der Fluß Schotter und Sand, diese aber befinden sich auf der Sohle, nicht an den Seitenwänden. Folglich können sich — nicht deswegen, weil die Neigung dazu fehlt, sondern weil die Mittel dazu fehlen — die Windungen nicht gehörig entwickeln, und der Fluß wird gezwungen, seine Arbeit auf die Sohle zu konzentrieren.

Doch kennen wir schnelle Flüsse, die Windungen bilden. Der *Buffalo*-Fluß, welcher aus dem *Buffalo*-See (einem kleinen See in *Minnesota,* etliche 19 km nördlich von *Detroit*) nach dem *Red-River of the North* fließt (die Mündung befindet sich bei *Georgetown*), hat im oberen Teile seines Laufes zwischen *Hawley* und *Stockwood* auf einer Strecke von 12 engl. Meilen (19 km) ein großes Gefälle. Aus den Daten R. F. Griggs' *) berechnet sich sein Gefälle zu 0,0032, was dem Gefälle der Bäche nahekommt. Die Geschwindigkeit ist sehr groß, das Rauschen des Flusses ist mehr denn eine Viertelmeile hörbar. Doch hat er einen stark gewundenen Lauf, und da die Schotter, in welche sein Bett eingelagert ist, einen geringen Widerstand leisten, bildet der Fluß stets neue Windungen und zerstört bzw. modifiziert die alten.

Der *Dnjestr* in Podolien ist nicht so rasch wie der *Buffalo*-Fluß, und die silurischen, nahezu horizontalen Schichten, in welche sein Bett eingeschnitten ist, sind bei weitem nicht so lose, wie die Schotter im Bett des *Buffalo*-Flusses. Doch müssen diese Schichten für die seitliche Erosion nicht unempfindlich sein, denn das Tal und das Bett des *Dnjestrs* zeigen unzweifelhafte Spuren einer gleichzeitigen Vertiefung und Mäanderbildung**). (Tafel III.)

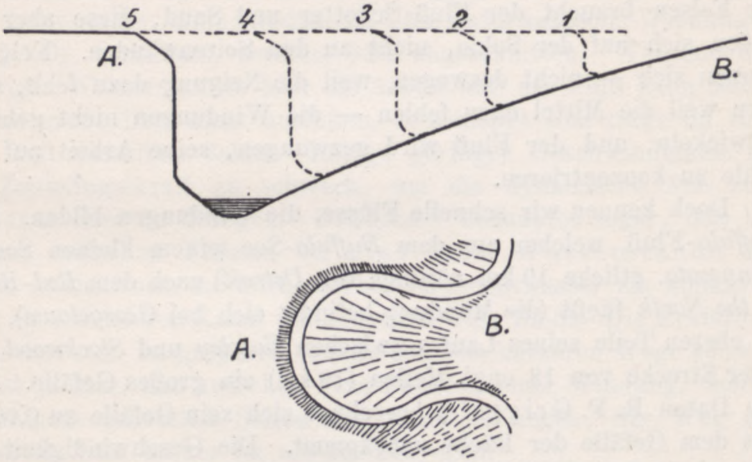
---

*) R. F. Griggs, The Buffalo River, an interesting Meandering Stream. Bull. of the Amer. Geogr. Soc., Bd. 38 (1906), S. 168—177.

**) Im Gegensatz dazu sind die zahlreichen und großen Windungen des durch seinen *Cañon* berühmten Coloradoflusses in Nordamerika nicht vom gegenwärtigen schnellen, sondern vom alten, trägen Colorado gebildet worden. Vor Jahren floß der Colorado in einem breiten Tal, dessen Über-

Der *Dnjestr* (wie seine Nebenflüsse) bildet zahlreiche und große Windungen. Er fließt in einem tiefen Tal mit steilen, oft ganz senkrechten Abhängen. Vertikale Wände begleiten die konvexe Seite der Windungen, sanft geneigte Böschungen die konkave. (Fig. 57.) Die Windungen umschließen sanft zum Fluß abfallende Halbinseln. Gegenüber einer Halbinsel (bei *A*) fallen die steilen Abhänge oft direkt zum Fluß ab, so daß die Wand des Bettes eine

Fig. 57.



Fortsetzung der Talwand bildet. Man sieht dieses Merkmal sehr gut in der beigefügten Ansicht des *Dnjestr*-Tales zu *Zaleszczyki (Galizien)*. — Ähnliche Täler haben die Ardennenflüsse, besonders der *Semois**), die Flüsse der Vordereifel**), die *Saane (Sarine)* bei Freiburg***). Folglich bilden sich Windungen auch in harten Gesteinen, gleichzeitig mit der Vertiefung des Flusses,

reste in der sogenannten „*Esplanade*", hoch über dem heutigen Fluß, sichtbar sind. Er hatte einen langsamen, stark gewundenen Lauf. Dann wurde, infolge geotektonischer Prozesse, auf welche wir hier nicht einzugehen brauchen, das Gefälle stark vergrößert, der Fluß gewann eine größere Geschwindigkeit und vertiefte sein Bett an Ort und Stelle. Die Hebung des umliegenden Geländes dauerte lange an, und es bildete sich ein äußerst tiefes Tal. Die Windungen dieses Tales sind durch einfache Vertiefung der alten Mäander um nahezu 1500 m entstanden.

*) Penck, Länderkunde von Europa. Belgien. S. 518. (Leipzig 1889).

**) Schneider, Studien über Talbildungen aus der Vordereifel. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, S. 43 und ff. Berlin 1883.

***) J. Brunhes und C. Calciati, De la prédominance de l'érosion. C. R. Acad. de Paris, Bd. 146 (1908), S. 375–376.



Rudzki, Physik der Erde. Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.

Dniestertal bei Zaleszczyki (Galizien).

Nach einer Photographie von Dr. J. Nowak.

sobald die seitliche Erosion eine gehörige Intensität besitzt. Dafür sind in weichen Bodenarten eingebettete, aber zu seichte Flüsse — wie die *Wolga* — wenig gewunden, nur die dynamische Axe und mit ihr das Fahrwasser windet sich stark und geht beständig von einem Ufer zum andern über.

Die Querschnitte des Flußbettes in den Windungen sind asymmetrisch. An den unterwaschenen konvexen Ufern finden sich die größten Tiefen. Dort finden sich auch Strudel, welche tiefe Löcher auswaschen. An den gegenüberliegenden konkaven Ufern ist das Wasser seicht. In den Übergangsstrecken zwischen den einzelnen Windungen sind die Querschnitte mehr symmetrisch, das Fahrwasser befindet sich in der Mitte, aber die Tiefen sind gewöhnlich geringer als an den erodierten Ufern in den Windungen. Oft sind die Strecken mit erodierten Ufern gleichzeitig enger und tiefer, wobei das Gefälle etwas unter das Mittel sinkt, die Übergangsstrecken sind etwas breiter und seichter und zeichnen sich durch ein etwas größeres Gefälle aus. Die Geschiebebänke bevorzugen die Übergangsstrecken.

Auch unabhängig von den Windungen kann man in einem Flusse engere, tiefere Strecken mit geringerem Gefälle, sogenannte „Pfuhle“ und dazwischenliegende breitere, seichtere Strecken mit größerem Gefälle, sogenannte „Köpfe“ unterscheiden. In den Köpfen befinden sich Geröllablagerungen. Sie bilden sich bald dort, wo ein Nebenfluß gröberes Material bringt, das vom Hauptfluß nicht sogleich fortgeschafft werden kann, bald dort, wo eine härtere Gesteinsbank im Flußbett auftritt, bald — wie oben gesagt wurde — in Verbindung mit den Windungen. In den Köpfen ist die Sohlengeschwindigkeit — dank dem größeren Gefälle — etwas größer; oft kann hier gröberes Geschiebe als im nächsten Pfuhle befördert werden.

§ 11. Einfluß der Erdrotation, Einfluß des Windes usw.

Nach Middendorff*) soll zuerst ein sibirischer Kaufmann, namens Słowcow, die Verschiebung der nordwärts fließenden sibirischen Flüsse nach Osten durch den Einfluß der Erdrotation erklärt haben. Erst viel später hat der bekannte Naturforscher K. E. v. Baer um 1860 dieselbe Erklärung für die Verschiebung der südwärts fließenden russischen Flüsse nach Westen gegeben.

*) Middendorff, Sibirische Reise, Bd. IV, S. 244.

Unter der Flagge Baers wurde diese Erklärung als das sogenannte Baersche Gesetz in die wissenschaftliche Literatur aufgenommen. Słowcow sowie Baer bildeten sich irrtümlich ein, daß bloß die meridionale Komponente der Bewegung von der Erdrotation beeinflußt wird.

Es wurde schon im vorigen Kapitel dargetan, daß alle Bewegungen auf der Erde dem Einfluß der Erdrotation ausgesetzt sind, speziell wirkt auf jede Horizontalbewegung eine horizontale, senkrecht zur Bewegungsrichtung und auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links gerichtete Beschleunigung, deren Größe sich aus der Formel $2\omega v \sin\varphi$ berechnet. Dabei bedeutet ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, v die augenblickliche Horizontalgeschwindigkeit, φ die geographische Breite. Mit der Sekunde der mittleren Sonnenzeit als Zeiteinheit hat 2ω den Wert: 0,00014584 . . .

In welcher Weise wirkt diese Beschleunigung auf die Bewegung des Wassers in einem Flusse? Es ist klar, daß ihre Wirkung der Wirkung der Zentrifugalbeschleunigung bei krummer Bahn ähnlich sein muß, da beide senkrecht zur Bewegungsrichtung wirken. — Die Beschleunigung durch die Erdrotation verschiebt die schnelleren Stromfäden nach dem rechten Ufer (auf der Nordhalbkugel), begünstigt somit die Erosion der rechten Ufer. Ceteris paribus sollten somit diese Ufer häufiger als die linken unterwaschen werden, und die Flüsse der Nordhalbkugel sollten sich nach rechts verschieben. Dagegen sollten sich die Flüsse der Südhalbkugel nach links verschieben.

Tatsächlich verschieben sich viele Flüsse der Nordhalbkugel nach rechts: die nordwärts fließenden Flüsse Sibiriens verschieben sich östlich, d. h. rechts von der Laufrichtung, die südwärts fließende *Wolga* verschiebt sich westlich, also wiederum nach rechts. Aber man kann zahlreiche Flüsse der Nordhalbkugel anführen, die sich nach links verschieben, z. B. den *Mississippi*. Infolgedessen behaupten gewisse Naturforscher, daß die Erdrotation keinen Einfluß auf den Flußlauf habe. Das ist gewiß eine Übertreibung, aber man muß gestehen, daß der genannte Einfluß nicht besonders stark ist und oft durch andere Einflüsse verdeckt wird. Das scheint etwas sonderbar, indem bekannterweise die Erdrotation einen großen Einfluß auf die Meeresströmungen, einen noch größeren auf die Luftströmungen ausübt und andererseits die Beschleunigung infolge der Erdrotation mit der Zentrifugalbeschleunigung auf krummer Bahn

sehr oft genau vergleichbar ist. So sind z. B. unter der Breite Krakaus (50,06°) und bei einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Sekunde beide Beschleunigungen gleich, wenn der Krümmungsradius der Bahn 8942 m mißt.

Betrachten wir die Wirkungsart der Beschleunigung durch die Erdrotation etwas näher. Ihre Wirkung, sowie die Wirkung der Zentrifugalbeschleunigung, hängt von den Differenzen zwischen den Geschwindigkeiten in demselben Querschnitt ab. Indem beide Beschleunigungen mit der Geschwindigkeit wachsen, bewirken sie eine Art Sichtung unter den Wasserelementen. Die Zentrifugalbeschleunigung trachtet darnach, die schnelleren Elemente nach dem konvexen, die langsameren nach dem konkaven Ufer zu drücken; die Beschleunigung durch die Erdrotation trachtet darnach, die ersten nach dem rechten, die zweiten nach dem linken Ufer (wir sprechen von der Nordhalbkugel) zu verschieben. Es ist klar, daß beide Wirkungen in aufeinander folgenden Windungen sich abwechselnd summieren bzw. vermindern. Beide zusammen erzeugen eine gewisse Querzirkulation, auf welche die im vorigen Paragraphen gegebene Beschreibung mit gewissen evidenten Modifikationen paßt.

Bisher haben wir nur die Analogien hervorgehoben, jetzt werden wir das Augenmerk auf die Kontraste richten. Die Sichtung der Wasserelemente durch die Zentrifugalkraft hängt von Differenzen zwischen Geschwindigkeitsquadraten, diejenige durch die Corioliskraft von den Differenzen zwischen den ersten Potenzen der Geschwindigkeit ab. Offenbar muß die Sichtung durch die erste Kraft viel wirksamer selbst dann sein, wenn die Kräfte selbst nahezu gleich sind. Außerdem hängt die Corioliskraft von den Horizontalabmessungen des Flusses nicht ab, während die andere Kraft im Nenner den Krümmungsradius der Bahn enthält. Indem bei kleinen Flüssen die Krümmungsradien durchschnittlich kleiner sind, müssen hier im Vergleich zu den großen Flüssen die Verhältnisse sich für die Zentrifugalkraft günstiger gestalten. Folglich: je kleiner der Fluß, desto mehr wird der Einfluß der Erdrotation von demjenigen der Zentrifugalkraft in den Hintergrund gedrängt.

Er wird auch von anderen Faktoren zurückgedrängt. Eine wichtige Rolle spielt die Verteilung der Zuflüsse. Gewöhnlich sind die Zuflüsse einer Seite zahlreicher und wasserreicher als die Zuflüsse der anderen. Schon dank dem größeren Bewegungs-

moment drücken die wasserreicheren Zuflüsse den Hauptstrom auf die gegenüberliegende Seite und bewirken eine größere Erosion des dortigen Ufers. Aber noch wichtiger ist die Rolle der Sedimente, welche von den Nebenflüssen herbeigeschafft werden. Es geschieht sehr oft, daß der Hauptfluß ein geringeres Gefälle und eine geringere Geschwindigkeit besitzt als die Nebenflüsse und daß das vom Nebenflusse herbeigeschaffte Material beim Übergang in den Hauptfluß abgesetzt wird. Es bilden sich infolgedessen an den Mündungen der Nebenflüsse Ablagerungskegel, das Flußbett wird einseitig verbarrikadiert und der Fluß gezwungen, sich nach der entgegengesetzten Seite zu verschieben. Ein vorzügliches Beispiel dieses Vorganges haben wir beim *Po,* dessen nördliche, alpine Zuflüsse zahlreicher, wasser- und sedimentreicher, endlich schneller sind als die südlichen Apenninenflüsse; sie drängen auch den Po nach Süden, rechts aus der Richtung seines Laufes, mithin übereinstimmend mit der Corioliskraft. Der *Mississippi* dagegen wird von seinen wasserreicheren westlichen Zuflüssen östlich, links aus der Richtung seines Laufes und entgegen der Corioliskraft gedrückt. Es mag sein, daß beim Mississippi außer dem Druck der Zuflüsse noch eine andere Ursache der Erdrotation entgegenarbeitet: das Terrain und die Schichten fallen im allgemeinen von West nach Ost ein. In geneigten Schichten greift die Erosion, wie Richthofen bemerkt hat, die Köpfe leichter als die Rücken an, indem das Wasser leichter auf geneigten Flächen zwischen die Schichten gelangt. Hier wäre also im Mittel das östliche Ufer der Erosion zugänglicher als das westliche. Beständige, quer zur Richtung des Flusses wehende Winde erzeugen (besonders bei breiten Flüssen) eine entsprechende Querzirkulation und Wellen. Die Luvküste wird von den Wellen stärker angegriffen und erodiert. Auch das Verwachsen durch die Vegetation gibt Anlaß zur seitlichen Verschiebung, indem am verwachsenen Ufer die Erosion wegen der Geschwindigkeitsabnahme zurücktritt und die dynamische Axe an das andere Ufer gedrückt wird, das nun einer stärkeren Erosion unterliegt.

Zahlreich sind die Ursachen, welche den Einfluß der Erdrotation verdecken oder neutralisieren, aber eine entsprechende Statistik würde diesen Einfluß gewiß aufdecken. Man müßte nämlich alle erodierten rechten und alle erodierten linken Ufer auf der Nord- bzw. Südhalbkugel ausmessen; es würde sich dann ohne Zweifel zeigen, daß auf der Nordhalbkugel die gesamte Länge der

erodierten rechten Ufer größer ist als die gesamte Länge der erodierten linken Ufer. Auf der Südhalbkugel würde man umgekehrt das entgegengesetzte Resultat finden.

Auf Grund unmittelbarer Beobachtung behaupten B. Brunhes und J. Brunhes*), daß in den Flußwirbeln auf der Nordhemisphäre das Wasser entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers ebenso wie die Luft in Zyklonen, Tornados und Wasserhosen zirkuliert. Wohlverstanden hat die Drehungsrichtung in Wirbeln keinen direkten Einfluß auf die Verschiebung der Flüsse in diesem oder jenem Sinne, aber sie gibt einen neuen Beleg für die Asymmetrie der Bewegungen infolge der Erdrotation. In einer anderen Abhandlung geben J. Brunhes und C. Calciati**) interessante Beobachtungen über den Lauf des Saaneflusses *(Sarine)* bei Freiburg. Die Saane fließt in einem 80 m tiefen Tal und bildet zahlreiche Windungen, aber in der Konfiguration der Windungen und des umliegenden Geländes ist überall eine deutliche Asymmetrie sichtbar: überall findet man Spuren einer Rechtsverschiebung.

Dreizehntes Kapitel.

Eis und Gletscher.

§ 1. Eiskristalle.

Die Kristallographie des Eises ist noch nicht beendet, es bleibt noch manches zu erklären übrig, aber es ist bekannt, daß die Eiskristalle dem hexagonalen System angehören. Sie sind optisch einaxig, wobei die optische Axe mit der Hauptsymmetrieaxe zusammenfällt. Nach G. Meyer***) hat das Eis folgende Brechungsquotienten:

	Ordinärer Strahl	Extraordinärer Strahl	Temperatur
Rotes Lithiumlicht	1,2970	1,3037	— 8,0°
Gelbes Natriumlicht	1,3090	1,3133	— 8,0°
Grünes Thalliumlicht	1,3107	1,3163	— 3,8°

*) B. und J. Brunhes, Les analogies des tourbillons atmosphèriques et des tourbillons des cours d'eau. Annales de Geogr., Bd. XIII (1904), S. 1—20.

**) J. Brunhes und C. Calciati, De la prédomination etc. . . . . C. R. Acad. des Sc. Paris, Bd. 146 (1908), S. 375—376.

***) G. Meyer, Wied. Annalen, 31. Bd. (1887), S. 321.

Wir sehen, daß die Zahlen der zweiten Kolonne größer sind als die der ersten, folglich ist das Eis optisch positiv.

Die Formen, in denen das Eis vorkommt, sind mannigfach, nämlich:

Schnee: Zarte kleine Kristalle. Sie entstehen durch Sublimation, d. h. durch den direkten Übergang des Wassers aus Dampf in den festen Zustand. Die fundamentale Form ist ein sechsstrahliger Stern, wobei die Strahlen zuweilen abwechselnd etwas verschieden entwickelt sind, als wenn die Eiskristalle zu einer Klasse mit dreifacher Symmetrie gehörten.

Graupeln und Hagel: Das Innere ist kristallin, aber dank dem Schmelzen und Frieren ist die äußere Gestalt irregulär, unkristallin.

Seeeis: Schneit es während des Frierens oder war das Wasser unruhig, dann wird das Eis eine irreguläre, inhomogene Struktur haben. Sonst besteht das Seeeis aus Prismen, aus irregulären kleinen' Säulen, die senkrecht zur Wasseroberfläche stehen. Solch eine Säule kann als ein kristallines Individuum mit vertikaler Hauptaxe angesehen werden. Die vertikale Stellung der Hauptaxe ist wahrscheinlich durch die größere Wärmeleitfähigkeit in der Richtung dieser Axe bedingt. Jedes Individuum besteht aus einer großen Anzahl dünner Platten, deren jede auch ein Kristall ist. Diese Platten sind aufeinander gelagert, so wie die Karten in einem Spiel oder die Münzen in einer Rolle. Ihre Hauptaxen sind untereinander parallel und vertikal gerichtet, folglich liegen die Platten horizontal.

Nach A. Hamberg*) hat das Meereis dieselbe Struktur wie das Seeeis. Dagegen behauptet Drygalski**), daß die Plättchen, von denen soeben die Rede war, entweder senkrecht oder schief zur Wasseroberfläche in verschiedenen Ebenen stehen. Zwischen den einzelnen Plättchen befindet sich immer etwas Meerwasser. Dank dieser Struktur besitzt das Meereis eine gewisse Biegsamkeit und Plastizität, ferner ist es weniger kompakt als das Seeeis. Es ist z. B. nicht schwer, einen Stock in solches Eis hineinzutreiben, wahrscheinlich deswegen, weil der Stock parallel zu den Plättchen

---

*) Zitiert nach H. Crammer, Eis und Gletscherstudien. Neues Jahrb. für Min., Geol. und Pal., XVIII. Supplementärband (1904), S. 84 und 85.

**) Drygalski, Grönland Expedition, Bd. I, S. 423 u. ff. Berlin 1897.

zwischen diese dringt. Würden die Plättchen horizontal liegen, so müßte der Stock sie durchbrechen.

Wahrscheinlich bildet sich je nach den Umständen, d. h. je nachdem das Gefrieren mehr oder weniger ruhig vor sich gegangen ist, bald ein solches Eis, wie es Hamberg beschreibt, bald ein solches, von welchem Drygalski spricht. Näher diese Bedingungen anzugeben sind wir nicht in der Lage. Übrigens werden wir noch zum Meereis in § 5 zurückkehren.

Das Gletschereis besteht aus Körnern verschiedener Größe. Die größten Körner erreichen die Dimensionen eines Eies, ja selbst einer Faust. Äußerlich haben diese Körner eine sehr irreguläre Gestalt, aber man überzeugt sich leicht, daß jedes Korn ein kristallinisches Individuum für sich bildet. Die Hauptaxen der Kristalle haben verschiedene Richtungen, doch kann es geschehen, daß an einer gewissen Stelle innerhalb des Gletschers eine bestimmte Richtung deutlich überwiegt.

§ 2. Einige physikalische Konstanten des Eises.

Ganz reines Eis aus destilliertem, mehrmals ausgekochtem, ganz luftfreiem Wasser hat nach Bunsen die Dichte 0,91674*) bei 0° C und 760 mm Luftdruck. Beinahe genau dieselbe Dichte hat I. Zakrzewski**) gefunden. Dagegen ist die Dichte des Fluss- und Seeeises seiner Verunreinigungen wegen nicht ganz konstant. Nichols***) hat gefunden, daß je nach der Herkunft, selbst je nach dem Alter die Dichte des Fluß- bzw. Seeeises zwischen 0,91615 und 0,91807 schwankt. Zu ähnlichen Resultaten ist auch Barnes†) gekommen. Er gibt als mittlere Dichte 0,91651, Vincent††) 0,9160. Somit ist die Dichte des Eises genau bestimmt. Von anderen physikalischen Konstanten des Eises kann man dies aber nicht sagen. Nehmen wir z. B. den Koeffizienten der (thermischen) linearen†††) Ausdehnung. Wir werden sofort

---

*) Landolt und Börnstein, Phys.-chem. Tabellen. III. Ausg. S. 249. Berlin 1905.

**) I. Zakrzewski, Abhandl. der Akad. d. Wiss., Krakau (poln.), Bd. 24, S. 247.

***) Landolt und Börnstein, S. 249.

†) a. a. O. S. 249.

††) a. a. O. S. 250.

†††) a. a. O. S. 201.

sehen, daß die Koeffizienten von Nichols, Vincent und Struve*) zweimal so groß sind als die Koeffizienten von Dewar und I. Zakrzewski.

Wir können uns nicht in eine Diskussion der betreffenden Beobachtungen einlassen, aber so viel dürfen wir wohl sagen, daß es überhaupt nicht zulässig ist, nur einen linearen Ausdehnungskoeffizienten anzugeben. Eis ist ein kristalliner Körper, wahrscheinlich hat es zwei Ausdehnungskoeffizienten: einen für die Richtung parallel zur Hauptaxe und einen zweiten für die zur Hauptaxe senkrechten Richtungen. Es ist ferner möglich, daß unter verschiedenen, zur Hauptaxe senkrechten Richtungen auch Differenzen bestehen. Ebenso wird das Seeeis, das aus parallel zueinander gelagerten Kristallindividuen besteht, auch zwei Ausdehnungskoeffizienten haben. Zwar behauptet einer der Mitarbeiter Struves — Moritz —, daß die linearen Ausdehnungskoeffizienten des Seeeises parallel zur Wasseroberfläche und senkrecht dazu keine wesentliche Differenz aufweisen, doch möchten wir angesichts des offenbaren Widerspruches mit den Ausdehnungsmessungen von Dewar und Zakrzewski die Frage als zurzeit noch unentschieden betrachten — um so mehr, als die Methode von Struve und seinen Mitarbeitern eine etwas rohe war. — Dagegen meinen wir, daß das Gletschereis in großen Klumpen sich wie ein isotroper Körper verhalten kann. Hier sind die Kristallaxen nach verschiedenen Richtungen orientiert, so daß der Ausdehnungskoeffizient eines großen Klumpen Gletschereises von einem Mittelwert der linearen Koeffizienten der Kristalle abhängig sein muß.

Indem wir uns auf den Standpunkt stellen, daß Eiskristalle verschiedene Ausdehnungskoeffizienten für verschiedene Richtungen haben, können wir die Resultate derjenigen Autoren, welche nur einen Linearkoeffizienten gefunden haben, nicht angeben. Eine Ausnahme machen wir jedoch für Dewar und Zakrzewski, und zwar aus folgendem Grunde. Die Methode, deren sich diese Autoren bedient haben, ergibt eigentlich die Volumausdehnung. Den linearen Koeffizienten haben beide durch Division durch 3 erhalten, wir führen die entgegengesetzte Operation aus: wir multiplizieren mit 3 und erhalten als Volumausdehnungskoeffizienten des Eises nach J. Dewar 0,000081 zwischen —189° und 0°, nach

*) Struve, Fortschritte der Physik, Bd. VI—VII (1850—1851), S. 48—51.

I. Zakrzewski 0,000071 zwischen — 5° und 0°. Es ist interessant zu erwähnen, daß schon zu Anfang des 19. Jahrhunderts Pater Heinrich die vom Koeffizienten von Zakrzewski nur sehr wenig verschiedene Zahl 0,000073 gefunden hat*).

Nicht besser verhält sich die Sache mit den Wärmeleitungskoeffizienten. Die Koeffizienten von Neumann, Mitchell und Straneo**) sind zweiundeinhalbmal so groß als die Koeffizienten von Forbes und de la Rive. Nur Forbes unterscheidet den Koeffizienten für die Richtung der Hauptaxe vom Koeffizienten für die Richtungen senkrecht darauf. Leider wirft Liebisch***) einen gewissen Schatten auf die Exaktheit der Messungen von Forbes, und die Beobachtungen von Abels†) über die Wärmeleitung des Schnees von der Dichte 0,9 stimmen besser mit den Beobachtungen von Neumann, Mitchell und Straneo überein als mit den Beobachtungen von Forbes und von de la Rive. Neumann gibt nämlich: $K = 0{,}0057$ (C. G. S.-Einheiten), Straneo 0,0052 und Mitchell 0,005 an, während Forbes $K = 0{,}00223$ parallel zur Hauptaxe, und 0,00213 senkrecht dazu, de la Rive — ohne die Richtung zu unterscheiden — 0,0023 angibt. Nach Abels ist

$K = 0{,}000017$	für einen Schnee von der Dichte	0,05
$K = 0{,}00006$	„ „ „ „ „ „	0,10
$K = 0{,}00137$	„ „ „ „ „ „	0,45
$K = 0{,}00548$	„ „ „ „ „ „	0,90

Wir wollen zwischen diesen einander widersprechenden Angaben nicht entscheiden, aber wir können die Bemerkung nicht unterdrücken, daß erstens wahrscheinlich zwei, vielleicht noch mehr Wärmeleitungskoeffizienten zu unterscheiden sind und daß zweitens eine neue gründliche Erforschung der Wärmeleitfähigkeit, sowie der thermischen Ausdehnung des Eises sehr erwünscht wäre.

---

*) Über die Methode, deren sich Heinrich bedient hat, kann ich nichts berichten. Seine in den alten Jahrgängen der bayer. Akademie der Wissenschaften publizierte Abhandlung blieb für mich unzugänglich. Ich zitiere sein Resultat (nach Umrechnung aus Réaumurgraden in die hundertteilige Skala) nach Struve.

**) Landolt und Börnstein, Ph. Tab., S. 508.

***) Liebisch, Physikalische Kristallographie, S. 162. Leipzig 1891. Die betreffende Stelle bezieht sich auf ein anderes Mineral.

†) Landolt und Börnstein, S. 508.

Die Daten bezüglich der Wärmekapazität sind übereinstimmend. Regnault hat für das Intervall von — 78 bis 0° 0,4627 g-kal. gefunden. Person gibt 0,505 g-kal. für das Intervall von — 30 bis 0° und 0,5017 für das Intervall von — 21 bis 0°.

Mit wachsendem Druck nimmt die Schmelztemperatur des Eises ab. Nach Tammann*) nimmt sie ab für eine jede Druckatmosphäre um 0,0076° im Intervall von 0 bis — 2,5°, um 0,0093° zwischen — 2,5° und — 5,0° und um 0,0094° zwischen — 5,0° und — 7,5°. Aber diese Zahlen beziehen sich nur auf den Fall, wenn das Schmelzwasser nicht abfließen kann. Wasser, welches sich im Gleichgewicht mit Eis befindet, dehnt sich bis — 2,2° aus, unterhalb dieser Temperatur zieht es sich zusammen. Infolgedessen wird der absolute Wert von $\frac{\partial T}{\partial p}$ oberhalb der Temperatur — 2,2° durch die Gegenwart des Wassers herabgedrückt, unterhalb — 2,2° erhöht. Wenn also das Schmelzwasser abfließen kann, so wird $\frac{\partial T}{\partial p}$ oberhalb — 2,2° etwas größer und unterhalb — 2,2° etwas kleiner als soeben angegeben wurde. So ist z. B. zwischen 0° und — 2,2° $\frac{\partial T}{\partial p} = -0{,}0088$ (nach Le Chatelier sogar — 0,0094), wenn das Wasser abfließen kann, dagegen nur — 0,0076 in Gegenwart des Wassers.

Außer dem gewöhnlichen Eis existieren nach Tammann noch zwei andere Eisarten, aber erst oberhalb 2300 Atmosphären Druck. Somit sind diese Eisarten für den Geophysiker ohne Belang. Zur Gefrier- bzw. Schmelztemperatur des Eises werden wir noch in § 5 zurückkehren.

§ 3. Elastizität und Plastizität des Eises.

Diese Eigenschaften des Eises sind nicht nur in Hinsicht auf die Gletscherbewegung, sondern auch deswegen interessant, weil das Verhalten des Eises uns wichtige Fingerzeige darüber gibt, wie die festen Körper sich bei Temperaturen, die nahe beim Schmelzpunkt liegen, verhalten. Auf Grund der Erfahrungen mit der Plastizität des Eises können wir auch eine Vorstellung über die Plastizität der Gesteine im Erdinnern gewinnen.

*) Tammann, Über die Grenzen des festen Zustandes. Ann. der Physik 1900, Bd. II, S. 6.

Die Zug-, die Torsionsfestigkeit usw. der festen Körper sind überhaupt etwas Schwankendes, man kann sagen Individuelles. Es geschieht z. B. oft, daß unter zwei scheinbar ganz ähnlichen Metallstäben der eine einen zweimal so großen Zug als der andere aushält. Es ist also nicht zu verwundern, daß ein Körper wie Gletschereis, das aus Körnern verschiedener Größe und Gestalt zusammengesetzt ist, eine innerhalb weiter Grenzen schwankende Festigkeit aufweist.

B. Weinberg*) hat gefunden, daß die Torsionsfestigkeit des Gletschereises 2 bis 7 kg pro qcm und die Biegungsfestigkeit 2 bis 5 kg pro qcm beträgt. Nach H. Hess**) beträgt die Zugfestigkeit 7 bis 8 kg pro qcm. O. Fabian***) hat nur 2,5 kg pro qcm gefunden. Er operierte mit Eissäulen, die durch Gefrieren des Wassers in länglichen, walzenförmigen Blechgefäßen erhalten wurden. Die Hauptaxen der Kristalle standen, wenigstens in der Außenschicht, senkrecht auf der Mantelfläche der Walze. Da der Zug in der Richtung der Axe der Walze wirkte, so maß Fabian die Zugfestigkeit in einer zu den Hauptaxen der Kristalle senkrechten Richtung. Leider war das Eis nicht homogen, im Inneren der Walzen war es ganz weiß, voll kleiner Luftblasen.

H. Hess†) hat den Elastizitätsmodul (Youngs Modul)††) sowohl parallel als senkrecht zur Hauptaxe der Kristalle gemessen. Seine Messungen beweisen, daß der Elastizitätsmodul für verschiedene Richtungen verschiedene Werte hat; aber gleichzeitig weisen sie gewisse sonderbare Widersprüche auf. Offenbar war das Verhalten einzelner Eisstücke in hohem Grade verschieden. Nur um

---

*) B. Weinberg, Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. I, S. 326.

**) H. Hess, Die Gletscher, S. 23. Braunschweig 1904.

***) O. Fabian, Abhandlungen der k. k. Akad. der Wiss. Krakau, Bd. IV, S. 159—177.

†) H. Hess, Die Gletscher, S. 22.

††) Um die Angaben in Kilogramm pro Quadratzentimeter in C. G. S.-Einheiten überzuführen, muß man mit 981000 oder bei so rohen Angaben rund mit 1000000 multiplizieren.

Der Elastizitätsmodul (Youngs Modul) E ist nichts anderes als das Gewicht, welches sich zum drückenden (bzw. ziehenden) Gewicht so verhält, wie die Länge des Körpers (in der Richtung der wirkenden Kraft) sich zur Kontraktion (bzw. Dilatation) des Körpers verhält. Folglich ist:

$$E = \frac{\textit{Drückendes Gewicht} \times \textit{Länge des Körpers}}{\textit{Verkürzung des Körpers}}.$$

eine Idee von der Größenordnung dieses Moduls zu geben wollen wir den Mittelwert

$$E = 27\,600 \text{ kg pro qcm}$$

anführen. Zum Vergleich führen wir noch an die Moduln: für Holz ungefähr 100 000 kg pro qcm, für Stahl ungefähr 2 000 000, für Kautschuk nur ungefähr 10 kg pro qcm.

Alle Versuche weisen auf eine geringe Elastizität des Eises hin. Selbst eine kleine Deformation hinterläßt dauernde Spuren. Ein konstanter Druck oder Zug bewirkt eine stetig wachsende Deformation. Wenn langsam und allmählich belastet, kann das Eis eine bedeutend größere, endliche Belastung aushalten, als bei einer plötzlichen Belastung. Folglich ist es ein bis zu einem gewissen Grade plastischer Körper, insbesondere bei Temperaturen, die nahe beim Schmelzpunkt liegen. Am meisten zeichnet sich durch seine Plastizität das Gletschereis aus. Nach den Versuchen von Mc Connel und D. A. Kidd*) hält das Gletschereis sowohl Zug als Druck ziemlich gut aus. Am meisten plastisch ist es bei 0°; noch bei — 2° ist es doppelt so plastisch als bei — 10°. Gegen Zug ist das Gletschereis empfindlicher als gegen Druck; es reißt aber nicht, wenn der Zug nur ganz allmählich vergrößert wird.

Wichtig sind die Versuche Helmholtz' mit dem gewöhnlichen Flußeis. Wie schon in § 1 gesagt wurde, besteht dieses Eis aus säulenförmigen kristallinen Individuen, deren Hauptaxen untereinander parallel sind. Helmholtz ließ das Eis unter eine Presse bringen; bei einem gewissen Druck brach das Eis mit lautem Knirschen. Nachher nahm es lautlos die Gestalt des Gefäßes an. Dieses gebrochene und nachträglich zusammengedrückte Eis ließ sich dann lautlos deformieren; bei langsamen Deformationen brach es nicht. Man konnte z. B. eine hohe Säule zu einem flachen Kuchen durch einen einfachen Druck von oben deformieren, wobei bloß einige seitliche Spalten entstanden. Um seine innere Struktur zu erkennen, ließ es Helmholtz im polarisierten Lichte erforschen. Es zeigte sich nun, daß das Eis aus irregulären kristallinen Körnern bestand, wobei die Hauptachsen alle möglichen Richtungen hatten. Es war ein Konglomerat kristalliner Körner, eine Breccie ganz wie das Gletschereis. Es hatte auch dieselbe Plastizität wie das Gletschereis.

---

*) Mc Connel und D. A. Kidd, Proceedings Roy. Soc. London, Bd. 44 (1888), Bd. 48 (1890) und Bd. 49 (1891).

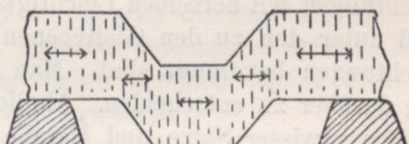
Doch beruht die größere Plastizität des Gletschereises nicht sowohl auf der Makrostruktur als auf einer gewissen Eigenschaft der Eiskristalle, die aber im Gletschereis besser zum Vorschein kommt als beim Fluß- oder Seeeis. Schon Mc Connel hat bemerkt, daß ein Eiskristall sich so verhält, als wenn er aus einer Menge dünner, unausdehnbarer, aber biegsamer, paralleler Schichten bestünde. Der Eiskristall verhält sich wie ein Kartenspiel, in welchem die Karten zusammengehalten werden, dabei aber übereinander gleiten können. Im nicht deformierten Kristall sind diese Schichten, oder sagen wir Platten, eben, wobei ihre Ebenen senkrecht auf der Hauptaxe stehen. Die optische Hauptaxe bleibt senkrecht zur Oberfläche der Platte, selbst dann, wenn die Platte gebogen wird.

Weitere Versuche in dieser Richtung hat Mügge*) ausgeführt. Er hat nicht bloß die von Mc Connel gefundenen Resultate bestätigt, sondern auch weiter entwickelt und begründet. Optisch homogene Eisstäbe ließen sich biegen, wenn die Richtung des Druckes parallel zur optischen Axe lag. (In der folgenden Abbildung [Fig. 58] bezeichnet der Pfeil die Richtung der optischen Hauptaxen vor der Biegung. Nach der Biegung stehen die optischen Hauptaxen überall senkrecht auf den gebogenen Grenzflächen.) — Man kann aber noch einen anderen Versuch machen.

Fig. 58.



Fig. 59.



Aus dem kristallinen Individuum schneidet man einen vierkantigen Stab (ein Parallelepiped) in solcher Weise aus, daß die Axe des Stabes zur optischen Axe parallel läuft. Man legt den Stab auf zwei Stützen, so daß die optische Axe in horizontale Lage kommt, und belastet ihn in der Mitte. Nach einiger Zeit deformiert sich der Stab in der in der vorstehenden Zeichnung (Fig. 59) abgebil-

*) Mügge, Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, 1895, II. Bd., S. 211—228. — 1899, II. Bd., S. 55—71 und 123—136. — 1900, II. Bd., S. 80—98.

deten Weise. — Die Pfeile bedeuten die Richtung der optischen Axen. Es ist klar, daß die Plättchen unter der Belastung eines auf dem anderen — ohne Biegung und ohne Ausdehnung — ganz so gleiten, wie die Karten in einem Kartenspiel, das man seitlich mit dem Finger drückt. In diesem Falle bleiben die optischen Axen parallel zueinander und zur ursprünglichen Richtung. Durch einen entsprechenden Druck kann man die herausgedrückten Plättchen wieder in die ursprüngliche Lage zurückdrücken, so daß keine Spur der Deformation hinterbleibt.

Schneidet man dagegen einen Stab so aus, daß die Längsaxe und zwei Seitenflächen parallel zu den Plättchen verlaufen und legt man den Stab so auf die Stützen, daß die Plättchen senkrecht stehen, dann lassen sich die Plättchen nicht abwärts eindrücken. Bei entsprechender Belastung wird der Stab brechen, oder — wenn die Plättchen nicht genau vertikal standen — seitlich ausbiegen. Wieder verhält sich der Stab so wie ein Kartenspiel, das man auf die Kante stellt und von oben drückt.

Der Mangel an Raum erlaubt uns nicht, alle die interessanten Versuche Mügges zu beschreiben, wir wollen nur noch sagen, daß viele bekannte Experimente — vor allem die Experimente Tyndalls — durch das Gleiten der Schichten, oder sagen wir der Plättchen, sehr gut erklärt werden können. Das Gleiten geschieht in Ebenen, die auf der Hauptaxe (die mit der optischen Axe identisch ist) senkrecht stehen, man weiß nur nicht, ob das Gleiten in allen Richtungen mit derselben Leichtigkeit vor sich geht. Es mag sein, daß unter den zu den Gleitebenen parallelen Richtungen gewisse Richtungen bevorzugt sind. Man hat aber keine Anhaltspunkte, um darüber zu entscheiden. Ähnliches Gleiten kann man bei Kristallen gewisser Salze und Metalle beobachten. Mügge*) hat es bei Gold, Silber, Kupfer, Eisen, Iridosmium, Antimon und Wismutkristallen konstatiert. Aber bei diesen Metallen stehen die Gleitebenen in einem anderen Verhältnis zur Hauptaxe des Kristalles als bei Eiskristallen. Bei Gold, Silber und Kupfer laufen nämlich die Gleitflächen den Oktaederflächen parallel. Die besagte Erscheinung ist den Metallurgen wohlbekannt.

Die Untersuchungen Ewings, Rosenhains und anderer haben gezeigt, daß die Kristalle der Metalle aus winzigen aufeinandergelagerten Plättchen aufgebaut sind. Die Plastizität oder,

*) Mügge, Neues Jahrbuch 1899, Bd. II, S. 55—71.

wie man sagt, die „Duktilität" der Metalle beruht auf dem Gleiten der Plättchen übereinander. Unter dem Mikroskop zeigen die Metalle einen ähnlichen Bau wie die Gesteine, sie bestehen aus mehr oder weniger entwickelten Kristallen, nur sind diese Kristalle bedeutend kleiner als bei Gesteinen: was dort (bei Gesteinen) mit bloßem Auge sichtbar ist, das erscheint bei den Metallen erst unter einer starken Vergrößerung. Die Größe der Kristallkörner ist sowohl von der Natur des Metalles, als von den bei der Erstarrung obwaltenden Bedingungen abhängig. Die plastische Deformation der Metalle beruht auf unzähligen Verschiebungen der Plättchen auf den Gleitflächen.

Dieselbe Erklärung kann auf das Gletschereis übertragen werden. Seine Plastizität beruht darauf, daß die Plättchen, aus denen die Kristallkörner wie eine Rolle aus Münzen aufgebaut sind, übereinander gleiten. Auf diese Weise können die Körner ihre Gestalt leicht ändern. Dabei ist noch hervorzuheben, daß die mannigfache Orientierung der Hauptaxen der Körner das Brechen des Eises wahrscheinlich erschwert. Denken wir uns, daß wirklich in einem gegebenen Korne zwei Plättchen sich voneinander trennen, so daß eine Spalte dazwischen entsteht. Da in den benachbarten Körnern die Plättchen nicht parallel zu den Plättchen des gegebenen Kornes liegen, sondern verschiedene Winkel mit denselben bilden, so wird die trennende Kraft auf die benachbarten Körner anders als auf das gegebene wirken. Oft wird sie bedeutend schwächer wirken; es kann sogar geschehen, daß sie, anstatt die Plättchen des benachbarten Kornes zu trennen, dieselben aneinander drückt. Deswegen kann sich die in einem Korne gebildete Spalte nicht so leicht und so allgemein in andere fortsetzen.

§ 4. Der Koeffizient der inneren Reibung.

Im vorigen Paragraphen haben wir versucht, die Plastizität des Eises auf Grund der Analyse der inneren Struktur des Gletscherkornes aufzuklären, in diesem werden wir uns mit einer anderen Eigenschaft des Eises, welche mit der Plastizität in innigem Zusammenhang steht, beschäftigen. Es ist bekannt, daß das Gletschereis in großen Massen sich wie eine dickflüssige, mit einer sehr großen inneren Reibung begabte Flüssigkeit verhält. Angesichts dessen ist es interessant, die innere Reibung des Eises näher kennen zu lernen. Bei dieser Untersuchung werden wir

merkwürdigen Verhältnissen begegnen. Wir werden mit der Reibung innerhalb des Kristalls beginnen.

Die Plättchen gleiten nicht ohne Widerstand. Aus dem Widerstand kann man den Koeffizienten der inneren Reibung parallel zu den Gleitflächen — also senkrecht zur Hauptaxe — bestimmen. Man kann dazu Versuche in der Art der Versuche Mügges verwenden. Es hat auch Deeley*) ähnliche Versuche Mc Connels verwendet und folgende Werte für den Koeffizienten der inneren Reibung μ gefunden:

Bei 0^0 C $\mu = 2{,}0 \times 10^{10}$ (in C. G. S-Einheiten),
— 5^0 C $\mu = 10{,}4 \times$ . . . . . .
— 10^0 C $\mu = 39{,}8 \times$ . . . . . .
— 15^0 C $\mu = 119{,}2 \times$ . . . . . .

wobei die letzte Zahl etwas unsicher ist. Die Abhängigkeit des Koeffizienten der inneren Reibung von der Temperatur springt in die Augen.

Der Koeffizient der inneren Reibung für die Richtung parallel zur Hauptaxe läßt sich nicht bestimmen; das Eis setzt, wie wir oben bei der Beschreibung der Versuche Mügges gesehen haben, einer scherenden Deformation in dieser Richtung einen sehr großen Widerstand entgegen und bricht, ohne merklich zu weichen. Man kann folglich nur so viel sagen, daß μ für die Richtung der Hauptaxe einen unvergleichlich größeren Wert haben muß wie in den dazu senkrechten, zu den Gleitflächen parallelen Richtungen.

Nun findet Deeley auf Grund der Angaben Tyndalls über das Fließen der Alpengletscher, daß der innere Reibungskoeffizient der Gletscher im Mittel ungefähr

$$12\,500 \times 10^{10} \text{ C. G. S.-Einheiten}$$

beträgt. Leider ist diese Zahl unsicher; sie ist ein Mittel aus stark voneinander abweichenden Zahlen, unter denen die kleinste 327×10^{10} und die größte $29\,200 \times 10^{10}$ beträgt. Die Abweichungen rühren gewiß zum Teil davon her, daß Deeley bei der Schätzung der Mächtigkeit der Gletscher wahrscheinlich große Fehler begangen hat. Unglücklicherweise mußten dieselben die Resultate stark beeinflussen, indem die Formel 5, S. 454, so beschaffen ist, daß bei gegebener Geschwindigkeit μ proportional dem Quadrat

*) Deeley, The Viscosity of Ice. Proc. Roy. Soc. London. Ser. 547 A, Bd. 81 (1908), S. 250—259.

der Mächtigkeit des Gletschers wächst. Deswegen werden wir statt des Wertes von Deeley denjenigen von Weinberg nehmen.

B. Weinberg*) hat μ sowohl aus der Geschwindigkeit der Bewegung der Alpengletscher als aus Torsionsversuchen an großen Eissäulen bestimmt. Die Daten in bezug auf die Alpengletscher waren zahlreicher und besser gesichtet als bei Deeley. Aus der Geschwindigkeit der Alpengletscher hat Weinberg

$$\mu = (1670 \pm 950)\,10^{10} \text{ C. G. S.-Einheiten}$$

und aus Torsionsversuchen an Eiswalzen

$$\mu = (1740 \pm 1100)\,10^{10} \text{ C. G. S.-Einheiten}$$

gefunden. Wir sehen, daß den Zahlen Weinbergs ebenfalls eine große Unsicherheit anhaftet. Auf jeden Fall sind sie aber weit zuverlässiger als die Zahl Deeleys. Obwohl nicht so groß als das μ Deeleys ist das μ Weinbergs auch mehreremal größer als dasjenige μ, welches für das Gleiten einzelner Plättchen übereinander gilt.

Die ungeheure Differenz zwischen dem Koeffizienten der inneren Reibung beim Gleiten der Plättchen und dem Koeffizienten des Gletschereises kann nicht durch den Einfluß der niedrigen Temperatur innerhalb der Gletscher erklärt werden. — Die Beobachtungen Forels, Hagenbach-Bischoffs, Drygalskis, Blümckes und Hess' in Gletscherspalten und in Bohrlöchern haben übereinstimmend gezeigt, daß die Temperatur des Gletschereises nicht weit von der Schmelztemperatur liegt. Freilich ist die Schmelztemperatur innerhalb des Gletschers wegen des hohen Druckes niedriger als 0^0, aber es sind Differenzen, die nur Bruchteile eines C-Grades erreichen können, wie man sofort aus den Daten Tammanns (vergl. Ende § 2, Seite 504) ersieht. Freilich liegen die Temperaturen des Eises noch unterhalb der Schmelztemperaturen, aber mit Ausnahme der Oberflächenschichten im Winter sind auch die Differenzen zwischen wahrer Temperatur und Schmelztemperatur klein. Kurz und gut dürfte man nach der Tabelle der Koeffizienten μ für gleitende Plättchen etwa $\mu = 10 \times 10^{10}$ C. G. S.-Einheiten erwarten, während nach Weinberg im Gletschereise μ ungefähr 170 mal so groß ist.

**) B. Weinberg, Innere Reibung des Gletschereises. Zeitschr. f. Gletscherkunde, Bd. I (1907), S. 321—327. — Zum Vergleich sei angeführt, daß für Wasser bei 10^0 $\mu = 0{,}0133$ und für Pech bei 6^0 $\mu = 0{,}22 \times 10^{10}$ ist.

Es ist klar, daß die Ursache der Differenz in einer ganz anderen Richtung zu suchen ist. Im Gletscher sind die einzelnen Körner — d. i. die einzelnen Kristalle — verschieden orientiert. Nur ein Teil der Körner nimmt augenblicklich eine solche Lage ein, daß bei relativen Verschiebungen innerhalb der Eismasse die relativ kleine Reibung in den Gleitflächen mit ins Spiel kommt. Die Mehrzahl der Körner nimmt andere Lagen ein, so daß die Gleitfähigkeit der Plättchen, aus denen sie zusammengesetzt sind, nur teilweise ausgenutzt werden kann. Deswegen setzen sie der Deformation einen weit größeren Widerstand entgegen als die anderen Körner. Den größten Widerstand leisten wahrscheinlich diejenigen Körner, deren Gleitflächen senkrecht zur Richtung der relativen Verschiebung liegen. Man kann dies auch so ausdrücken, daß, indem der Koeffizient μ für die Richtung parallel zur Hauptaxe des Kristalles denjenigen für die Richtung parallel zu den Gleitebenen sehr bedeutend*) übertrifft und indem die Hauptaxen der einzelnen Kristalle verschieden orientiert sind, sich für das Gletschereis ein Mittelwert aus den beiden Reibungskoeffizienten ergibt, der bedeutend größer ist als μ parallel zu den Gleitebenen. Es ist klar, daß dieser Mittelwert in hohem Grade davon abhängt, ob zufällig mehr oder weniger Körner mit ihren Gleitebenen parallel zur lokalen Verschiebungsrichtung liegen. Besonders bei kleineren Eisklötzen kann der Prozentsatz solcher Körner innerhalb weiter Grenzen schwanken.

Die großen möglichen Fehler Weinbergs beweisen, daß seine einzelnen Messungen stark untereinander abweichende Resultate ergaben. Zum Teil sind daran experimentelle Schwierigkeiten, zum Teil, sofern es sich um die Alpengletscher handelt, mangelhafte Daten schuld; aber die größten Abweichungen rühren gewiß davon her, daß die Gleitfähigkeit der Plättchen innerhalb der Kristalle — vielleicht auch die Gleitfähigkeit der Körner übereinander — in verschiedenen Fällen in verschiedenem Grade mitwirkte.

Angesichts dessen darf man sich nicht wundern, daß Weinberg eine Abhängigkeit des Koeffizienten der inneren Reibung von der Temperatur nicht konstatieren konnte.

---

*) Wahrscheinlich einige hundertmal.

§ 5. Meereis und Gefrieren des Meerwassers.

Das Meerwasser gefriert ebenso wie Süßwasser, aber bei tieferen Temperaturen; nämlich: Wasser mit dem Salzgehalt

1‰	gefriert	bei	$-0{,}06^0$	C
5 „	„	„	$-0{,}27^0$	„
10 „	„	„	$-0{,}53^0$	„
15 „	„	„	$-0{,}80^0$	„
20 „	„	„	$-1{,}07^0$	„
25 „	„	„	$-1{,}35^0$	„
30 „	„	„	$-1{,}63^0$	„
35 „	„	„	$-1{,}91^0$	„
40 „	„	„	$-2{,}20^0$	„

Das gewöhnliche Ozeanwasser mit dem Salzgehalt 35‰ hat bei der Gefriertemperatur ($-1{,}91^0$) die Dichte 1,02821, das Maximum der Dichte — nämlich 1,02822 — wird erst bei $-3{,}52^0$ erreicht. Jedenfalls sinkt das kältere Wasser immer zu Boden und die ganze Wassermasse vom Grunde bis zur Oberfläche kann bis an die Gefriertemperatur gebracht werden. Übrigens wird das Meerwasser ziemlich leicht unterkühlt, wie manche behaupten, selbst während des Wellenganges.

Beim Gefrieren bilden sich reine Eiskristalle, die Salze werden in der Gestalt einer konzentrierten Sole ausgeschieden. Ein Teil der Sole sinkt unter und mischt sich mit dem übrigen Wasser, aber ein anderer Teil bleibt unter den Eiskristallen und bildet mit ihnen ein Gemisch. Man kann kleine Tröpfchen der Sole (auch kleine Gasblasen) zwischen den Eiskristallen sehen. Die Zusammensetzung der Sole, die im Eise eingeschlossen bleibt, ist etwas verschieden von der Zusammensetzung derjenigen, die zum Wasser herabsinkt: die erste enthält mehr Sulfate, die zweite mehr Chloride. Infolgedessen enthält Wasser, welches vor kurzer Zeit Eis ausgeschieden hat, in der Lösung mehr Chlor, als normales Meerwasser: dagegen enthält Wasser, welches von der Eisschmelze herrührt, mehr Sulfate als normales Meerwasser.

Da beim Gefrieren reines Eis ausgeschieden wird*), darf man eigentlich nicht sagen, daß der Gefrierpunkt des Salzwassers niedriger liegt als der Gefrierpunkt des Süßwassers, sondern daß der

*) J. Y. Buchanan, On Ice and its natural history. Nature, Bd. 78 (1908), S. 379—382.

Gefrierpunkt des Wassers durch Anwesenheit gelöster Salze erniedrigt wird.

Der Prozeß der Eisbildung im offenen Meer gestaltet sich folgendermaßen. Zu Beginn des Winters setzt eine verstärkte vertikale Zirkulation ein. Erkaltetes Oberflächenwasser sinkt herab, an dessen Stelle kommt wärmeres Wasser von unten herauf, um sich abzukühlen und seinerzeit wieder herabzusinken. Bevor die Abkühlung so weit fortgeschritten ist, daß die oberflächliche Schicht die Gefriertemperatur erreicht, vergeht eine geraume Zeit, so daß sich schon eine intensive Kälte eingestellt hat. Infolgedessen friert das Meer erst bei starkem Frost. Dann aber, besonders wenn Schneefall als begünstigende Ursache hinzukommt, bildet sich rasch eine große Menge Eiskristalle, die auf der Oberfläche schwimmen. Es entsteht an der Oberfläche eine Art Gemisch von Eiskristallen und Sole, welches zur ersten dünnen Eisschicht verwächst. Alle diese Phasen folgen rasch aufeinander. Das erste Eis ist sehr biegsam, es folgt noch dem Wellengange, nur sind die Wellenumrisse sehr abgeflacht. Es enthält verhältnismäßig viel Sole, die bei andauerndem Frost auskristallisiert, oder — wenn die Temperatur zufällig steigt — auftaut und die Oberfläche des Eises schlüpfrig macht. — Die Eisdecke wächst nach unten zu, aber wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit geht die Bildung der folgenden Schichten langsamer vor sich als die der ersten. Infolgedessen hat die Sole mehr Zeit, sich auszuscheiden und im übrigen Wasser aufzulösen, weshalb die später von unten angewachsenen Eisschichten weniger Salz enthalten als die oberflächliche Schicht. Während so von unten salzarmes Eis gebildet wird, macht die oberflächliche Schicht eine Entwicklung im entgegengesetzten Sinne durch. Infolge der Verdampfung des Eises wird sie relativ immer salzreicher, oft reicher als normales Seewasser, obgleich ursprünglich ein Teil der Sole in das darunter befindliche Wasser ausgeschieden wurde. Es bildet sich auf der Oberfläche eine dünne Schicht von Salzkristallen. Gleichzeitig scheidet sich die Chloridsole allmählich aus und sinkt zum Wasser herab. Infolgedessen enthält ein mehrere Jahre altes Eis bedeutend weniger Chlor als neues.

Die Dichte des Eises aus destilliertem Wasser bei 0^0 ist 0,9167 (vergl. § 2), die Dichte des Meereises hängt von der Quantität der beigemischten Sole ab. Nach den Messungen Makarows an Eisschollen schwankt sie zwischen 0,85 und 0,96. Gewiß enthielt

manche besonders leichte Scholle Gas und Luftblasen, manche besonders schwere eingefrorene Steine, außerdem war die Dichte gewiß auch von der Temperatur beeinflußt. Genaue, in einem Laboratorium angestellte, auf 0° reduzierte Messungen hätten sicher in viel engere Grenzen eingeschlossene Resultate ergeben. Nach Krümmel darf man die häufigste Dichte des Meereises auf etwa 0,92 veranschlagen.

Anstatt sich bei abnehmender Temperatur zusammenzuziehen, dehnt sich das Meereis aus. Die Ursache dieser sowie anderer Anomalien liegt in der Beimischung von Sole. Das Meereis ist kein homogener Körper, es ist ein Gemisch eines festen Körpers — des Eises — und einer Flüssigkeit, der Sole. Es wird zu einem durch und durch festen Körper erst bei einer sehr niedrigen Temperatur, nämlich unterhalb der kryohydrischen Temperaturen aller Salze, die in der Lösung vorhanden sind. Auch dann bleibt es noch eine Mischung, aber eine Mischung von Eis und Salzkristallen. „Kryohydrisch" heißt diejenige Temperatur, unterhalb welcher das Bestehen einer auch noch so konzentrierten Lösung unmöglich ist. Die kryohydrische Temperatur des Chlornatriums beträgt (nach Buchanan) — 21,72°, des Clorkalziums ungefähr — 55° usw. Demgemäß scheiden aus der Sole Kristalle verschiedener Salze bei verschiedenen Temperaturen aus, und der ganze Vorgang gestaltet sich ziemlich kompliziert. Heute sind wir noch nicht imstande, den Vorgang des Festwerdens einer Meerwassersole in allen Einzelheiten zu schildern, wir müssen uns damit begnügen, einen einfachen, von Buchanan diskutierten Fall als Beispiel anzuführen.

Buchanan nimmt 916,7 g Eis und 1,515 g Chlornatrium. Er hat absichtlich diese und nicht andere Massen gewählt, damit bei 0° das Eis genau 1000 ccm einnehme und damit der Chlorgehalt genau 0,001 ausmache. In der Tat enthalten 1,515 g Chlornatrium genau 0,9167 g Chlor. Ferner hat Buchanan absichtlich einen sehr geringen Salzgehalt genommen, nur ungefähr ein Zwanzigstel derjenigen Chlornatriummenge, die im normalen Meerwasser enthalten ist, um die Kontraktion des Salzes vernachlässigen zu können. Übrigens hat Buchanan das Salz*) einfach nicht mitgerechnet. Als kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Eises hat Buchanan 0,00016 angenommen. Laut § 2 müssen wir diese Zahl als doppelt zu groß ansehen, aber es kommt hier auf den Wert des Aus-

*) 1,515 g Chlornatrium nehmen beinahe genau 0,7 ccm ein.

dehnungskoeffizienten nicht viel an: es handelt sich ja nur um ein Beispiel!

Buchanan führt nun folgende Rechnungen aus. Bei — 23°, d. i. unterhalb der kryohydrischen Temperatur des Chlornatriums, existieren nur reines Eis und neben ihm Chlornatriumkristalle, die Bildung einer Lösung (Sole) ist unmöglich. Mit 0,00016 als Ausdehnungskoeffizient berechnet sich das Volum*) des Eises zu 996,320 ccm. Gehen wir jetzt zur kryohydrischen Temperatur — 21,72° über. Das Eisvolum berechnet sich zu 996,525 ccm. Aber bei dieser Temperatur kann schon die Sole neben dem Eis bestehen. Die kryohydrische Konzentration der Chlornatriumlösung ist 29,97 g Salz auf je 100 g Wasser, folglich brauchen 1,515 g Salz 5,040 g Wasser zur Lösung. Dieses Wasser muß dem Eise entzogen werden. Aber 5,040 g Wasser entsprechen 5,498 ccm Eis, und um so viel wird sich das Volum des Eises vermindern. Dafür haben wir in der Sole 5,040 g, d. i. 5,040 ccm Wasser. Endgültig beträgt das Volum des Gemisches ohne Salz

$$996{,}525 - 5{,}498 + 5{,}040 = 996{,}067 \text{ ccm}.$$

Es zeigt sich somit, daß infolge der Bildung von Sole das Volum des Gemisches um 0,458 ccm abgenommen hat. Nehmen wir jetzt eine Temperatur oberhalb des kryohydrischen Punktes, z. B. — 21°. Bei dieser Temperatur befindet sich im Gleichgewicht mit dem Eis eine etwas weniger konzentrierte Lösung als diejenige, die bei der kryohydrischen Temperatur gefriert. Den Gefrierpunkt — 21° hat eine Chlornatriumlösung, in welcher auf 1,515 g Salz 5,160 g Wasser entfallen**). Aber 5,160 g Wasser entsprechen 5,629 ccm Eis. Da bei — 21° das Eis 996,64 ccm einnimmt, so berechnet sich das Volum des Gemisches ohne Salz zu:

$$996{,}640 - 5{,}629 + 5{,}160 = 996{,}171 \text{ ccm}.$$

So fortfahrend kommt Buchanan zu folgender Tabelle, in welcher V das Volum des Eises bei gegebener Temperatur, v das Volum des Eises, welches bei Bildung von Sole schmilzt, v' das Volum des Wassers in der Sole und

$$U = V - v + v'$$

das Volum des Gemisches ohne das Salzvolum bezeichnet.

*) Das Volum der Mischung ist 997 ccm, denn das Eis nimmt 996,3 und das Salz 0,7 ccm ein.

**) Die Gefrierpunkte der Lösungen verschiedener Konzentration sind aus Versuchen bekannt.

	Temperatur	V*)	v'	v	U
	— 23,00° C	996,320	—	—	996,320
	— 22,00° „	996,480	—	—	996,480
Kryohydrischer	— 21,72° „	996,525	—	—	996,525
Punkt	— 21,72° „	996,525	5,498	5,040	996,067
	— 21,00° „	996,640	5,629	5,160	996,171
	— 20,00° „	996,800	5,825	5,340	996,315
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	— 8,00° „	998,720	12,531	11,487	997,676
	— 7,20° „	998,848	13,884	12,727	997,691
	— 7,00° „	998,880	14,195	13,012	**997,697**
	— 6,80° „	998,912	14,628	13,409	997,693
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	— 1,00° „	999,840	98,350	90,164	991,644
	— 0,10° „	999,984	998,350	915,154	916,788

Hätten wir das Salzvolumen berücksichtigt, also statt des Volums des in der Sole enthaltenen Wassers überall das Volum der Sole in Rechnung gezogen, so hätten alle U-Werte zugenommen, aber die Zunahme wäre beinahe konstant (etwa 0,7 ccm) und der Gang der Zahlen derselbe geblieben.

Ein Blick auf die U-Werte zeigt, daß das Volum des Gemisches bis zur kryohydrischen Temperatur normal wächst. Bei der kryohydrischen Temperatur hat man natürlich zwei Volumina; es tritt hier eine diskontinuierliche Kontraktion ein, aber oberhalb des kryohydrischen Punktes wächst das Volumen wieder, bis bei — 7° das Maximum erreicht wird. Jetzt nimmt das Volumen mit wachsender Temperatur anfangs langsam, zuletzt schnell wieder ab. Im ganzen Intervall von der kryohydrischen Temperatur bis — 0,10° — d. i. bis zur Gefriertemperatur der Lösung mit dem Chlornatriumgehalte $\frac{1,515}{916,7} = 1,653\text{‰}$ — kämpfen zwei entgegengesetzt wirkende Einflüsse miteinander. Das Eis dehnt sich mit wachsender Temperatur aus, aber seine Menge wird immer geringer, denn mit wachsender Temperatur verlangt das Gleichgewicht zwischen Eis und Lösung eine immer geringere Salzkonzentration. Um das nötige Wasser zu liefern, muß das Eis schmelzen; beim Schmelzen erfolgt aber eine Kontraktion. Von — 21,72° bis — 7,00° behält die Ausdehnung des Eises die Ober-

*) Alle Volumina in Kubikzentimetern.

hand, von da ab bis — 0,10° überwiegt die Kontraktion infolge der Umwandlung des Eises in Wasser. Bei — 0,10° ist schon beinahe alles Eis geschmolzen; es nimmt nur noch 1,634 ccm in der Mischung ein*).

Hätten wir eine salzreichere Mischung genommen, so hätten wir natürlich qualitativ ähnliche, aber quantitativ etwas verschiedene Resultate erhalten. Mit wachsendem Salzgehalt verschiebt sich das Maximum des Volums nach den niedrigeren Temperaturen hin. Aus den Versuchen Peterssons folgt, daß das gewöhnliche Meereis sein Maximalvolum bei ungefähr — 20° C erreicht.

Die Schmelzwärme des Meereises ist variabel, sie hängt von der Menge der beigemischten Sole ab, und zwar ist sie um so geringer, je größer der Gehalt an Sole, denn Wärme ist nur zum Schmelzen des Eises nötig, die Sole braucht nicht erst geschmolzen zu werden.

Die Wärmeleitfähigkeit des Eises ist schlecht und infolgedessen sind die thermischen Gradienten sehr klein, z. B. ist in einer Tiefe von

40 cm	die Temperatur	— 23,9°
120 „	„ „	— 16,1°
200 „	„ „	— 10,6°.

Dazu ist die Oberfläche des Eises sehr oft mit einem noch schlechteren Wärmeleiter, dem Schnee, bedeckt. Dank dessen geringer Wärmeleitfähigkeit bilden sich in den Polarmeeren während eines Winters nicht mehr als zwei bis drei Meter Eis. Wenn man trotzdem häufig weit dickere Eisschollen beobachtet, so erklärt sich dies durch das „Packen" des Eises. Aus verschiedenen Gründen bricht das Eis. Durch Druck, durch die Tätigkeit der Wellen usw. werden einzelne Schollen und Stücke übereinandergeschoben bzw. -geworfen; frischgefallener oder angewehter Schnee kommt hinzu. Alles dies friert zusammen, wird wieder gebrochen und wieder aufeinander gepackt. So bildet sich das „Packeis", dessen Dicke nach einigen Jahren mehr als zehn Meter erreichen kann. Seiner Bildungsart entsprechend, ist das Packeis sehr uneben; seine Oberfläche sieht wie eine stürmische See aus. Die

---

*) Die Tabelle der Gefriertemperaturen von Chlornatriumlösung, deren sich Buchanan bedient hat, ist dem Schreiber dieser Zeilen unbekannt. Nach den ihm bekannten Daten sollte bei — 0,10° schon alles Eis geschmolzen sein, da die Lösung von 1,515 g Chlornatrium in 916,7 g Wasser ihren Gefrierpunkt bei — 0,101° hat. Jedenfalls handelt es sich um ganz unerhebliche Differenzen.

Unebenheiten der Oberfläche bezeichnet man mit dem russischen (in Sibirien gebrauchten) Namen „*Torossen*“ (sing. „*Toross*“). In den antarktischen Meeren sollen die *Torossen* nicht so häufig sein wie in den arktischen; das antarktische Eis soll weniger steif und brüchig sein als das arktische, es soll mehr Schnee und Sole als das andere enthalten.

§ 6. Die Eisberge.

Die arktischen Meere sind selbst im Sommer von Eis bedeckt. Nach Makarow sind zwischen Spitzbergen und Grönland im Sommer nur 18 bis 20 Proz. der Meeresoberfläche frei von Eis. Nach Krümmel soll die Eismenge, welche jährlich aus den arktischen Meeren in den Atlantischen Ozean gelangt, ungefähr 20 000 Kubikkilometer betragen. Ein Teil davon ist Meereis, ein anderer Gletschereis aus Grönland und von den Inseln des Nordamerikanischen Archipels. — Die Eisberge bestehen aus Gletschereis. Das grönländische Inlandeis fließt hauptsächlich nach Westen ab; es gelangt zum Meer nicht längs der ganzen Küste, sondern in Buchten und Fjorden, bis zu denen große Gletscherzungen hinabreichen. Da der Abfluß aus einem so großen Gebiete sich in wenigen Eiszungen konzentriert, so ist die Geschwindigkeit der Bewegung in diesen letzteren relativ sehr groß: täglich dringt das Gletscherende um einige Meter ins Wasser vor, wo es von Zeit zu Zeit „kalbt“. So wird nämlich das Abbrechen des Gletscherendes durch den Wasserdruck genannt. Die abgebrochenen Gletscherstücke schwimmen dann, von Meeresströmungen und Winden getrieben, als Eisberge umher. Ihre Geschwindigkeit ist gering: durchschnittlich beträgt sie nicht mehr als einige Seemeilen pro Tag. In ihrer Heimat, in eiserfüllten Fjorden, verbringen sie oft mehrere Jahre, sie frieren im Winter ein und werden im Sommer wieder befreit. Endlich gelangen sie aus dem Fjord in das offene Meer. Gerade beim Ausgang aus den Fjorden werden tiefer sitzende Eisberge durch unterseeische Schwellen längere Zeit zurückgehalten, bis durch Schmelzen und Zerfallen in kleinere Stücke das Überschreiten der Schwelle ermöglicht wird. Kleine Eisstücke gelangen unter das Meereis und mit diesem zusammen in das Packeis.

Die meisten arktischen Eisberge gelangen in den Atlantischen Ozean durch die Davisstraße. Kleinere Schollen und Stücke treiben natürlich nicht weit, größere Eisberge jedoch beginnen erst

in der Gegend von Neufundland, wo sie in das wärmere Wasser des Golfstromes geraten, intensiv zu schmelzen. Die *Neufundland-Bank* besteht, wie es scheint, vorwiegend aus Steinen, Geröllle, Sand und anderem Detritus, das mit den Eisbergen hierher kommt und bei der Schmelze abgelagert wird. Ein Teil der Eisberge umgeht die Bank und wandert noch weiter nach Süden, ausnahmsweise werden Reste von Eisbergen noch in 40° nördl. Br. angetroffen. Weiter östlich erreichen sie nie so niedrige Breiten: ausnahmsweise wurden 1836 Eisberge südlich der *Färöer-Inseln* unter 61° nördl. Br. gesehen. Nach der norwegischen, nordrussischen und sibirischen Küste gelangen sie nie. Ebenso sind sie im Nordpacifischen Ozean unbekannt.

Am größten sind die Dimensionen der Eisberge in ihrer Heimat, in den Fjorden. Doch auch hier haben sie selten 70, sehr selten 100 m Höhe über dem Wasser. Nur einmal hat Drygalski 137 m Höhe gemessen. Die totale Höhe ist natürlich viel größer, aber nicht $\frac{1,028}{1,028 - 0,917} = 9,27$ mal so groß, wie man nach der Dichte des Eises erwarten könnte. Gewöhnlich ist die totale Höhe nur sieben-, sechs-, ja selbst nur viermal so groß als die Höhe über dem Wasser, denn beim Schwimmen dreht sich die Breitseite nach unten, und derjenige Teil, der aus dem Wasser ragt, ist gewöhnlich zackig, voll Nischen und Löcher.

Die antarktischen Eisberge sind nicht höher, eher niedriger als die arktischen, aber ihre Horizontaldimensionen sind bedeutend größer: es sind ganze schwimmende Inseln. So hat man z. B. im Dezember 1854 unter 44° südl. Br. und 28° westl. Länge eine schwimmende Eisinsel von angeblich 40 bis 60 Seemeilen Länge gesehen, obwohl die Höhe gewiß nirgends über 90 m hinausging*). Die großen antarktischen Eisinseln sind wahrscheinlich nichts anderes als abgerissene Stücke des sogenannten *„Barriere“-Eises*, einer Besonderheit der Südhemisphäre. Auf große Strecken bildet das *Barriere-Eis* einen Saum um das antarktische Festland, es sieht wie eine ungeheure ebene, von einer vertikalen Steilwand begrenzte Tafel aus. Seinem Aussehen nach soll es sich vom Gletschereis unterscheiden: nach Murray**) ist, was über das Wasser-

*) Krümmel, a. a. O., S. 524.
**) Murray, Nature, Bd. 83, S. 149.

niveau ragt, kein Eis, sondern festgepackter Schnee. Es ist wahrscheinlich, daß dieses Eis nicht auf dem Meeresboden aufliegt, sondern im Wasser schwimmt. Es soll sehr hoch schwimmen*); oft sind die Höhe über Wasser und die Tiefe unter Wasser einander gleich.

Es wurde zuerst von A. Heim, dann von O. Nordenskiöld**) die Vermutung ausgesprochen, daß das *Barriere-Eis* anderer Herkunft als das Gletschereis sei: es soll an Ort und Stelle aus Schnee, und zwar in folgender Weise entstanden sein. Auf Meereis fällt Schnee, der im nächsten Sommer nur zum Teil schmilzt. Von Jahr zu Jahr häufen sich immer neue Schneelager auf; durch Druck, Auftauen usw. werden sie immer dichter, gleichzeitig tauchen die älteren Lager unter der Last neugebildeter immer tiefer ins Meer ein. So bildet sich mit der Zeit eine dicke schwimmende Tafel. Zuletzt muß ein stationärer Zustand einsetzen, indem das Schmelzen des Eises an der Unterfläche den Zuwachs durch Schneefall von oben aufwiegt. Dem entgegen hält Philippi***) das *Barriere-Eis* für ungeheure *Piedmontgletscher,* die zur Zeit der größten Ausdehnung dem submarinen Plateau, welches das antarktische Land umgibt, bis zu seinem Absturze gegen die Tiefsee auflagen. Das Schwimmen dürfte als eine sekundäre Erscheinung aufzufassen sein, die sich erst beim Rückgange der Vereisung einstellte. Angesichts der Divergenz der Anschauungen über die Herkunft des *Barriere-Eises* muß man warten, bis neue Beobachtungen Klarheit über die Frage verbreiten. Das Eis hat eine Bewegung; man hat schon eine Geschwindigkeit von 50 m in 5 Monaten und eine von ungefähr 450 m jährlich gemessen.

Im Atlantischen und im östlichen Teil des Indischen Ozeans erreichen die antarktischen Eisberge 45° südl. Breite, im Stillen Ozean 50° südl. Breite, aber gegenüber der Südspitze Südamerikas ist ihre Verbreitungsgrenze südwärts und gegenüber der Südspitze Afrikas nordwärts verschoben. Im Jahre 1840 hat man Eisberge†) vom Kap Agulhas aus treiben sehen.

---

*) Murray, Nature, Bd. 83, S. 149.

**) E. Philippi, Das Schelfeis der Antarktis. Zeitschr. f. Gletscherkunde, Bd. IV, S. 146—150.

***) E. Philippi, a. a. O., S. 150.

†) Nach Krümmel.

§ 7. Das Hochgebirgsklima.

Mit Ausnahme der Polarländer finden sich Gletscher nur im Gebirge. Es wird also nicht ohne Interesse sein, gewisse Merkmale des Gebirgsklimas kennen zu lernen. Bei klarem Himmel und derselben Sonnenhöhe ist die Bestrahlung im Gebirge stärker als in Niederungen, da die Sonnenstrahlen eine dünnere Schicht von Luft und Wasserdampf zu durchdringen haben. Als Beispiel können wir die Messungen Scheiners*) zu Potsdam (40 m Höhe) und auf dem Gorner Grat (3136 m Höhe) anführen. Aus den Messungen zu Potsdam am 27. und 28. Juni 1902 bei einer Weglänge von 1,15**) und einer Zenitdistanz der Sonne von 29° bis 29,4° finde ich als Mittel aus 24 Messungen 1,332 Grammkalorien pro Quadratzentimeter und Minute und aus den Messungen am Gorner Grat am 27. und 29. Juni, ferner am 2., 3., 4., 7., 9., 10., 11. und 12. Juli 1903 ebenfalls mit der Weglänge 1,15 und einer Zenitdistanz der Sonne von 27,8° bis 30,5°***) als Mittel aus 17 Werten 1,497 Grammkalorien pro Quadratzentimeter und Minute. Das Verhältnis dieser Zahlen ist 1 : 1,124. Aus den Durchlässigkeitskoeffizienten der trockenen Atmosphäre für den Zenitstand der Sonne, welche Abbot und Fowle†) für Washington (10 m Höhe) und Mount Wilson (1780 m Höhe) gefunden haben, berechne ich das Verhältnis Washington: Mt. Wilson = 1 : 1,2. Die Bewölkung nimmt selbstverständlich mit der Höhe ab, doch gilt dieser Satz zunächst nur für eine und dieselbe Vertikale. In der Regel haben die Gebirge einen mehr bewölkten Himmel als Niederungen, weil der Dampf während des Aufsteigens der Luft an den Gehängen sich kondensiert. Deswegen kann die Totalbestrahlung im Jahre trotz der größeren Insolationsstärke kleiner als in den Niederungen sein. Aber es wird sich immer eine gewisse Höhe finden, in welcher der Einfluß der Erhebung die Oberhand gewinnen und wo der

---

*) Scheiner, Untersuchungen über die Temperatur der Sonnenphotosphäre. Publikationen des Astrophys. Observatoriums zu Potsdam, Nr. 55 (Bd. XVIII), S. 16 und ff. Potsdam 1908.

**) Wobei die Weglänge beim Zenitstand der Sonne als Einheit genommen wird. Es ist somit eine Relativzahl.

***) Es wurden Messungen bei Weglängen 1,14, 1,15 und 1,16 mitgenommen. Die Messungen bei Weglängen 1,14 und 1,16 wurden auf 1,15 reduziert.

†) Abbot und Fowle, Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution, Bd. II, S. 128. (Washington 1908.)

Himmel im Jahresmittel heiterer als die benachbarten Niederungen bleiben wird.

Nach den Untersuchungen J. Hanns*) nimmt die Jahrestemperatur der Luft im Gebirge um 0,56° auf je 100 m Höhe ab. Wohlverstanden gibt es verschiedene lokale Abweichungen von diesem Mittel, aber eine systematische Abhängigkeit der Temperaturabnahme von der geographischen Breite existiert nicht. Dafür kann man leicht eine Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit konstatieren. In trockenen Gebieten ist die Abnahme größer, in feuchten kleiner. — Auch der Einfluß der Exposition fällt ins Auge. In mittleren und höheren Breiten der Nordhalbkugel ist die Temperaturabnahme auf den südlichen Abhängen größer, auf den nördlichen kleiner, so nimmt z. B. die Jahrestemperatur auf den Südabhängen der Schweizer Alpen durchschnittlich um 0,69° auf je 100 m und auf den Nordabhängen um 0,55° auf je 100 m ab. In den Ostalpen hat man 0,60° auf dem Süd- und 0,51° auf dem Nordhang. Die Temperaturabnahme mit der Höhe variiert mit der Jahreszeit: das Maximum erreicht sie im Sommer, das Minimum im Winter, der Frühlingswert nähert sich dem Sommerwert, während die Temperaturabnahme im Herbst zwischen dem Frühlings- und dem Winterwert liegt.

In einer gewissen Höhe wird immer die Temperatur 0° erreicht. Je nach der Jahreszeit wandert die 0°-Isotherme auf- oder abwärts. Nach J. Maurer**) verläuft sie auf dem Nordhang der Schweizer Alpen:

im Monat	Dezbr.	Januar	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septbr.	Oktbr.	Novbr.
in einer Höhe (in Metern) von . .	362	(170)	708	1167	1893	2566	3176	**3776**	**3772**	3385	2362	1367

Unter dem 32°. nördl. Breite im Himalaja sinkt sie bis zu 2800 m im Januar herab und steigt bis 5700 m im Juli hinauf.

Die Schneelinie — oder richtiger die untere Grenze des ewigen Schnees — fällt weder mit der Jahres-, noch mit der Sommer-Nullisotherme zusammen. Ihr Verlauf ist von verschiedenen Umständen, vor allem von der Größe des Schneefalls, abhängig und

*) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, S. 125 ff. Leipzig 1901.

**) J. Maurer, Temporäre Schneegrenze . . . Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXVI (1909), S. 545.

von Jahr zu Jahr gewissen Schwankungen sowie langsamen säkularen Variationen unterworfen. Man unterscheidet zwei Schneelinien: erstens die untere Grenze des kontinuierlichen Schnee- und Eisgebietes im Hochsommer, wenn das schneebedeckte Gebiet auf sein Minimum reduziert ist, zweitens die untere sommerliche Grenze sämtlicher Schnee- und Eisflecken. Es ist klar, daß diese zweite „Schneelinie“ immer unterhalb der ersten liegt. — Gemeinhin versteht man aber unter der „Schneelinie“ die Schneelinie im ersten Sinne. Wir werden uns auch an die erste Definition halten.

Wie gesagt, hängt die Lage der Schneelinie von sehr vielen Umständen ab, von den Niederschlägen, von der Bestrahlung, von den orographischen Verhältnissen usw. Sie wechselt von Ort zu Ort, so daß ihr Verlauf genau nur durch graphische Mittel dargestellt werden kann. Hier können wir nur die mittleren Höhen der Schneelinie, vorwiegend nach der Zusammenstellung von H. Heß*), angeben. In den *Anden von Quito* befindet sich die Schneelinie auf der niederschlagsreicheren östlichen Kordillere in 4500—4600 m, auf der trockenen westlichen in 4700—4800 m Höhe. Im trockenen Klima von *Süd-Peru* steigt die Schneelinie bis 6000 m auf, in *Chile* senkt sie sich wieder auf 4000 m. Je weiter nach Süd, desto tiefer senkt sie sich: in 41° südl. Breite auf dem *Osorno* befindet sie sich in 1500—1600 m und in der *Magelhaensstraße* in 1000 m Höhe. Im *Himalaja* befindet sie sich auf dem feuchteren südlichen Abhang in 4900 m und auf dem trockeneren Nordabhang (in Tibet) in 5600 m Höhe. Noch höher — bis 5500—6000 m — steigt sie im *Kuenlun* und *Karakorum* hinauf. In Afrika auf dem *Ruvenzori* und in Neuguinea auf der *Wilhelmspitze* befindet sie sich in 4500 m Höhe. Die verhältnismäßig tiefe Lage dicht unter dem Äquator ist dem Einfluß reichlicher Niederschläge zuzuschreiben. Deutlich erkennt man den Einfluß der Niederschläge im *Kaukasus*. Nach Dinnik verläuft die Schneelinie auf dem Südhang des westlichen Kaukasus in 2900 m und auf dem Südhang des östlichen in 3500 m Höhe. Auf dem Nordhang befindet sie sich in 3300 m im Westen und in 3900 m Höhe im Osten. — Die spanische Seite der *Pyrenäen* hat keine Gletscher bzw. ewige Schneefelder; auf der französischen Seite verläuft die Schneelinie in 2800—2900 m Höhe. In den *West-*

*) H. Heß, Die Gletscher, S. 57 und Karte I. Braunschweig 1904. Auch nach dem älteren Lehrbuch von Heim.

alpen befindet sie sich in 2700—2800 m Höhe; für die *östlichen Alpen* führen wir folgende Daten nach Richter an:

Berggruppe	Höhe der Schneelinie	Höchste Lage der Null-isotherme	Mittlere Sommer-temperatur	Mittlere Jahres-temperatur
Selvretta	2700 m	3400 m	+ 3,22°	— 3,33°
Hohe Tauern (Nordhang)	2660 „	3560 „	+ 4,43°	— 1,55°
Dachstein	2500 „	3490 „	+ 4,99°	— 1,19°
Ötztaler Alpen	2800 „	3640 „	+ 3,43°	— 3,89°
Hohe Tauern (Südhang)	2800 „	3640 „	+ 4,14°	— 2,70°
Ortler	2800 „	3610 „	+ 4,04°	— 3,27°

Aus den Schlüssen, zu denen Richter und Jegerlehner auf Grund einschlägiger Untersuchungen in den Ostalpen gekommen sind, wollen wir zwei hervorheben. Erstens verläuft in einer jeden Berggruppe die Schneelinie auf dem Südhang höher als auf dem Nordhang. Zweitens steigt die Schneelinie in jeder Gruppe von außen nach innen auf.

In *Norwegen* senkt sich die Schneelinie am Meer bis 1300, selbst 1100 m (*Folgefond*), aber nach dem Inneren des Landes zu steigt sie empor, um im *Jotunheim* 1900 m zu erreichen. Auf *Spitzbergen* befindet sie sich in 400—500 m und im *Kaiser-Franz-Josefs-Land* unter 82° in 100—300 m Höhe.

In feuchten Gebieten sind die Jahrestemperaturen in der Höhe der Schneelinie positiv, während im trockenen *Tibet* die Schneelinie in Höhen verläuft, in denen die Jahresmittel einige Grade unter Null liegen. In *Ostsibirien* gibt es keine Gletscher und keine Schneefelder — selbst in solchen Gegenden, wo die Jahrestemperatur — 17° beträgt. Ewige Schneefelder und Gletscher können nicht dort existieren, wo der Niederschlag spärlich ist, wo der gefallene Schnee in trockener Luft sich verflüchtigt, ohne zu schmelzen. Dafür hat man in Sibirien, auch in anderen nordischen Gebieten, ewig gefrorenen Boden, der nur im Sommer an der Oberfläche auftaut. In *Jakutsk* reicht der ewig gefrorene Boden bis zu ein paar hundert Meter Tiefe. — Ewig gefrorener Boden kann auch im Hochgebirge unter den Firn- und Schneefeldern vorhanden sein. Beobachtungen, die darüber Aufschluß geben könnten, besitzen wir nicht, aber daraus, was über Temperaturen innerhalb der Gletscher bekannt ist, kann man schließen, daß zwar nicht unter den Gletscherzungen, wohl aber unter den Firnfeldern die Tem-

peratur des Bodens unterhalb Null liegen kann. Es sind Beispiele bekannt, wo die Temperatur des Firns beträchtlich unterhalb Null liegt. J. Vallot hat folgende Temperaturen im Firn auf der *Montblancspitze**) gefunden:

Entfernung vom Eingang in den Tunnel	Dicke der Tunnelwölbung	Temperatur
4,0 m	2,5 m	—14,5⁰
6,0 „	3,0 „	—15,0⁰
8,0 „	4,0 „	—16,1⁰
10,0 „	5,0 „	—16,6⁰
11,5 „	5,5 „	—16,6⁰
13,0 „	6,5 „	—16,8⁰
18,0 „	8,5 „	—16,7⁰
23,0 „	10,5 „	—16,6⁰
28,0 „	13,0 „	—16,5⁰

§ 8. Schneefall im Gebirge.

Der Schnee fällt bei verschiedenen Temperaturen; man hat ihn schon bei —40⁰ und bei +10⁰ beobachtet, aber am häufigsten fällt er bei wenig von 0⁰ verschiedenen Temperaturen. Der Schnee, welcher bei großer Kälte fällt, ist trocken und wird leicht vom Winde verweht. — Der Schneefall ist von Jahr zu Jahr variabel, und zwar innerhalb noch weiterer Grenzen als die jährliche Summe aller Niederschläge.

Die gesonderte Feststellung der als Schnee fallenden Niederschläge ist immer mit Schwierigkeiten verbunden, besonders dort, wo die Niederschlagshöhe nur einmal am Tage gemessen wird. Deswegen konnte Maurer**) nur zwölf schweizerische Stationen finden, deren Aufzeichnungen ganz einwandfrei waren. Seine zwei Tabellen führen wir hier ohne Kürzung an, mit der Bemerkung, daß in der Mehrzahl der Fälle die Beobachtungen die Periode 1886 bis 1905 umfassen. Außer den *Schweizer* Stationen hat Maurer noch die *Zugspitze* und die *Sonnblickwarte* (Hohe Tauern) in seine Tabellen aufgenommen.

---

*) Zitiert nach der Besprechung durch J. Hann. Met. Zeitschr. Bd. XVI (1899), S. 203.

**) J. Maurer, a. a. O., S. 544.

Mittlere Niederschlagshöhen des Schnees (1886—1905).

Station	Höhe in Metern	Schmelzwasserhöhe in Millimetern												
		August	Septbr.	Oktober	Novbr.	Dezbr.	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	Summe
Lugano	276	—	—	—	6	21	22	31	13	2	—	—	—	95
Braggio, Calancascatal, Südhang der Alpen (1891—1900)	1313	—	5	18	49	44	67	46	69	36	12	0,5	—	346
Basel	277	—	—	1	5	9	15	14	9	3	—	—	—	56
Zürich	493	—	—	4	12	17	24	23	24	10	1	—	—	115
Luzern	453	—	0,5	3	11	17	22	24	27	10	2	—	—	116
Elm	963	3	6	35	40	57	65	80	71	57	22	0,3	—	436
Engelberg	1018	2	12	35	35	56	63	66	73	64	27	2	1	436
Davos (1896—1905)	1561	5	10	29	37	45	57	51	71	50	29	8	2	394
Sils-Maria	1814	7	14	34	56	53	47	46	69	52	36	10	3	427
Bernhardin	2073	17	42	144	201	133	123	109	212	219	144	29	13	1386
St. Bernhard (1874 bis 1883)	2476	16	69	90	126	111	69	75	76	115	106	36	22	911
Säntis	2500	91	112	143	127	163	153	166	185	219	171	126	100	1756
Zugspitze (1901—1907)	2964	170	113	96	72	91	61	70	101	116	136	154	166	1345
Sonnblick (1886/X. bis 1906)	3106	97	109	150	118	142	128	142	189	177	189	129	105	1675

Station	Prozente der gesamten Niederschlagsmenge												
	August	Septbr.	Oktober	Novbr.	Dezbr.	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	Jahr
Lugano	—	—	—	4	26	34	46	11	1	—	—	—	5
Braggio	—	3	9	40	91	82	94	86	42	8	0,3	—	24
Basel	—	—	1	8	20	41	38	20	6	0,1	—	—	8
Zürich	—	—	3	18	31	46	46	32	11	1	—	—	11
Luzern	—	0,4	3	16	36	53	47	37	10	1	—	—	10
Elm	2	4	28	55	63	78	84	67	50	17	—	—	29
Engelberg	1	8	27	49	64	75	75	67	49	18	1	0,4	27
Davos	3	10	49	80	91	98	97	94	69	39	8	1	40
Sils-Maria	6	12	31	71	98	96	100	96	76	43	10	3	42
Bernhardin	8	16	46	80	100	100	100	99	92	62	15	7	55
St. Bernhard	12	51	69	99	100	100	100	100	100	78	29	17	67
Säntis	33	54	81	98	100	100	99	99	99	84	47	34	72
Zugspitze	50	74	97	100	100	100	100	100	100	98	73	45	81
Sonnblick	69	92	99	100	100	100	100	100	100	100	89	68	93

Außerdem gibt Maurer noch folgende Daten nach einer bereits 1884 durch die meteorologische Zentralanstalt vorgenommenen Zusammenstellung aus der Beobachtungsperiode 1864 bis 1883:

Station	Höhe in Metern	Schmelzwasserhöhe in mm (Jahressumme)	Prozente der Niederschlagsmenge
Simplon	2008	511	62
Gotthard	2100	1130	58
Bevers	1711	335	40
Splügen	1470	479	31
Andermatt	1446	610	50
Klosters	1207	504	42
Platta	1378	445	34
Grächen	1629	253	46
Grimsel	1874	1407	71
Altdorf	452	106	9
Altstätten (im Rheintal)	470	129	10
Martigny	500	90	11
Genf	408	49	6

Weiter zeigt Maurer, daß die Zunahme des prozentualen Anteils des Schnees mit wachsender Höhe im Schweizer Alpengebiet verhältnismäßig regelmäßig von statten geht. Einzelne Hochtalstationen des alpinen Nordhanges — wie Klosters, Andermatt, Grimsel — zeichnen sich durch einen größeren Schneeanteil aus, als man nach ihrer Höhe erwarten könnte. — Soweit man nach den Daten für die Zugspitze und den Sonnblick beurteilen kann, dürfte in etwa 3600 m Höhe der Niederschlag das ganze Jahr hindurch als Schnee fallen; vereinzelte schwache Regenfälle im Hochsommer kommen nicht mehr in Betracht. Diese Höhe fällt beinahe zusammen mit der höchsten Erhebung der Nullisotherme in den Hochsommermonaten Juli und August am Nordhang des alpinen Gebietes (vergl. § 7, S. 523). Endlich hebt Maurer den Einfluß der Exposition hervor: alle am Südhang gelegenen Stationen zeichnen sich durch einen geringeren prozentualen Schneeanteil aus als die Stationen des Nordhanges. Die Mächtigkeit der Schneeschicht steht in keinem konstanten Verhältnis zur Schmelzwasserhöhe, weil bekanntlich die Dichte, selbst des frischgefallenen Schnees, innerhalb weiter Grenzen variiert. An einigen der obengenannten

Stationen wurde die Mächtigkeit des frischgefallenen Schnees gemessen. Durch Addition der einzelnen Messungen erhält man die Totalhöhe des während eines Jahres gefallenen Schnees. Maurer gibt folgende mittlere Totalhöhen für die Periode 1886 bis 1905 (in Zentimetern!) an:

Elm	Engelberg	Davos (1866—1905)	Sils Maria	Bernhardin	St. Bernhard (1874–1893)
416	437	569	408	955	1050

Am Bernhardin verhält sich die Höhe der Schmelzwasserschicht zur Totalhöhe der Schneeschicht wie 0,07 : 1 und zu Davos wie 0,14 : 1.

In den Gebirgen *Neuseelands* und *Patagoniens* sollen die Schneefälle stärker sein als in den Alpen, was angesichts des feuchten und gleichzeitig kalten Klimas dieser Länder natürlich erscheint.

Wir haben soeben gesehen, daß die jährliche Schneemenge mit der Höhe wächst. Dieses Wachsen ist jedoch nicht unbegrenzt; der Schneefall erreicht sein Maximum in einer gewissen Höhe, die von der Höhe der Wolken und von anderen meteorologischen Faktoren abhängt. In den Alpen z. B. fällt auf den höchsten Spitzen gewiß weniger Schnee als, sagen wir, in 3000 m Höhe. Nun nimmt die Bewölkung mit der Höhe ab und die Stärke der Insolation nach § 7 zu, so daß trotz der Abnahme der Lufttemperatur das Schmelzen des Schnees an der Sonne ermöglicht wird. Man sieht hieraus, daß oberhalb eines gewissen Niveaus die Bedingungen für die Bildung von Schnee- und Eisanhäufungen sich wieder weniger günstig gestalten. Gewisse Gebirge erreichen das Niveau, wo die Bedingungen am günstigsten sind, nicht, andere erreichen dieses Niveau oder ragen darüber hinaus.

Natürlich ist die Höhe nicht das einzige bestimmende Moment; verschiedene meteorologische und orographische Faktoren wirken mit. Von einem gewissen Abhang wird der Schnee durch den Wind weggefegt und vom anderen nicht, hier begünstigt die südliche Exposition die Schmelze, dort liegt ein Hochtal gerade in der Richtung der schneereichsten Winde usw.

§ 9. Die untere Grenze der Gletscher.

Die Lage des Endes eines Gletschers hängt offenbar von klimatischen Bedingungen und von den Dimensionen des Gletschers ab: ein großer Gletscher kann sich noch dort erhalten, wo ein kleiner

bereits nicht mehr existieren kann. Aber die Dimensionen der Gletscher sind ihrerseits eine Funktion klimatischer Faktoren, erst in zweiter Linie kommt das orographische Moment ins Spiel. Die ausschlaggebende Bedeutung des Klimas wird am besten aus nachfolgenden Daten*) ersichtlich sein.

Auf *Neuseeland* (Südinsel) erreicht der *Franz-Josef-Gletscher* unter 43,5° südl. Breite (Breite von Florenz!) das Niveau von 290 m und der *Foxgletscher* 200 m. Das ist ein Niveau, wo die Jahrestemperatur der Luft ungefähr + 10° C beträgt. Auf der weniger feuchten östlichen Küste rückt der große *Tasmangletscher* nur bis zu 780 m hinab. Auf der Westküste *Patagoniens* unter 46,5° (Breite von Lyon und Odessa) und bei einer Jahrestemperatur von 8,4° erreichen die Gletscher das Meer. Ebenso erreicht ein Gletscher in Britisch-Kolumbien unter 54° (Breite von Lübeck) das Meer. In Asien geht der *Biafogletscher* im Karakorum-Gebirge unter 35° 41′ bis 3080 m und der *Chaiagletscher* im Himalaja unter 31° bis 3200 m (Jahrestemperatur ungefähr 7°) hinab. Die größeren *Montblancgletscher* enden in 1450 m Höhe (Jahrestemperatur + 4,2°). Der „*Glacier du Bosson*" geht bis zur Jahresisotherme 6,5° herunter. In den Ostalpen, wo das Klima etwas trockener ist, enden die größeren Gletscher der Ötztaler Gruppe in etwa 2100 m (Jahrestemperatur ungefähr 0°). Im Altai unter dem 50°. (Breite Krakaus) endet der *Katungletscher* in 1240 m Höhe (Jahrestemperatur ungefähr — 2°). Weiter östlich im Sajangebirge am Munko-Sardyk unter 52° nördl. Breite endet ein Gletscher in 3170 m Höhe (Jahrestemperatur ungefähr — 10°).

In niederschlagsreichen Gebieten mit kaltem Sommer, gleichviel ob der Winter streng oder mild ist, rücken die Gletscher in Regionen hinunter, wo die Jahrestemperatur der Luft einige (bis 10°) Grade über Null liegt. Die Gletscher liegen mitten unter Wiesen und Wäldern: ein hochstämmiger Wald wächst auf der Deckmoräne des *Malaspinagletschers* in Alaska. In trockenen, niederschlagsarmen Gebieten mit heißem Sommer gibt es keine oder doch nur kleine Gletscher, deren Enden sehr hoch liegen. Die Lufttemperatur im Niveau der Gletscherenden beträgt einige (bis — 10°) Grade unter Null. Es existiert somit kein kausaler Zusammenhang zwischen der Jahrestemperatur der Luft und der Höhe der Gletscherenden über dem Meeresspiegel. Eher könnte man eine kausale

*) Hauptsächlich nach H. Heß, Die Gletscher.

Beziehung zur Sommertemperatur vermuten, aber bei einer näheren Prüfung bestätigt sich auch diese Meinung nicht. Überhaupt ist es müßig, eine Beziehung zwischen der Höhe der Gletscherenden und der Temperatur allein zu suchen, da die Existenz und die Größe der Gletscher durch zwei ebenbürtige Faktoren, den Schneefall und die Temperatur, bedingt werden.

§ 10. Die Umwandlung des Schnees in Gletschereis.

Frischgefallener Schnee hat eine sehr geringe Dichte: 0,1 bis 0,08, zuweilen sogar noch weniger. Zwischen den einzelnen Schneeflocken befindet sich Luft, so daß die Struktur des frischgefallenen Schnees mit der Struktur des Flaumes verglichen werden kann. Mit der Zeit wird der Schnee durch sein eigenes Gewicht verdichtet. Andererseits dringt beim Auftauen das Schmelzwasser zwischen die einzelnen Flocken und gefriert um sie herum. Durch abwechselndes Auftauen und Gefrieren bildet sich eine Eiskruste an der Oberfläche. Neüer Schnee bedeckt die Kruste, taut auf, friert ein und es bildet sich eine neue Eiskruste usw.

Wo die Schneedecke temporär ist, hat der Schnee keine Zeit, sich sehr stark zu verdichten; über der Schneelinie aber wird der mehrere Jahre alte Schnee von den darüberliegenden Schichten immer mehr und mehr zusammengepreßt. Er unterliegt gleichzeitig noch einer anderen Transformation: kleine Kristalle wachsen zusammen, das Schmelzwasser gefriert um die Kriställchen herum. Es bilden sich kleine unregelmäßige Kristallkörner, der flockige Schnee verwandelt sich in den grützenartigen „*Firn*“.

J. Vallot hat die Dichte des Firns auf den *Grands Mulets* in 3020 m Höhe gemessen. In 0,3 m Tiefe fand er die Dichte 0,484, in 0,5 m 0,477, noch tiefer 0,877, das Korn war noch sehr klein, das Eis undurchsichtig; es hatte noch nicht die charakteristische körnige Struktur des Gletschereises. — In der Nähe der Montblancspitze in 15 m Tiefe hat Vallot die Dichte 0,86 gemessen. Die Eiskörner hatten im Mittel ungefähr 2 mm Länge. Nach den Beobachtungen Vallots dauert die Umbildung des Schnees in Firneis nicht länger als zwölf bis fünfzehn Jahre. Angesichts dessen, daß die Temperatur des Schnees auf der Montblancspitze in der Regel -14^0 bis -17^0 beträgt, muß die ganze Umbildung hauptsächlich durch Druck unter Mitwirkung molekularer Umlagerungen zustandegekommen sein.

So entsteht körniges Eis aus Schnee. Einzelne Schneesternchen werden zu Embryonen der Eiskörner. Die ursprüngliche, zufällige Lagerung der Schneeflocken spiegelt sich in den späteren ungeordneten, zufälligen Stellungen der Kristallhauptaxen der Gletscherkörner ab. Mit der Zeit wächst das Korn sowohl im Firn als später im Gletscher. Es existieren drei Ursachen des Kornwachstums, von denen eine jede in einer anderen Theorie als besonders wichtig hervorgehoben wurde. — Nach der Theorie Forels wächst das Korn durch Anfrieren des Schmelzwassers: durch Schmelzen, Regenfall usw. gelangt Wasser in den Firn bzw. in das Innere des Gletschers, wo es gefriert. Dabei muß wenigstens ein Teil der Molekeln sich um die schon vorhandenen Kristallkörner gruppieren und ihre Dimensionen vergrößern. — Nach der Theorie von Hagenbach-Bischoff und Emden wachsen größere Körner auf Kosten der kleineren; einzelne Molekeln verlassen die kleinen Körner, um zu größeren überzugehen. Unmittelbare Versuche Emdens haben das Schwinden der kleinen Körner und das Wachsen der größeren dargetan. Wir müssen nebenbei bemerken, daß jeder Beweis zugunsten der Theorie Hagenbach-Bischoffs gleichzeitig die Theorie Forels stützt. In der Tat, wenn die Molekeln von einem Eiskorn zum anderen übergehen, um so mehr können sie sich aus dem Wasser den schon vorhandenen Kristallkörnern angliedern. — Die dritte Theorie des Kornwachstums, die Theorie Heims, knüpft an die Bewegungsvorgänge an. Infolge der Deformationen bei der Bewegung stellen sich von Zeit zu Zeit einzelne einander berührende Eiskörner so, daß ihre Hauptaxen parallel werden. Selbst Körner, deren Hauptaxen verschiedene Richtungen haben, frieren zusammen, um so fester müssen die Eiskörner, deren Hauptaxen gleichgerichtet sind, zusammenfrieren. Sie verwachsen zu einem einzigen kristallinen Individuum.

Alle drei Theorien sind gleichberechtigt und keine von ihnen schließt die beiden übrigen aus. Es kann sich nur darum handeln, welcher unter den oben beschriebenen Wachstumsarten die wichtigste Rolle in der Natur zufällt. Die dritte, in der Theorie Heims vertretene Art ist jedenfalls auf sich bewegendes und deformierendes Eis beschränkt, ferner ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei einander berührende Kristallindividuen sich auf eine kurze Zeit mit den Hauptaxen parallel zueinander stellen, nicht besonders groß. Unter den beiden übrigen Wachstumsarten scheint die zweite, das Wachsen

großer Körner auf Kosten der kleinen, die wichtigere zu sein. Überall, bei allen Temperaturen — selbst im Firn auf der Montblancspitze bei —15° C — können Molekeln von einem Korn zum anderen wandern. Im Innern der Gletscherzungen dagegen, wo die Temperatur nahe an der Schmelztemperatur liegt, wo erwiesenermaßen Wasser zirkuliert, kann das Wachsen des Kornes durch Anfrieren des Wassers gewiß eine wichtige Rolle spielen.

Mit der Zeit kann das Gletscherkorn eine ansehnliche Größe erreichen. In den Gletscherzungen nahe am unteren Ende beobachtet man ei-, ja selbst faustgroße Körner. Neben großen findet man kleine, selbst ganz winzige, wahrscheinlich im Schwinden begriffene Körner. Gleichzeitig mit dem Wachsen des Gletscherkornes schreitet die Verdichtung des Eises fort. Durch Druck wird die Luft aus dem Eis herausgepreßt, sie sammelt sich in Blasen und entweicht durch Spalten und Risse. Infolgedessen wird das Eis nicht nur dichter, sondern auch immer durchsichtiger und blauer. Reines, luftfreies Gletschereis erscheint in durchfallendem Lichte schön tiefblau, wie man in den Gletscherspalten und in den Gletscherhöhlen beobachten kann.

Das Gletschereis ist bei weitem nicht homogen. Einerseits sind einzelne Eispartien in verschiedenem Grade verunreinigt, andererseits beobachtet man neben dem blauen auch Streifen weißlichen Eises. Gewisse Streifen weißen Eises sind nichts anderes als alte, nachträglich mit Schnee gefüllte Gletscherspalten. Der Schnee in den Spalten unterliegt ähnlichen Metamorphosen wie der Schnee auf den Firnfeldern: er wird verdichtet und zu körnigem Firn, dann zu Gletschereis umgebildet. Alle Phasen seiner Entwicklung sind jedoch in bezug auf die Entwicklung des umgebenden älteren Gletschereises verspätet: seine Körner sind nicht so groß, es enthält mehr Luft, muß folglich undurchsichtig und weißlich erscheinen. Eine andere Ursache der Existenz der Streifen besteht wahrscheinlich in der ursprünglichen Schichtung des Firnes. Gleich anderen, aus den jährlichen Ablagerungen entstandenen Sedimenten, hat der Firn eine deutliche Schichtung. Die Anlage zu den Grenzflächen zwischen den einzelnen Schichten gibt das Auftauen der Schneeoberfläche und das nachträgliche Gefrieren zu einer Eiskruste. Staub, obgleich in diesen Höhen spärlich, begünstigt die Bildung der Grenzflächen. Einzelne Schichten können von Anfang an eine etwas verschiedene Mikrostruktur haben. Die Schichtung spiegelt sich in der inhomogenen Beschaffenheit des Gletschereises

wider. Bei Deformationen jedoch, welche das Nachsitzen des Firns und den Ausfluß des Eises aus dem Firnfeld begleiten, geht die ursprüngliche Lagerung verloren, die gekneteten Schichten werden zu unregelmäßigen Fladen umgestaltet.

§ 11. Die Gletscher.

In einem Gebirgsgletscher kann man immer das Firnfeld von der Gletscherzunge unterscheiden. Das erste spielt die Rolle der Quelle, das zweite die des Flusses. Die Firnfelder befinden sich oberhalb der Schneelinie, wo sie Hochtäler, Sattel, selbst Gipfel bedecken. Der Aufspeicherung von Schnee und Firn sind zirkusartige Hochtäler besonders günstig. Dort befinden sich jene Mulden, in denen der Schnee zu Firn und der Firn zu Eis umgewandelt wird. Die gesamte Mächtigkeit von Schnee, Firn und Eis ist sicher beträchtlich, oft muß sie Hunderte von Metern erreichen. Von derselben Größenordnung muß auch die Mächtigkeit der Gletscherzungen in ihrem oberen Teile sein. Am *Hintereisferner*, im axialen Gebiet, haben Blümcke und Heß*) durch Bohrungen eine Dicke des Eises bis 224 m festgestellt. Die Höhen (gemessen auf der Eisoberfläche), wo sie gebohrt haben, bewegen sich zwischen 2600 und 2700 m**).

Von den oberen Schichten gepreßt, fließen die unteren aus dem Firnfeld durch ein oder mehrere Täler aus. Zuweilen fließen zwei demselben oder verschiedenen Firnfeldern entstammende Gletscher zusammen. Sie vereinigen sich gleich Flüssen, aber ohne ihr Eis zu mischen.

Das Gefälle der Gletscheroberfläche ist immer bedeutend. Im Gegensatz zu den Flüssen, wo Winkelsekunden oder Minuten ausreichen, kann das Gefälle der Gletscher erst durch Grade ausgedrückt werden. Ein Gletscher der *Adamello*-Gruppe hat sogar ein Gefälle von 42°.

In dem Maße wie der Gletscher in höher temperierte Regionen hinabdringt, schmilzt er und verdampft; sein Querschnitt verringert sich, zuletzt endet er in einem Bach oder Fluß. Infolge der Verringerung seines Querschnittes hat ein Alpengletscher die Gestalt einer Zunge.

---

*) Blümcke und Heß, Tiefbohrungen am Hintereisgletscher. Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. IV, S. 66—70.

**) Doch gehört der Ort schon zur Gletscherzunge.



Brigsdalbrae, Nordfjord, Norwegen. (Brae = Gletscher.)
Nach einer Photographie des Verfassers.



Rudzki, Physik der Erde. Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.

Brigsdalbrae. Höhle, aus welcher der Gletscherbach ausfließt.
Nach einer Photographie des Verfassers.

Ein anderes Aussehen haben die großen Gletscher *Alaskas*. Sie treten aus Gebirgstälern auf eine flache Küste und breiten sich hier fächerförmig aus *(piedmont glacier)*. Wieder anders sehen die Firnfelder und Gletscher *Norwegens* aus. Der Westen dieses Landes stellt ein hügeliges, in *Jotunheim* gebirgiges, zum guten Teil über 1000 m hohes Hochland dar. Dieses ist von tiefen, steilwandigen Tälern in einzelne kleinere Hochländer *(Fjelde)* zerschnitten. Auf höheren Fjelden dehnen sich Firnfelder aus: der *Folgefond* bedeckt 288 qkm, das *Jostedalfirnfeld* 1076 qkm, *Swartisen* ca. 450 qkm, andere Firnfelder haben geringere Ausdehnung.

Ihre Oberfläche hat ein sanftes Gefälle. Die Firnfelder sehen wie ungeheure, unregelmäßige, sehr flache Kuppeln aus; stellenweise erreichen sie die steilen Abhänge der Täler und senden kurze, aber sehr steile Gletscherzungen hinunter. Die Dimensionen der Gletscher sind im Verhältnis zu den Dimensionen der Firnfelder gering, während in den Alpen der Gletscher oft nahezu dieselbe Fläche wie sein Firnfeld einnimmt. — Hie und da sieht man Eiskaskaden von steilen Hängen hinunterfallen; Firn und Eisblöcke schweißen unten zu neuen kleinen Gletschern zusammen. In Wasserfällen stürzen Gletscherbäche von oben in die Täler hinunter.

Die *grönländischen* Verhältnisse sind den norwegischen ähnlich; aber das grönländische Firnfeld, das sogenannte *Inlandeis* ist ein Riese, neben welchem die Firnfelder des *Folgefond* oder des *Jostedals* als Zwerge erscheinen. Es bedeckt beinahe ganz Grönland: von den 2,1 Millionen Quadratkilometer, auf welche die Fläche Grönlands geschätzt wird, nimmt es ungefähr 1,9 Millionen Quadratkilometer ein. Oben liegt natürlich Schnee, darunter Firn, noch tiefer Eis. Nansen vergleicht die Oberfläche des grönländischen Inlandeises mit einem ungeheuren flachen Schilde: der mittlere Krümmungsradius seiner Route quer durch das Eis berechnet sich auf ungefähr 3700 km. Folglich kann man den Querschnitt von Ost nach West in roher Weise durch einen Kreisbogen mit einem etwa die Hälfte des Erdradius messenden Radius darstellen. Auf Grund der bisherigen Beobachtungen kann man behaupten, daß die höchsten Oberflächenpunkte sich auf einer nordsüdlichen, der östlichen Küste näher gelegenen Linie befinden. Im Süden hat der Scheitel des Eises ungefähr 2300 m, in der Mitte etwa 3500 m Höhe, im Norden sinkt er wieder auf 2500 m. Die

Kante des Inlandeises hat nur etliche 40 bis 50 m Dicke. Sie befindet sich in der Regel in einer gewissen Entfernung von der Küste; nur an etwa hundert Stellen tritt das Eis ganz nahe an die Küste heran und nur an etwa fünfundzwanzig Stellen erreicht es das Meer. Hier brechen kolossale Eisblöcke ab, um als Eisberge (vergl. § 6) umherzuschwimmen. Die Mächtigkeit des Eises im Innern Grönlands ist unbekannt; nahe der Küste ragen aus dem nicht so mächtigen Eise einzelne Felsen *(Nunatakers)* heraus, aus dem Innern sind keine solchen bekannt.

Einen besonderen Typus stellt die Vereisung der Umgebung des *antarktischen Pols* dar. Während das antarktische Land von einem Inlandeis in der Art des grönländischen bedeckt ist, bildet das weit in das Meer hinausgehende *Barriere-Eis* (vergl. § 6) einen breiten Saum. Es endet in einer steilen Wand, deren Höhe lokal 70 m erreicht. Seine Oberfläche ist ganz eben. Schon Ross behauptete, daß dieses Eis schwimmt, und spätere Beobachtungen haben seine Ansicht bestätigt.

§ 12. **Der Flächeninhalt der Gletscher.**

Gebirgsgletscher — die größten Gletscher des Himalaja oder Neuseelands (der *Tasmangletscher* bedeckt 155,4 qkm) nicht ausgenommen — sind unvergleichlich kleiner als das antarktische oder grönländische Inlandeis, viel kleiner als das Eis des *Vatna-Jökull* auf Island, das mehr als 8500 qkm bedeckt. Nur die Gletscher Alaskas, welche aus dem Gebirge auf die Küstenebene hinaustreten, gehen weit über das gewöhnliche Maß hinaus. Der *Muirgletscher* bedeckt 1200 qkm, der *Malaspinagletscher* mehr als 5000 qkm ohne Firnfeld! Die Ausdehnung dieses letzteren ist unbekannt.

Nur bezüglich der Alpengletscher haben wir ganz zuverlässige Daten. Schon die Fläche der skandinavischen und kaukasischen Gletscher ist nur ungefähr, jedoch mit einer leidlichen Annäherung bekannt. Der angebliche Flächeninhalt der antarktischen Vereisung kann um einige Millionen Quadratkilometer irrtümlich sein. Das muß man fest im Auge behalten bei der Betrachtung der folgenden von H. Heß*) zusammengestellten Tabelle. An erster Stelle stehen 3800 qkm als Flächeninhalt der Alpengletscher. Eigentlich bedecken die Gletscher der Schweiz, Tirols

*) H. Heß, Die Gletscher, S. 114.

und der italienischen Alpen 3766 qkm**), aber 34 qkm wurden auf Rechnung einiger kleinen Gletscher in den französischen Alpen, ferner auf Rechnung einiger kleinen italienischen Gletscher, die in die Liste nicht aufgenommen wurden, hinzugefügt.

Gebiet	Fläche in qkm
Alpen	3 800
Pyrenäen	40
Skandinavien	5 000
Island und Jan-Mayen-Insel	13 470
Kaukasus mehr als	1 840
Zentralasien und Sibirien etwa . . .	10 000
Nordamerika und Alaska etwa . . .	20 000
Südamerika etwa	10 000
Afrika etwa	20
Australien und Neuseeland mehr als .	1 000
Grönland etwa	1 900 000
Spitzbergen etwa	56 000
Franz-Joseph-Land etwa	17 000
Inseln des Stillen Ozeans etwa . .	3 000
Novaja-Semlja etwa	15 000
Nordamerikanischer Archipel etwa .	100 000
Antarktische Vereisung etwa . . .	13 000 000
Zusammen mehr als	15 156 000.

Das macht ungefähr 3 Proz. der Erdoberfläche und 10 Proz. der ganzen Landoberfläche aus. Der Löwenanteil gehört dem antarktischen Eis, ein ansehnlicher Teil dem grönländischen Inlandeis und überhaupt den polaren Gletschern. Die Gebirgsgletscher bedecken eine unvergleichlich kleinere Fläche. Unser Wissen von den Gletschern beruht indes zum größten Teil auf Beobachtungen an Gebirgs- speziell an Alpengletschern.

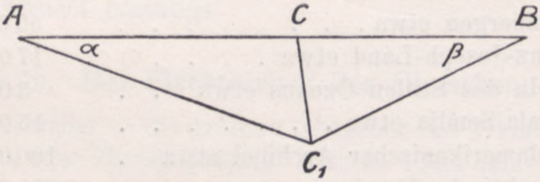
§ 13. Die Bewegung der Gletscher.

Die Bewegung der Gletscher war der Gebirgsbevölkerung von jeher bekannt; aber genaue Messungen der Geschwindigkeit datieren erst aus der Neuzeit. Die Messung der Geschwindigkeit geschieht in folgender Weise. Quer über den Gletscher wird eine Gerade (auf der Zeichnung *AB*) durch bemalte Steine oder andere Signale

**) Davon der größte, der Aletschgletscher mit 115 qkm.

markiert. Die Endpunkte A und B müssen sich auf dem festen Boden befinden und werden dauerhaft markiert. Die Strecke AB, ferner die Abstände zwischen A (oder B) und den Marken auf dem Gletscher werden ausgemessen (Fig. 60). Wenn also C eine Marke auf dem Gletscher bedeutet, so sind AB, AC und CB bekannte Entfernungen. Nach einer gewissen Zeit, z. B. nach einigen Jahren, werden die Marken auf dem Gletscher von A und B gleichzeitig anvisiert. Es zeigt sich immer, daß die Marken verschoben sind, z. B. ist C nach C_1 verschoben. — Im Dreieck ABC_1 ist die Seite AB bekannt, die Winkel α und β werden gemessen, folglich ist es ein leichtes, die Seiten AC_1 und BC_1 zu berechnen. Nachher berechnet man die Seite CC_1 entweder aus dem Dreieck ACC_1 oder aus dem Dreieck BCC_1. CC_1 ist aber die gesuchte Verschiebung der Marke C_1, aus welcher sich ihre Geschwindigkeit leicht berechnet.

Fig. 60.



Ebenso wie in einem Flusse ist die Geschwindigkeit der Bewegung an den Wänden und am Boden geringer als in der Mitte. Man kann ebenfalls eine **dynamische Axe**, d. i. eine Axe der größten Geschwindigkeit angeben. Dieselbe **weicht** ebenfalls **nach den konvexen Ufern aus**. Doch ist die Geschwindigkeit überall so gering, daß selbst ein geübter Beobachter nach einigen Stunden noch keine Verschiebung bemerkt; nur bei einigen grönländischen Gletschern wird die Verschiebung schon innerhalb einiger Stunden merklich. Dementsprechend wird die Geschwindigkeit der Gletscherbewegung nicht in Metern pro Sekunde, sondern in Metern pro Jahr angegeben. Hier mögen einige Beispiele folgen. In den Jahren 1894 bis 1895 haben **Blümcke** und **Heß** die Geschwindigkeit des *Hintereisferners* in sechs Querschnitten gemessen und folgende Ergebnisse erhalten (siehe nebenstehende Tabelle).

In diesem Falle verhielt sich die mittlere Geschwindigkeit zur Geschwindigkeit in der dynamischen Axe wie 4 zu 5; aber dies Verhältnis kann auch andere Werte haben: häufig hat es einen geringeren Wert.

Nummer des Querschnittes	Breite des Gletschers	Geschwindigkeit am Ufer	Geschwindigkeit auf der dynamischen Axe	Mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt
1	850 m	13 m jährlich	50 m jährlich	40 m jährlich
2	865 „	13 „ „	52 „ „	42 „ „
3	825 „	13 „ „	51 „ „	46 „ „
4	730 „	12 „ „	49 „ „	44 „ „
5	680 „	12 „ „	47 „ „	42 „ „
6	645 „	10 „ „	42 „ „	38 „ „

Bei alpinen Gletschern beobachtet man keine besonders großen Geschwindigkeiten: 30 bis 150 m jährlich. Von derselben Größenordnung sind die Geschwindigkeiten der skandinavischen Gletscher, aber bei den Himalaja-Gletschern hat man schon 700 bis 1300 m pro Jahr gefunden. Daß beim antarktischen *Barriere-Eis* an einer Stelle 500 m pro Jahr beobachtet wurden, haben wir schon oben erwähnt; aber dieses Eis ist Bedingungen unterworfen, die von den im Gebirge obwaltenden Bedingungen ganz verschieden sind, so daß ein Vergleich nicht möglich ist. In grönländischen Gletscherzungen ist die Geschwindigkeit verhältnismäßig groß: im *Karajakgletscher* erreicht sie ungefähr 7000 m jährlich. Im Innern des *Inlandeises* ist sie sicher viel kleiner als in den Gletscherzungen, doch nicht umgekehrt proportional dem Verhältnis des Querschnittes des Inlandeises zur Summe der Querschnitte der Gletscherzungen, weil die Bewegung des Eises nicht allein durch den Abfluß in den Gletscherzungen, sondern auch durch das Schmelzen an der Kante außerhalb der Gletscherzungen geregelt wird. Die Geschwindigkeit im Innern des Inlandeises muß größer sein als diejenige, die sich aus dem umgekehrten Verhältnis der Querschnitte ergeben hätte.

Wo zwei Gletscher sich vereinigen, mischt sich das Eis nicht, die Gletscher fließen nebeneinander her. Die Geschwindigkeiten gleichen sich jedoch bald aus, und die Verteilung der Geschwindigkeit unterhalb der Vereinigungsstelle unterscheidet sich nicht wesentlich von der Verteilung in einem Gletscher, der keine Zuflüsse besitzt.

Durch Schmelzen und Verdampfen schwindet die Gletscherzunge; insbesondere gegen das Ende hin wird der Schwund sehr intensiv. Infolgedessen nimmt die durchfließende Eismenge von oben nach unten ab, mit ihr nehmen gewöhnlich die Geschwindig-

keit und der Querschnitt ab. Wir sagen „gewöhnlich“, denn es gibt Ausnahmen von dieser Regel. Wenn z. B. die Gletscherzunge aus einem engen, stark geneigten Tal plötzlich in eine flache Ebene austritt, so breitet sie sich fächerförmig aus. Hier tritt eine Zunahme des Querschnitts und gleichzeitig eine um so größere Abnahme der Geschwindigkeit ein.

Nur äußerlich ist das Fließen der Gletscher dem Fließen der Flüsse ähnlich; der innere Mechanismus der Bewegung ist sehr verschieden davon. Dank der enormen inneren Reibung*) kommt keine pulsierende Bewegung zustande. Eine leichte Überschlagsrechnung zeigt, daß die kritische Geschwindigkeit Reynolds' (vergl. zwölftes Kapitel, § 2) für Eis Tausende von Kilometern pro Sekunde beträgt. Trotz des großen Gefälles der Gletscherbetten könnte sie erst in einem Kanal von einigen tausend Kilometern Durchmesser erreicht werden. Das Fließen des Eises ist dem Fließen einer zähen Flüssigkeit oder des Wassers in Kapillarröhren ähnlich. Somit sind auf die Gletscherbewegung nicht die empirischen Formeln des zwölften Kapitels (§ 5), sondern die durch Reibungsglieder ergänzten Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen 1 und 2 im zwölften Kapitel (§ 2) anwendbar. Nur dort, wo Spalten sind, verlieren die genannten Gleichungen, weil unter der Annahme der Kontinuität aufgestellt, ihre Geltung. — Zur Spaltenbildung werden wir etwas weiter unten zurückkehren, jetzt sehen wir von ihr ab.

Wir beschränken uns auf den Fall einer gleichmäßigen stationären Bewegung in einem geradlinigen Kanal und erhalten, ähnlich wie im zwölften Kapitel, § 2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\varrho}{\mu} g \sin i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

Wir haben die Dichte ausdrücklich niedergeschrieben, weil dieselbe für Eis nicht mehr — wie für Wasser — gleich der Einheit gesetzt werden kann.

Das allgemeine Integral der Gleichung 1 besteht aus einer quadratischen Funktion von y und z und aus einer Funktion von y und z, welche der bekannten Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

*) In § 4 haben wir gesehen, daß der Koeffizient der inneren Reibung etwa 7600 mal so groß ist als derjenige für Pech bei 6°.

genügt und so gewählt werden darf, daß die Grenzbedingungen befriedigt werden.

Betrachten wir zuerst die Bedingung in der Oberfläche. Man kann annehmen, daß die Reibung an der Luft keinen Einfluß auf die Bewegung des Eises hat. Tatsächlich muß diese Reibung im Vergleich zur Reibung am Boden und an den Wänden, ferner zu anderen in Betracht kommenden Kräften ganz verschwindend gering sein. Daraus folgt, daß die Geschwindigkeit des Eises ihr Maximum in der Oberfläche erreicht, was sich durch die Bedingung ausdrückt:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (in der Oberfläche)},$$

wobei n die Normale zur Oberfläche bedeutet. Nimmt man noch der Einfachheit wegen an, daß die Oberfläche des Eises eben ist, so kann die Bedingung in der Oberfläche als

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

geschrieben werden.

Weit schwieriger ist es, die Bedingungen für die Bewegung am Boden und an den Wänden aufzustellen. Es ist bekannt, daß die Gletscher gleiten, folglich muß die Geschwindigkeit am Boden und an den Wänden von Null verschieden und positiv sein. Aber das Gesetz der Reibung zwischen Fels und Eis ist unbekannt, und man kann nur mehr oder weniger plausible Annahmen über dasselbe machen.

B. Weinberg*) entscheidet sich zuletzt für eine Annahme, welche zu einer am Boden und an den Wänden konstanten Geschwindigkeit führt.

Um ein Beispiel der Anwendung der Gleichung 1 zu geben, nehmen wir mit Weinberg einen halbelliptischen Querschnitt an. Es sei $2b$ die Breite desselben und c seine größte Tiefe. Die Geschwindigkeit wird dann folgenden Ausdruck haben:

$$u = u_0 + \frac{\varrho g \sin i}{2\mu} \cdot \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

worin u_0 die konstante Geschwindigkeit am Boden und an den Wänden bezeichnet. Man sieht sofort, daß auf der Ellipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*) B. Weinberg, Über den Koeffizienten der inneren Reibung des Gletschereises . . . . . Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. I, S. 321—347.

u sich auf u_0 reduziert, daß ferner in der Oberfläche (d. h. für $z = 0$) $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ wird.

Es ist klar, daß die Differenz $u - u_0$ erstens proportional dem Sinus des Gefälles i, zweitens proportional den Quadraten der Lineardimensionen des Querschnittes wächst. Verlängert man nämlich b und c m-mal, so wird die Differenz $u - u_0$ m^2-mal so groß. — Nicht nur bei einem halbelliptischen Querschnitte, sondern allgemein wächst die im Integral der Differentialgleichung 1 auftretende quadratische Funktion proportional zur ersten Potenz des Sinus des Gefälles und zur zweiten der Lineardimensionen des Querschnittes. Von der ergänzenden Funktion, welche der Differentialgleichung 2 genügt, können wir nichts Bestimmtes aussagen, da ihre Beschaffenheit von den uns unbekannten Grenzbedingungen am Boden und an den Wänden abhängt. Im Beispiel Weinbergs war sie konstant.

Wir haben uns soeben auf den Fall einer stationären und gleichmäßigen Bewegung beschränkt. Die erstere Annahme ist gewiß zulässig, denn die Variationen im Zustand der Gletscher vollziehen sich so langsam, daß nur in denjenigen Aufgaben, die sich auf die Variationen beziehen, die Abhängigkeit des Zustandes des Gletschers von der Zeit berücksichtigt werden muß. Vorsichtiger muß man mit der Annahme der Gleichmäßigkeit der Bewegung sein, weil wegen des Schwindens der Gletscherzunge die Reibung am Boden und an den Wänden gegen das Ende immer mehr Einfluß gewinnt und die Geschwindigkeit immer rascher abnimmt.

Dort, wo der Gletscher eine Schwelle überschreitet, oder wo das Gefälle plötzlich zunimmt, bilden sich — von der Oberfläche angefangen — Querspalten. Sie entstehen verhältnismäßig leicht, denn Eis ist gegen Biegung und Zug sehr empfindlich; hier aber wird es gleichzeitig gebogen und gezogen. Man beobachtet verschiedene Spalten, von haarfeinen bis zu solchen, die mehrere Meter Breite haben, von ganz seichten bis zu solchen, die bis auf den Grund hinabreichen. Trifft der Gletscher auf einen gar zu steilen Abhang, so bricht er ab und fällt in Blöcken herunter. Unten kann er wieder zu einem neuen, ruhig weiterfließendem Gletscher zusammenschweißen. Schöne, durch Eiskaskaden unterbrochene Gletscher finden sich im Kaukasus in Svanetien.

Eine andere Ursache der Spaltenbildung besteht in den Unterschieden der Geschwindigkeit. An den Ufern fließt das Eis lang-

samer, in der Mitte schneller: ein auf der Eisoberfläche im gegebenen Zeitmoment gezeichnetes Quadrat verwandelt sich mit der Zeit in einen Rhombus, genauer in ein rhombenartiges, krummliniges Viereck. Eine Diagonale des Rhombus ist länger, die andere kürzer als die Diagonalen des Quadrates, folglich wird das Eis in der Richtung der ersten Diagonale auseinandergezogen, in der Richtung der zweiten zusammengedrückt. Es reißt senkrecht zur Richtung des größten Zuges (der längeren Diagonale), somit schief zur Uferlinie. Dank der großen Empfindlichkeit des Eises gegen Zug kommt das Reißen leicht zustande, nach Fabians Berechnung, sobald die Diagonale des Quadrates um $^1/_{5000}$ ihrer Länge ausgezogen wird. Auf die Zahl selbst ist kein besonderer Wert zu legen, aber von der Größenordnung der in Betracht kommenden Deformation wird sie schon eine richtige Vorstellung geben. Es könnte manchem so scheinen, als ob das Reißen des Eises sich mit seiner angeblichen Plastizität schlecht vertrüge; aber der Gegensatz ist nur äußerlich. Eis ist tatsächlich ein fester, brüchiger Körper; nur dank der Verschiebbarkeit der Eiskörner gegeneinander und der Verschiebbarkeit der Eisplättchen innerhalb des Kornes verhalten sich große Massen Eis wie ein plastischer, ja selbst wie ein dickflüssiger Körper.

In der Oberfläche wird übrigens die Spaltenbildung im Winter durch die niedrige Temperatur begünstigt. Bei Temperaturen, die tief unterhalb der Schmelztemperatur liegen, wird Eis in höherem Grade brüchig. — Im Zusammenhang hiermit müssen wir eine dritte Ursache der Spaltenbildung angeben: die Zusammenziehung des Eises beim Frost. Ein interessantes Beispiel der Spaltenbildung bei Frost gibt E. Drygalski*). Wohlverstanden setzen solche Spalten an der Oberfläche ein.

§ 14. Jährliche Variationen der Gletscherbewegung. Die Temperatur innerhalb der Gletscher.

Bei seinen Messungen in den Jahren 1842 bis 1845 hat Forbes bemerkt, daß die Gletscher im Sommer rascher fließen als im Winter. Zahlreiche spätere Beobachtungen haben diese Bemerkung bestätigt. Wir wissen heute ganz bestimmt, daß die Geschwindig-

*) E. Drygalski, Grönland-Expedition, Bd. I, S. 80 und Photographie daneben.

keit der Gletscherbewegung mit der Jahreszeit variiert, wobei die Amplitude der Geschwindigkeitsvariation sehr verschieden ist: beim grönländischen *Karajak*-Gletscher entzieht sie sich der Beobachtung, während bei zahlreichen Alpengletschern die Differenz zwischen Sommer- und Wintergeschwindigkeit sich auf mehrere Prozente beläuft.

Die Erklärung scheint evident zu sein: die Plastizität des Eises ist eine Funktion der Temperatur: je niedriger die Temperatur, desto geringer die Plastizität, desto geringer die Geschwindigkeit. Doch stoßen wir bei einer näheren Betrachtung auf eine Schwierigkeit. Bekanntlich betreffen die Temperaturvariationen nur eine relativ unbedeutende, ein paar Meter dicke Oberflächenschicht; das Innere der Gletscherzungen hat das ganze Jahr hindurch eine beinahe konstante, dem Schmelzpunkte nahe Temperatur. Also nicht in der direkten Wirkung der Temperatur liegt die Ursache der größeren Plastizität des Gletschereises im Sommer; sie liegt in der indirekten Wirkung durch die Vermittlung des Schmelzwassers. Im Winter hat die Oberflächenschicht eine Temperatur unter Null; im Innern hält sich die Temperatur nahe am Schmelzpunkt. Aber mangels Wärmezufuhr wird kein Eis geschmolzen; die Eiskörner sind zusammengefroren und können sich nicht gegeneinander verschieben. Im Sommer hält sich die Temperatur zwar ebenfalls am Schmelzpunkt, indem die Wärme durch das Schmelzen verbraucht wird; aber infolge des Schmelzens des Eises enthält der Gletscher mehr Wasser zwischen den Körnern, weshalb sie sich leichter verschieben können. Dank der geringen Wärmeleitfähigkeit des Eises muß die Wirkung der Temperaturvariationen sich mit einer gewissen Verspätung offenbaren.

Mit dem Einfluß der Temperatur interferieren andere Einflüsse. Der Winter ist diejenige Jahreszeit, in welcher sich neue Schneelager auf den Firnfeldern bilden; folglich muß der Ausfluß des Eises aus den Firnfeldern eine Beschleunigung gegen das Ende des Winters erfahren. Bevor sich jedoch diese Beschleunigung auf das Ende des Gletschers überträgt, können ganze Jahre vergehen.

Obige Bemerkungen über die Variationen der Geschwindigkeit müssen mit einem gewissen Vorbehalt hingenommen werden. Die sommerliche Beschleunigung der Bewegung besteht ohne Zweifel; aber darüber, wie sie zustande kommt, sind wir noch recht wenig unterrichtet. Die Beobachtungen über die Bewegung beziehen sich

hauptsächlich auf die Oberfläche; von der Bewegung im Innern der Gletscher wissen wir trotz der Bohrungen von Blümcke und Heß auf dem *Hintereisferner* noch wenig.

§ 15. Gletscherschwankungen.

Aus dem Mittelalter, sowie aus den späteren Jahrhunderten, sind Vorstöße der Alpengletscher bekannt. Alte Chroniken und Urkunden berichten über Wälder und Wiesen, die vom vorrückenden Eis zerstört wurden; sie erzählen davon, wie der Vernagtgletscher, der Ruitorgletscher Seitentäler abgedämmt haben, wie Seen sich bildeten und über den Damm flossen, wie Wasser den Eisdamm durchbrach und das Haupttal plötzlich überflutete usw. Im Jahre 1719 ersuchten die Einwohner Grindelwalds die Obrigkeit um Erlaubnis, den vorrückenden Grindelwaldgletscher „abzuwehren". H. Heß*), aus dessen Arbeit wir diese Nachrichten schöpfen, vermutet, daß es sich um eine „Abwehr" durch Zaubermittel handelte.

Die Gletscherschwankungen umfassen bald kürzere, bald längere Zeitabschnitte. Mehrere Jahre hintereinander rückt der Gletscher vor, endlich kommt er zum Stillstand, um nachher während mehrerer Jahre zurückzuweichen. Nach einem Rückzug erfolgt ein neuer Vorstoß und umgekehrt. Die Dauer der Rückzüge und Vorstöße ist verschieden. Kleine und kurzdauernde Vorstöße unterbrechen zuweilen einen mehrjährigen Rückzug oder umgekehrt.

Im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts wurde ein neuer Vorstoß der Alpengletscher konstatiert. Er wurde überall und vielseitig von Privatgelehrten, wissenschaftlichen Vereinen und Behörden kontrolliert. Das gesammelte Beobachtungsmaterial übertrifft an Fülle und Genauigkeit alles, was früher geleistet wurde. Doch hat man nichts besonders Neues, Unerwartetes beobachtet — vielleicht deswegen, weil der erwähnte Gletschervorstoß wenig intensiv war. Aus den Berichten des 17. und 18. Jahrhunderts, ferner aus den Berichten über den Vorstoß zwischen 1812 und 1820 ersieht man, daß der letzte Vorstoß hinter jenen älteren Vorstößen weit zurückgeblieben ist. Nicht einmal die Hälfte der Alpengletscher hat an dem Vorrücken teilgenommen, mehrere blieben nahezu stationär, andere verharrten im Rückzug. Übrigens hat man ältere

*) H. Heß, Die Gletscher, S. 254. Braunschweig 1904.

Beobachtungen nur bestätigen können; man hat beispielsweise gefunden, daß einzelne Gletscher sich sehr verschieden verhielten: einige rückten nur wenige, andere mehrere (bis zwanzig) Jahre lang vor. Das Vorrücken begann bei einigen Gletschern früher, bei anderen später: selbst in einer und derselben Gruppe, nämlich in der Montblancgruppe begann der *„Glacier des Bossons“* 1875 vorzurücken und kam 1892 zum Stillstand, während *„Le Trient“* von 1879 bis 1895 vorrückte. Die Intensität, sowie einzelne Phasen des Vorrückens, waren ebenfalls bei einzelnen Gletschern sehr verschieden.

Als neu und nur durch eine fortgesetzte Überwachung zahlreicher Gletscher erreichbar darf man nur zwei Ergebnisse bezeichnen. Es zeigte sich erstens, daß die Intensität des Vorstoßes im allgemeinen von West nach Ost abnahm, zweitens, daß die Alpengletscher um so später in das Stadium des Wachstums eingetreten sind, je weiter östlich sie liegen.

Die Ursache der Gletscherschwankungen liegt auf der Hand. Niederschlagsreiche Jahre — wir verstehen darunter solche Jahre, in denen die Niederschläge im Hochgebirge über das Mittelmaß hinausgehen — vergrößern den Vorrat von Schnee auf den Firnfeldern und verstärken den Ausfluß des Eises aus denselben. Eine ganze Reihe von niederschlagsreichen Jahren kann den Ausfluß auf die Dauer verstärken und eine namhafte Vergrößerung der Gletscherzunge zustande bringen. In trockenen und warmen Jahren schwinden die Schnee- und Firnvorräte auf den Firnfeldern, der Ausfluß des Eises vermindert sich, die schwachgenährte Gletscherzunge verkürzt sich. Dazu gesellt sich die direkte Wirkung auf die Gletscherzunge: in nassen und kalten Jahren wird weniger Eis in der Gletscherzunge geschmolzen, in trockenen und heißen mehr. — All dies erheischt keinen Beweis. Ebenso klar, ebenso evident ist die Notwendigkeit einer Verspätung in dem Vorrücken der Gletscherzunge im Vergleich zur Anhäufung der Schneevorräte auf den Firnfeldern. Selbst bei Flüssen erreicht das Hochwasser den Unterlauf erst eine Zeitlang nach der Schneeschmelze oder nach den Regengüssen am Oberlauf. Im galizischen Mittellauf des Dniesters wandert z. B. das Hochwasser mit einer Geschwindigkeit, die je nach Umständen zwischen 3,5 und 6,5 km pro Stunde variiert. Etwas Ähnliches geschieht auch bei den Gletschern mit dem Unterschied, daß angesichts der hunderttausendmal so kleinen Geschwindigkeit der Gletscherbewegung die Eisflut ebenfalls nicht einige

Tage, sondern Jahre oder ganze Dezennien braucht, um vom Firnfeld bis zum Ende der Gletscherzunge zu gelangen. Das betreffende Zeitintervall ist natürlich um so länger, je länger die Gletscherzunge und je geringer die Geschwindigkeit des Eises ist. Auch die Orographie des Firnfeldes und des Tales muß einen Einfluß auf die Fortpflanzung der Eisflut haben, so muß z. B. ein enger Eingang in das Tal den Abfluß des Eises aufhalten.

§ 16. Moränen.
Erosion durch die Gletscher und Erosion der Gletscher.

Im Gegensatz zum Transportvermögen der Flüsse ist das Transportvermögen der Gletscher von der Geschwindigkeit unabhängig: ein auch noch so langsamer Gletscher kann hausgroße Felsblöcke auf seinem Rücken transportieren. Aus demselben Grunde sieht man keine Bevorzugung eines besonderen Materials: der feinste Staub, faustgroße Steine und die größten Felsblöcke werden nebeneinander und mit derselben Geschwindigkeit befördert. Das von den Abhängen des Tales auf den Gletscher herunterfallende Material häuft sich selbstverständlich am Rande an und bildet hier die sogenannte „Seitenmoräne“. Seitenmoränen sind ein Merkmal der Gebirgsgletscher; auf dem grönländischen Inlandeis fehlen sie, da das Eis Berg und Tal überzieht und keine Abhänge sich über dem Gletscher erheben, von denen Steine, Grus usw. auf seine Oberfläche gelangen könnten. — Seitenmoränen ziehen sich streifenförmig am Rande des Gletschers hin. Wo zwei Gletscher sich vereinigen, vereinigen sich auch ihre Seitenmoränen zu einer „Mittelmoräne“. — Kleine Steine, von der Sonne erhitzt, schmelzen das Eis unter sich und bilden Vertiefungen. Vom Wasser überdeckt frieren sie dann bei fallender Temperatur ein. Große Blöcke verhalten sich anders: sie werden an der Oberfläche erhitzt, aber die Unterfläche, welche auf dem Eise aufliegt, erreicht keine so hohe Temperatur, und es geschieht deshalb sehr oft, daß das Eis rund um den Block herum schneller schmilzt als unter dem Blocke. Infolgedessen entsteht mit der Zeit ein tisch- oder pilzartiges Gebilde, bei welchem der Block den Hut und der Eispfeiler den Fuß darstellt.

Viel festes Material gelangt in das Innere des Gletschers durch Spalten: auf den Firnfeldern fällt auf die Schneeoberfläche Staub, Steine rollen von überragenden Felsen herunter. All dies, von

neuen Schneeschichten überdeckt, sinkt langsam mit dem Firn zusammen in die Tiefe und fließt nachher mit dem Eise zusammen in die Gletscherzunge hinaus. Infolgedessen ist das Gletschereis mit Steinen, Sandkörnern, Staubpartikeln wie gespickt. Wo das Eis schmilzt — also vor allem am Ende der Gletscherzunge — konzentrieren sich die Verunreinigungen; das Eis wird schmutzig, seine Oberfläche bedeckt sich mit Schmutz und Steinen. Endlich schmilzt das Eis vollständig und all das im Innern enthaltene, sowie auf dem Rücken mitgeführte feste Material sinkt zu Boden. Ein Teil desselben wird vom Gletscherbach weggeführt: oft ist das Wasser von den suspendierten Teilchen so trübe, daß es wie Milch (Gletschermilch) aussieht. Das übrige, vor allem das gröbere Material bleibt an Ort und Stelle liegen und bildet die sogenannte „Endmoräne". Endmoränen sind Anhäufungen durcheinander gemischten feineren und gröberen Detritus. Sie werden von Gletscherbächen erodiert und umgelagert, bei den Vorstößen der Gletscher durchwühlt und vorwärts geschoben.

Die Moränen unterscheiden sich von den Wasserablagerungen durch den Mangel an Sichtung. Fließendes Wasser läßt zuerst gröberes Material zu Boden fallen, erst mit weiter abnehmender Geschwindigkeit lagert es auch feineres Material ab. Auf diese Weise werden grobkörnige Sedimente getrennt von den feinkörnigen abgesetzt. Bei einem Gletscher hingegen ist das Transportvermögen von der Geschwindigkeit unabhängig, und beim Schmelzen wird alles zusammen und durcheinander abgelagert. Dank ihrer Entstehungsweise sind Gletscherablagerungen demnach ungeschichtet, ferner ist all das feste Material — mit Ausnahme derjenigen Steine und Körner, welche zur Grundmoräne gehören — nicht abgeschliffen, nicht abgerundet. Nach dem Mangel an Schichtung, Sichtung und Abrundung unterscheidet man leicht Gletscherablagerungen von Fluß- und Seeablagerungen.

Endmoränen erreichen zuweilen sehr große Dimensionen: die alten eiszeitlichen Moränen bei *Ivrea* im *Dora Baltea*-Tal bilden eine amphiteatrale Hügelreihe, deren Gipfel 600 m über dem Talboden liegen. Auf den Moränen am *Lago di Garda* wurde die Schlacht von Solferino im Jahre 1859 geliefert.

Wir haben soeben die „Grundmoräne" erwähnt. Weiche, lose Bodenarten werden vom Eis allein erodiert und mit fortgeschoben. Zur Erosion harter Felsen helfen eingefrorene, eingedrückte Steine, Geschiebe und Sandkörner, welche die Felsober-



Querschnitt der Moräne am Meerauge (Fischsee), Tatragebirge.
Nach einer Photographie des Verfassers.



Rudzki, Physik der Erde. Verlag von Chr. Herm. Tauchnitz, Leipzig.

Eide (wallartige Moräne) zu Odda, Hardangerfjord, Norwegen.
Nach einer Photographie des Verfassers.

fläche kratzen und schleifen. Das abgeschliffene Material wird auch mit fortgeführt, und es bildet sich auf diese Weise unter dem Gletscher eine bewegliche Schicht Steine, Geschiebe und Schlamm, die „Grundmoräne“, die ihrerseits beim Schleifen und Kratzen der Felsen hilft. — Wo der Fels von Sprüngen durchsetzt oder längs der Schichtflächen sich leicht abtrennen läßt, werden ganze Blöcke durch Reibung weggerissen und mit fortgeführt.

Eine eingehende Diskussion der Gletschererosion gehört nicht zu unserem Programm; aber wir können als durch geologische Forschung sichergestellt annehmen, daß Gletscher schon fertige Flußtäler erweitern und zum Teil auch vertiefen. Durch Gletscher allein geschaffene Täler kennt man schon aus dem Grunde nicht, weil eine Vergletscherung immer ein bereits von Flüssen erodiertes Land vorgefunden hat. Die Gletscher haben somit schon fertige Abflußrinnen vorgefunden und brauchten sich nicht erst welche zu schaffen. Von den Gletschern ausgeschliffene und erweiterte Täler haben den charakteristischen, auf den ersten Blick erkennbaren *U*-förmigen Querschnitt — im Gegensatz zum *V*-förmigen Querschnitt der Flußtäler. Sie zeichnen sich auch durch geschliffene und gekratzte Felsoberflächen aus. Der Verlauf der Schrammen legt Zeugnis von der Bewegungsrichtung des Eises ab.

Im Sommer bilden sich auf der Gletscheroberfläche zahlreiche kleine Bäche, welche zum großen Teil in Spalten enden. Das niederfallende Wasser schmilzt das Eis und bildet eine Art Brunnen („Gletschermühlen“), welche zuweilen bis auf den Grund hinabreichen. Steine, die in einen solchen bis zum Grunde reichenden Brunnen gefallen sind, werden zuweilen dank dem Impuls des niederfallenden Wassers in drehende Bewegung versetzt und scheuern eine Vertiefung im Felsen aus. Solche Vertiefungen heißen „Riesentöpfe“. — Im Sommer bilden sich auf der Gletscheroberfläche kleine Lachen, im Innern zirkuliert Wasser in den Spalten und schmilzt Höhlen und Gänge aus. Im allgemeinen ist die Erosion des Eises der Erosion des Kalksteins ähnlich: Kalkgesteine werden von kohlensäurehaltigem Wasser, Eis wird von warmem Wasser aufgelöst. Eine besondere Erwähnung verdienen noch die Wasserläufe unter dem Gletscher, welche wallartige Sedimentanhäufungen hinter sich zurücklassen.

Vierzehntes Kapitel.

Die Eiszeit.

§ 1. Klimaschwankungen. Eiszeit.

Auf die Frage der Klimaschwankungen wollen wir nicht eingehen. Unter Hinweis auf die reiche Literatur dieses Gegenstandes — vor allem auf das bekannte Buch „Klimaschwankungen seit 1700“ E. Brückners — werden wir uns sofort der großen prähistorischen Klimaschwankung, welche unter dem Namen „Eiszeit“ bekannt ist, zuwenden. In den Alpen, Pyrenäen und im Kaukasus, in Skandinavien, Großbritannien, Norddeutschland, Polen, Litauen, Nord- und Zentralrußland, in Nordamerika örtlich bis zum 38⁰. nördl. Br. finden sich rezenten Gletscherablagerungen ganz ähnliche Bodenarten, die als Erzeugnisse ehemaliger Gletscher gedeutet werden müssen. — Diese von alten glazialen Ablagerungen bedeckten Gebiete umgeben die Gebiete der gegenwärtigen Vergletscherung in solcher Weise, daß die ehemalige Vergletscherung als eine außerordentliche Vergrößerung und Steigerung der gegenwärtigen aufgefaßt werden kann. Umgekehrt können gegenwärtige Gletscher als Überreste der alten Vergletscherung gelten.

Eigentlich stammen die alten glazialen Ablagerungen nicht aus einer, sondern aus mehreren Eiszeiten her. Die besten Kenner der alpinen Glazialablagerungen unterscheiden vier große Eiszeiten, in Schottland zählt J. Geikie sechs große Vergletscherungen. Zwischen die Eiszeiten schieben sich sogenannte „Intraglazialzeiten“ ein, in denen das Klima Europas sicher nicht kälter, sondern eher wärmer als gegenwärtig war. Die Frage, ob vier oder sechs Eiszeiten zu unterscheiden sind, ist für uns ohne Belang. Wichtig dagegen ist die Feststellung, daß die Eiszeit nicht in einer einzelnen Erniedrigung der Temperatur, sondern in einer Reihe von Klimaschwankungen unter- und oberhalb des gegenwärtigen Mittels bestand.

Vor der Eiszeit, eigentlich vor den Eiszeiten, war das Klima bedeutend wärmer als jetzt. Soweit man nach paläozoologischen und paläophytologischen Überresten beurteilen kann, herrschte damals in Europa ein subtropisches Klima.

Die Amplitude der Temperaturvariation von einer Eiszeit zu einer Interglazialzeit und umgekehrt kann auf Grund gewisser Tatsachen geschätzt werden. Beispielsweise kann man aus der Ausdehnung der Gletscher die ehemalige Lage der Schneelinie annähernd bestimmen. Zwar stimmen einzelne, von verschiedenen Forschern unternommene Bestimmungen nicht vollkommen untereinander überein, doch können wir sagen, daß wenigstens während einer der vier Eiszeiten die Schneelinie in den Alpen gewiß um 1200 m niedriger lag als heute. Da die Jahrestemperatur im Gebirge durchschnittlich um 0,56° für je 100 m Erhebung abnimmt, liegt der Versuch nahe, die Variation der Jahrestemperatur auf — 6,7° C zu schätzen. Erwägt man aber, daß die Lage der Schneelinie nicht in dem Maße von der Jahrestemperatur wie von der Sommertemperatur und von der Quantität der Niederschläge abhängt, so wird man vorsichtigerweise die Erniedrigung der Jahrestemperatur auf nur 2 bis 4° C schätzen. — Andererseits hat man in der berühmten *Höttingerbreccie* bei Innsbruck in 1150 m Höhe Pflanzenreste aus der ersten Interglazialzeit entdeckt. Unter anderem hat man *„Rhododendron ponticum“* und *„Buxus sempervirens“*, die heutzutage bei Innsbruck in dieser Höhe nicht leben können, gefunden. Die Jahrestemperatur im Niveau der Höttingerbreccie beträgt nur ungefähr 5°; indes wächst das Rhododendron ponticum auf feuchten Südabhängen des Kaukasus nur bis zu einer Höhe, wo die Jahrestemperatur ca. 7° C beträgt. Somit war die Jahrestemperatur in der ersten Interglazialzeit „wenigstens“ um 2° höher als heutzutage. — Addiert man die Variation nach unten zur Variation nach oben, so erhält man 4 bis 6° als Minimum der Amplitude der Jahrestemperaturvariation. Wir sagen ausdrücklich „Minimum“, denn man könnte leicht durch eine etwas andere Interpretation derselben, sowie anderer, ganz glaubwürdiger Daten zu einer doppelt so großen oder noch größeren Amplitude gelangen.

Von Anfang an haben wir die Frage der Temperaturvariation aufgeworfen, denn, ohne die Bedeutung eines reicheren Niederschlags für die Vergletscherung verkennen zu wollen, glauben wir doch, daß eine allgemeine Ausdehnung der gegenwärtigen Vergletscherung nicht ohne eine allgemeine Temperaturerniedrigung zustandekommen könnte. Mit der Mehrzahl moderner Glazialforscher denken wir uns die Temperaturerniedrigung als auf beiden Halbkugeln, der nördlichen und südlichen, gleichzeitig.

Wie lange die Eiszeit, eigentlich die Eiszeiten, gedauert haben, können wir natürlich nicht genau ausrechnen; nur über die Größenordnung der in Betracht kommenden Zeitspanne können wir uns orientieren. Nach der Meinung Pencks und Brückners*) ist die Dauer des gesamten Eiszeitalters von der Größenordnung einer Million von Jahren. Die letzte *(Riß-Würm)* Interglazialzeit umfaßte wahrscheinlich einen Zeitraum von beträchtlich mehr als 60000 Jahren, die vorletzte *(Mindel-Riß)* einen solchen von bedeutend mehr als 240000 Jahren. Die Dauer der Glazialzeiten ist von derselben Größenordnung wie die Dauer der Interglazialzeiten, aber durchschnittlich scheinen die ersten etwas kürzer gewesen zu sein als die zweiten.

§ 2. **Astronomische Ursachen der Eiszeit.**

Man kann sich verschiedene Ursachen einer Klimavariation denken. Wir werden zuerst die „astronomischen“ Ursachen betrachten.

Wir nehmen an, daß die Sonnenstrahlung konstant ist, d. h. daß die Sonne in gleichen Zeitintervallen immer gleiche Wärmemengen ausstrahlt. Weiter sehen wir von der Abplattung der Erde ab. Ist nun c_1 diejenige Wärmemenge, welche eine in der Entfernung einer Längeneinheit zu den Strahlen normale Flächeneinheit während der Zeiteinheit von der Sonne erhält, so erhält die Erde während der unendlich kleinen Zeit dt:

$$\frac{c_1}{r^2} R^2 \pi \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Wärmeeinheiten. In diesem Ausdruck bedeutet R den Radius der Erdkugel und r die Entfernung Erde—Sonne. — Gleichzeitig hat man nach dem zweiten Keplerschen Gesetze:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

wo v die wahre Anomalie, d. h. den Winkel zwischen der augenblicklichen Richtung des Radiusvektors der Erde und der Richtung: Sonne—Perihelium, ferner c_2 die sogenannte Flächenkonstante be-

*) Bei dieser Schätzung waren die Größe des Einzugsgebietes und die außerordentliche Mächtigkeit der quartären Ablagerungen in der Poebene entscheidend.

deutet. Eliminiert man dt aus der Gleichung 1 mit Hilfe der Gleichung 2, so erhält man:

$$\frac{c_1}{c_2} R^2 \pi \, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

als Ausdruck für diejenige Wärmemenge, welche die Erde während der Zeit dt von der Sonne erhält. Die Integration über eine endliche Zeit kann sofort ausgeführt werden, da der Faktor

$$C = \frac{c_1}{c_2} R^2 \pi$$

einen konstanten Wert besitzt. Man erhält dadurch:

$$C(v_2 - v_1)$$

als Ausdruck für diejenige Wärmemenge, welche die Erde während der endlichen Zeit $t_2 - t_1$ von der Sonne erhält. Aber $v_2 - v_1$ ist der Winkel, welchen die Erde auf ihrer Bahn während der Zeit $t_2 - t_1$ beschreibt. Somit haben wir den allgemeinen Satz, daß die Wärmemenge, welche die Erde während einer gewissen Zeit von der Sonne erhält, proportional dem während derselben Zeit in der Bahnebene zurückgelegten Winkel ist.

Bekanntlich ist die Erdbahn nicht genau elliptisch und die Keplersche Gleichung nicht streng erfüllt; es handelt sich aber nur um ganz unbedeutende Abweichungen, die unbeachtet bleiben können. Nur die Änderungen der Exzentrizität der Erdbahn können einen merklichen Einfluß auf die jährlichen Wärmesummen ausüben. Es enthält nämlich c_2 den Faktor $\sqrt{1 - e^2}$ (wo e die Exzentrizität der Erdbahn bedeutet), und dementsprechend enthält C den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$. Aber die Grenzen, innerhalb welcher e variiert, sind so eng, daß die Konstante C ebenfalls nur innerhalb sehr enger Grenzen variieren kann.

So entsprechen z. B. dem oberen Wert von e — nämlich 0,07775 und seinem gegenwärtigen Wert 0,01675 — Werte von C, die sich wie 1,003 : 1 verhalten.

Dank der Symmetrie in bezug auf die Äquatorebene verteilt sich die jährliche Wärmemenge immer ganz gleich auf die beiden Halbkugeln. Während eines Jahres erhält die Nordhalbkugel immer dieselbe Wärmemenge wie die Südhalbkugel. Dagegen haben Perturbationen in der Bewegung der Erde Einfluß auf die Verteilung der Wärme auf einzelne Breiten, sowie auf die Verteilung der

Wärme auf verschiedene Jahreszeiten, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Bisher haben wir von der Abplattung der Erde abgesehen. Dieselbe kann in gewissen Fällen einen Einfluß auf die jährlichen Wärmesummen ausüben. Ein abgeplattetes Rotationsellipsoid erhält in einem Jahre mehr Wärme bei einer größeren Ekliptikschiefe, weniger Wärme bei einer kleineren Ekliptikschiefe. Aber die Abplattung der Erde ist so klein, daß die Variationen der Ekliptikschiefe keinen nennenswerten Einfluß auf die jährlichen Wärmesummen ausüben können.

Laut Gleichung 4 ist somit die der Erde zugute kommende Sonnenwärme den in der Bahnebene zurückgelegten Winkeln proportional. Da die Erde zwischen zwei Nachtgleichen gleiche Winkel beschreibt, so sind auch die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nachtgleichen auf die Erde entsandten Wärmemengen einander gleich. Gegenwärtig vergehen zwischen der Frühlings- und der Herbstnachtgleiche 186 Tage 11 Stunden und zwischen der Herbst- und Frühlingsnachtgleiche 178 Tage 19 Stunden. Folglich kommt durchschnittlich auf jeden einzelnen Tag im ersten Zeitintervalle (Sommer der Nord-, Winter der Südhemisphäre) eine geringere Wärmemenge als im zweiten (Winter der Nord-, Sommer der Südhemisphäre). Die Lage der Nachtgleichenpunkte auf der Erdbahn ist indes nicht konstant: diese Punkte verschieben sich in einem der Richtung des Erdumlaufes entgegengesetzten Sinne (das ist die Präzession der Nachtgleichen); so daß der Winkel zwischen der Verbindungslinie der Nachtgleichenpunkte und der größeren Axe der Erdbahn langsam variiert. Gegenwärtig beträgt er 101°. Beträgt dieser Winkel 0° oder 180°, so sind die beiden Intervalle zwischen den Nachtgleichen einander gleich — beträgt er jedoch 90° oder 270°, so erreicht die Differenz zwischen einem Zeitintervall und dem anderen ihr Maximum. Dabei ist das Zeitintervall zwischen dem Frühlings- und dem Herbstäquinoktium einmal länger, ein anderes Mal kürzer als das Intervall zwischen dem Herbst- und dem Frühlingsäquinoktium. Offenbar ist diese Ungleichheit eine Funktion der Exzentrizität der Erdbahn: sie wächst mit wachsender Exzentrizität; bei einer kreisförmigen Erdbahn würde sie nicht existieren.

Die Periode der Präzession umfaßt eigentlich ca. 25 800 Jahre. Da aber die große Axe der Erdbahn sich auch verschiebt, so braucht der Winkel zwischen der Nachtgleichengerade und der

größeren Axe nur ungefähr 21 000 Jahre, um alle Werte zwischen 0^0 und 360^0 zu durchlaufen.

Ohne Zweifel müssen die Änderungen der Zeitintervalle zwischen den Nachtgleichen gewisse, obwohl wahrscheinlich sehr kleine Änderungen im Klima beider Hemisphären bewirken. Diese Änderungen müssen alternativ — wie ihre Ursache — sein. Falls während 10 500 Jahren auf einer Hemisphäre die Änderung A und auf der anderen die Änderung B stattgefunden hat, so muß während der nächstfolgenden 10 500 Jahre auf der ersten Hemisphäre die Änderung B und auf der zweiten die Änderung A stattfinden. Deswegen können solche Theorien, wie die Theorie Adhémars, welche nur die Verschiebung der Nachtgleichenlinie berücksichtigte, oder die Theorie Crolls, welche außer der Verschiebung der Nachtgleichenlinie noch die Änderungen der Exzentrizität der Erdbahn in Rechnung zog, nur zu alternierenden Vergletscherungen bald der einen, bald der anderen Halbkugel führen. Indes herrscht unter den Glazialforschern die Ansicht, daß beide Halbkugeln von den Eiszeiten gleichzeitig betroffen wurden. Auch läßt sich die regelmäßige, in gleichen Zeitabschnitten erfolgende Wiederkehr der Eiszeiten mit den Ansichten der Glazialforscher nicht in Einklang bringen. Diesen stellt sich die Erscheinung als eine Reihe unregelmäßiger Klimaschwankungen in Zeitperioden von verschiedener Dauer dar.

Der Einfluß der Änderungen der Ekliptikschiefe ist wesentlich verschieden: sie wirken gleichzeitig und im selben Sinne auf beide Halbkugeln ein. Bekanntlich sind die Jahreszeiten durch die Neigung der Erdaxe (Ekliptikschiefe) bedingt. Wird das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nachtgleichen Sommerhalbjahr bzw. Winterhalbjahr genannt — je nachdem der Sommer oder der Winter der gegebenen Halbkugel in das betreffende Zeitintervall fällt —, dann verhält sich die Wärmemenge, welche eine gegebene Halbkugel im Sommerhalbjahr von der Sonne bekommt, zur Wärmemenge, welche dieselbe Halbkugel im Winterhalbjahr bekommt, wie

$$(\pi + 2 \sin \varepsilon) : (\pi - 2 \sin \varepsilon),$$

worin ε die Ekliptikschiefe bezeichnet.

Es ist klar, daß dieses Verhältnis gleichzeitig mit der Ekliptikschiefe zu- und abnimmt. Gegenwärtig beträgt die mittlere Ekliptikschiefe ungefähr $23^0 27'$, woraus sich das obige Verhältnis auf 1,68, d. h. beinahe 5 : 3 berechnet. Die Ekliptikschiefe variiert innerhalb ziemlich weiter Grenzen.

Auf Grund der Formeln Lagranges hat Schubert*) folgende Grenzwerte für ε gefunden: untere Grenze 18° 6′, obere 28° 52′. Im ersten Falle hat das Verhältnis $(\pi + 2 \sin \varepsilon) : (\pi - 2 \sin \varepsilon)$ den Wert 1,493, im zweiten 1,887.

Mit wachsender Ekliptikschiefe muß der Gegensatz zwischen den Jahreszeiten auf beiden Halbkugeln gleichzeitig wachsen. Die Gleichzeitigkeit und die Gleichheit des Sinnes der Klimaänderungen auf beiden Halbkugeln entspricht den Forderungen der Glazialforscher, aber der Charakter der Änderungen entspricht ihnen nicht. Dasjenige, was die Glazialforscher behufs Erklärung der Eiszeiten brauchen, ist eine allgemeine Erniedrigung der Temperaturen, besonders der Sommertemperaturen. Unterdes veranlaßt das Wachsen der Ekliptikschiefe eine Verschärfung der Gegensätze zwischen der Winter- und der Sommertemperatur: je größer die Ekliptikschiefe, um so strenger der Winter, um so wärmer der Sommer — je kleiner die Ekliptikschiefe, um so milder beide Jahreszeiten. Infolgedessen scheinen die Änderungen der Ekliptikschiefe zur Erklärung der Glazial- und Interglazialzeiten wenig geeignet zu sein. Wir sagen „scheinen", denn entschieden „Ja" oder „Nein" zu sagen, haben wir kein Recht. Wir sind nicht imstande, den Einfluß einer gegebenen Änderung der Ekliptikschiefe auf die Temperatur der Erdoberfläche und auf andere meteorologische Elemente rechnerisch zu verfolgen.

§ 3. Andere mögliche Ursachen der Eiszeit.

Außer den „astronomischen" gibt es noch andere Ursachen, welche Klimaänderungen hervorrufen können. Eine lokale Eiszeit könnte durch eine Hebung des Landes herbeigeführt werden. Denken wir uns z. B., daß Skandinavien sich um tausend Meter gehoben hat, so müßte es sich mit einer Decke von Inlandeis überziehen und zu einem zweiten Grönland werden. Kein Wunder also, wenn seinerzeit Lyell Klimaänderungerungen auf Hebungen und Senkungen, im allgemeinen auf Änderungen der Konfiguration der Kontinente und Ozeane zurückführen wollte. Aber die Erklärung der Eiszeiten durch Hebungen läßt sich schwerlich mit ihrem wiederholten Auftreten in Einklang bringen.

---

*) Schubert, Über die Veränderung der Schiefe der Ekliptik und des Sonnenjahres. Berliner Astron. Jahrb. für 1799, S. 213—216.

Man findet keinen triftigen Grund dafür, daß ein Land einigemal hintereinander — wie ein aus der Ruhelage gebrachtes Pendel — hin und her schwinge. Noch weniger wahrscheinlich ist, daß so viele Länder und Gebirge auf der ganzen Erde sich gleichzeitig heben und senken. — Heutzutage faßt man die Rolle der Landoszillationen gerade umgekehrt wie zur Zeit Lyells auf. Man hielt damals die Hebung bzw. Senkung des Landes für die Ursache und die Vergletscherung bzw. das Schmelzen des Eises für die Folge. Heute hält man die Vergletscherung bzw. das Schmelzen des Eises für die Ursache und die Oszillationen des Landes für die Folge. Das Land senkt sich unter der Last des Eises, es hebt sich, wenn die eintretende Eisschmelze es von dieser befreit. — In einem Punkte aber stimmen wir mit Lyell überein, nämlich in der Ansicht, daß gewisse Gebiete (vor allen Skandinavien) vor dem Eiszeitalter höher lagen als heute und demzufolge bei eintretender Temperaturerniedrigung zuerst vergletschert wurden.

In der älteren Literatur begegnete man oft der Ansicht, daß die Eiszeit leicht durch eine Änderung in der allgemeinen Konfiguration der Festländer und der Meere erklärt werden könnte. — Bekanntlich übt diese Konfiguration einen entscheidenden Einfluß auf die Meeresströmungen und einen sehr wichtigen auf die Luftströmungen aus. Man kann sich z. B. sehr leicht eine Konfiguration denken, bei welcher das Klima Nordeuropas bedeutend kälter als heute sein müßte. Aber diese Hypothese ist wenig geeignet, zur Erklärung einer allgemeinen Temperaturabnahme auf der ganzen Erde zu dienen, auch kann sie das Abwechseln der Interglazial- und Glazialzeiten nicht erklären. Man kann doch nicht annehmen, daß, sagen wir im Nordatlantischen Ozean, eine bestimmte Konfiguration mit einer anderen mehreremal hintereinander gewechselt hat. Außer diesen negativen Gründen sprechen auch noch positive Gründe dagegen. Soweit man aus geologischen Spuren, aus der Verteilung und Ausdehnung der eiszeitlichen Gletscher und aus verschiedenen anderen Anzeichen beurteilen kann, war zur Eiszeit sowohl die Konfiguration der Meere und Festländer als auch die Verteilung der Meeres- und Luftströmungen der gegenwärtigen wesentlich ähnlich.

Ebenso verwerflich ist die Hypothese, welche die Eiszeit durch eine Verschiebung der Pole erklären will. Zwar wissen wir, daß die Pole auch gegenwärtig kleine Bewegungen ausführen, zwar müssen wir die theoretische Möglichkeit langsamer aber weit-

reichender Polverschiebungen unbedingt zugeben. Angesichts der Tatsache, daß die eiszeitliche Vergletscherung eigentlich nur als eine Steigerung und Ausdehnung der gegenwärtigen erscheint, sind wir jedoch gezwungen anzunehmen, daß die Lage des Pols während der Eiszeit von seiner gegenwärtigen Lage nur wenig verschieden war. Demgegenüber müßte man zur Erklärung der Vereisung Nordeuropas annehmen, daß der Nordpol sich diesem Festland um ungefähr zwanzig Grade genähert hat.

Betreffs der voreiszeitlichen Epoche erlauben wir uns den drastischen Ausspruch Heers zu wiederholen, „daß die Miozänfloren den Nordpol wie Hunde allerseits umstellt haben, so daß er nach keiner Seite ausweichen konnte“.

§ 4. Variationen der Sonnenstrahlung.

Im Paragraph 2 haben wir willkürlich angenommen, daß die Sonne in gleichen Zeitintervallen gleiche Wärmemengen ausstrahlt. Diese Annahme entsprach unserem damaligen Standpunkte. In der Absicht, den Einfluß der Perturbationen in der Bewegung der Erde auf das Klima zu untersuchen, durften wir unsere Überlegungen durch Betrachtung gleichzeitiger Variationen der Sonnenstrahlung nicht komplizieren. Jetzt werden wir diesen Standpunkt verlassen.

Seitdem Pouillet im Jahre 1837 zu Paris für die Sonnenkonstante den Wert 1,76 g-kal. pro Minute und Quadratzentimeter gefunden hat, ließ sich bei den Neubestimmungen dieser Konstante eine bis auf wenige Ausnahmen stetige Progression zu immer größeren Werten wahrnehmen, die 1890 mit dem Ångströmschen Werte *(Teneriffa)* 4,00 g-kal. ihren Gipfelpunkt erreichte. Seither ist eine Änderung eingetreten. Ångström hat seinen Wert von 1890 einfach zurückgenommen und gibt jetzt nur 2,2 g-kal. an, welcher Wert mit anderen, neuen Resultaten übereinstimmt. Man muß sich hüten, in diesen Schwankungen der Sonnenkonstante etwas Reelles — etwa einen Beweis der Variationen der Sonnenstrahlung — zu erblicken; sie beruhten beinahe ausschließlich auf Irrtümern. Nach der Definition ist die *Solarkonstante* diejenige Wärmemenge, welche ein Quadratzentimeter einer senkrecht zu den Sonnenstrahlen liegenden Oberfläche während einer Minute im mittleren Abstand Erde—Sonne erhielte, wenn keine Atmosphäre vorhanden wäre. Aus der Definition ersieht man sofort, daß die Solarkonstante unmittelbar nicht gemessen werden

kann, sie kann nur aus der durch die Atmosphäre hindurchgelassenen Wärme berechnet werden. Die atmosphärische Absorption ist aber eine komplizierte Erscheinung: die Absorption der Luft ist für Strahlen verschiedener Wellenlänge verschieden; besondere Schwierigkeiten bietet die Absorption solcher Bestandteile der Atmosphäre wie der Kohlensäure und des Wasserdampfes. Außerdem läßt sich eine Extrapolation nicht vermeiden; man kann z. B. die Wärmemengen bei verschiedenen Zenitdistanzen der Sonne messen und auf diese Weise erfahren, wieviel Energie bei größerer bzw. kleinerer Weglänge der Strahlen durch die Atmosphäre durchgelassen wird. Aber daraus muß man auf die Energiemenge bei der Weglänge Null schließen, was außerhalb der Grenzen aller möglichen Beobachtungen liegt. Nun hat man bei dieser Extrapolation verschiedene Methoden befolgt und verschiedene Fehler begangen. Besonders schädlich hat sich ein falscher Schluß erwiesen, den eine so hohe Autorität wie Langley gezogen*) hat. Sein Material sollte eigentlich auf einen Wert der Solarkonstante von nur 2,06 bis 2,22 g-kal. führen, aber infolge eines Irrtums in der Interpretation der Diskordanz zwischen den gemessenen und den berechneten Wärmemengen schätzte Langley die Solarkonstante zu hoch, nämlich auf 3 g-kal. Das Beispiel Langleys hat, wie es scheint, andere Forscher zu ähnlichen Überschätzungen verleitet. So geschah es, daß die Solarkonstante bis auf 4 g-kal. hinaufgeschraubt wurde, trotzdem die durchgelassene Strahlung selbst auf hohen Bergen und bei kleiner Zenitdistanz selten 1,5 bis 1,6 g-kal. übertrifft. Als außerordentliche Ausnahme führt Scheiner**) an, daß Stankewitsch im Pamirgebiete in großen Höhen (bis zu 4650 m) mit dem Ångströmschen Pyrheliometer Strahlungswerte bis 2,02 g-kal. erhalten hat. Dabei war die Zenitdistanz der Sonne 16°, die Temperatur — 3°. Er selbst hat auf dem Gorner Grat in 3136 m Höhe nur bis 1,570 g-kal.***) (einmal bei 24,4° Zenitdistanz am 2. Juli 1903) gemessen.

---

*) C. G. Abbot und F. E. Fowle, Determination of the intensity of solar Radiation . . . . Annals of the Astroph. Observatory of the Smithsonian Institution, Bd. II, S. 119 und ff. (Washington 1908.)

**) Scheiner, Untersuchungen über die Temperatur der Sonnenphotosphäre. Publikationen des Astroph. Observatoriums zu Potsdam, Bd. XVIII, Nr. 55 (1908), S. 72. Es ist nicht ausgeschlossen, daß das Instrument, dessen Stankewitsch sich bediente, zu hohe Werte ergab.

***) Derselbe, a. a. O. S. 27.

Während bei der obengenannten Extrapolation in der Regel Fehler im Sinne der Überschätzung begangen wurden, liegt eine andere Ursache — die aber bald positive bald negative Fehler erzeugt — im Mangel einer gemeinsamen pyrheliometrischen Skala. Eigentlich sind die Beobachtungen eines jeden einzelnen Forschers auf eine andere Skala bezogen. Abbot und Fowle meinen, daß der daraus entspringende Fehler zuweilen ein Viertel des Wertes der Solarkonstante erreicht.

Aus seinen Beobachtungen auf dem Gorner Grat im Jahre 1903 leitet Scheiner*) 2,22 bis 2,29 g-kal. als Wert der Solarkonstante ab. Abbot und Fowle**) bleiben bei 2,1 g-kal. als dem wahrscheinlichsten Werte stehen, während einzelne Bestimmungen zwischen 1,9 und 2,2 g-kal. schwankten. Daß Ångström jetzt 2,2 g-kal. angibt, haben wir schon oben erwähnt. Zum Vergleich führen wir noch einige ältere Bestimmungen nach Scheiners Zusammenstellung***) an:

Pouillet (1837) .	Solarkonstante	= 1,79 g-kal.
Forbes (1842) . .	„	= 2,82 „
Hagen (1860) . .	„	= 1,9 „
Violle (1875) . .	„	= 2,59 „
Crova (1878) . .	„	= 2,28 bis 2,37 g-kal.
Langley (1884) .	„	= 3,07 g-kal.
Saweliew (1889) .	„	= 2,86 (später 3,47) g-kal.
Pernter (1889) .	„	= 3,05 bis 3,28 g-kal.
Crova und Hansky (auf dem Montblanc 1897) .	Solarkonstante	= 3,1 bis 3,9 g-kal.

Daß aus der obigen Tabelle keine Schlüsse bezüglich der Variationen der Solarkonstante abgeleitet werden können, ist nach dem Obengesagten klar. Behufs Entdeckung dieser Variationen sind lange, mit einem und demselben Instrumente und unter denselben Bedingungen ausgeführte Beobachtungsreihen erforderlich. Identische Bedingungen kann man freilich nie haben, aber schon unter ähnlichen Bedingungen gemessene Werte können brauchbares Material liefern, wenn nur die in Betracht kommenden Schwankungen der atmosphärischen Absorption innerhalb der Grenzen der reellen Strahlungsschwankung liegen. Hindernd können sich

---

*) Scheiner, a. a. O. S. 71.

**) Abbot und Fowle, Annals Astr. Obs., Bd. II, S. 99.

***) Scheiner, a. a. O. S. 72.

schwache, andauernde Trübungen der Atmosphäre erweisen. Wegen ihrer Schwäche können sie nicht als solche erkannt und ihr Effekt kann für eine Abnahme der Sonnenstrahlung gehalten werden. — Ein konstanter Fehler in der Reduktion hat geringe Bedeutung, da zur Feststellung der Variationen Differenzen ausreichen, nur müssen die Reduktionen unbedingt immer nach einer und derselben Methode ausgeführt werden.

Vor allem müssen die Messungen der Sonnenstrahlung eine jährliche, vom wechselnden Sonnenabstand abhängige Variation zeigen. Das Maximum der Strahlung muß auf die Epoche der größten Sonnennähe (Anfang Januar), das Minimum auf die Epoche der größten Sonnenweite (Anfang Juli) fallen. Die totale Amplitude der Variation muß ungefähr 6 Proz. betragen. Nun wollen Abbot und Fowle*) in ihren Messungen auf dem Mount Wilson (in 1780 m Höhe) sowohl 1905 als 1906**) während der beiden Monate September und Oktober eine Zunahme der Strahlung um 3 Proz. konstatiert haben. Sie sind geneigt, diese Zunahme durch die Abnahme des Sonnenabstandes zu erklären. Ob keine Täuschung vorliegt, können wir nicht entscheiden.

Man hat schon einigemal Strahlungsabnahmen während mehrerer Monate beobachtet. So hat Crova aus seinen aktinometrischen Messungen zu Montpellier eine Strahlungsabnahme in den Jahren 1883 bis 1886 gefunden. Ebenso hat man auf mehreren europäischen und amerikanischen Stationen eine Strahlungsabnahme von Ende 1902 bis Anfang 1904 konstatiert. Doch stehen beide Abnahmen unter dem Verdacht, auf einer Zunahme atmosphärischer Absorption infolge Anwesenheit feiner Staubpartikeln zu beruhen.***) Tatsächlich hat die erste Strahlungsabnahme nach dem *Krakatau*-Ausbruch (27. August 1883), die zweite nach den Ausbrüchen des *Mont Pelée* auf der Insel Martinique und der *Soufrière* auf der Insel St. Vincent stattgefunden. Der *Mont Pelée* brach mehreremal aus, das erstemal am 5. Mai, das letztemal am 28. August 1902. Derjenige Ausbruch, welcher St. Pierre zerstört hat, erfolgte am 8. Mai. Aus dem *Soufrière*-Vulkan erfolgten ebenfalls mehrere Ausbrüche, die stärksten am 7. und 18. Mai 1902. — Außer diesen Strahlungs-

---

*) Abbot und Fowle, a. a. O. S. 178.

**) Diese Messungen umfaßten die Zeit von Mitte Mai bis nahezu Ende Oktober.

***) Nach Langleys Meinung (Astroph. Journal, Bd. XIX [1904]) beruhte die zweite Strahlungsabnahme auf einer reellen Abnahme der Sonnenstrahlung.

abnahmen soll nach Abbot und Fowle*) noch eine andere auf einer reellen Abnahme der Sonnenstrahlung beruhende im August 1905 stattgefunden haben. Überhaupt neigen Abbot und Fowle zu der Ansicht, daß die Differenzen zwischen den Werten der Solarkonstante, die an einzelnen Tagen erhalten werden, nur zum Teil auf Beobachtungsfehlern bzw. auf Variationen der Durchsichtigkeit der Erdatmosphäre beruhen. Zum größeren Teil sollen sie von reellen Variationen der Sonnenstrahlung herrühren. „Die Sonnenstrahlung ist weder konstant“, sagen sie**), „noch ausschließlich innerhalb einer elfjährigen Periode variabel; während eines Jahres, sogar schon während eines Monats, kann sie in unregelmäßiger Weise um 5 Proz., zuweilen um 10 Proz. ihres Wertes variieren.“

Es fragt sich nun, ob außer den direkten Beweisen der Veränderlichkeit der Sonnenstrahlung keine indirekten bekannt sind.

Aus der Veränderlichkeit der Sterne kann man nicht viel lernen: periodisch variable Sterne vom Algol-Typus, welche aller Wahrscheinlichkeit nach in regelmäßigen Zeitabschnitten von einem lichtschwachen oder dunklen Begleiter verfinstert werden, können wohlverstanden keinen Aufschluß geben; man kann nur von solchen Sternen etwas Positives erwarten, deren Lichtvariationen auf reellen Schwankungen der Strahlenenergie beruhen. Es besteht kein Zweifel, daß derartige Sterne existieren; man kann dies besonders von variablen Sternen mit dem Spektrum III. Klasse sagen; aber man darf bei der Nähe der Sonne kaum eine Aufklärung der Verhältnisse durch die Untersuchung der weiter entfernten Sterne, viel eher kann man den entgegengesetzten Fall erwarten.

Was der Grund der Strahlungsvariationen der Sonne ist, wissen wir nicht genau. Nur ganz allgemein kann man einen Zusammenhang mit inneren Bewegungen — besonders in den äußeren Schichten der Sonne — vermuten. Man sieht sogenannte *„Flecken“* entstehen, sich entwickeln und verschwinden. Die Zahl und Größe der Flecken ist veränderlich, man beobachtet *„Fleckenmaxima“* und *„Fleckenminima“* in unregelmäßigen Zeitabschnitten, die durchschnittlich ungefähr elfundeinhalb Jahre umfassen. Außer den Flecken beobachtet man täglich *Protuberanzen*, d. i. Explosionen von Wasserstoffgas. Flecken und Protuberanzen legen Zeugnis ab von inneren Bewegungen in der Sonne. — Eine interessante Diskussion älterer und

---

*) Abbot und Fowle, a. a. O. S. 101 u. ff.

**) Dieselben, a. a. O. S. 232.

neuerer Messungen des Sonnendurchmessers durch Poor*) hat kleine Variationen der Abmessungen und der Gestalt der Sonne wahrscheinlich gemacht. Nicht ausgeschlossen erscheinen Variationen**) von derselben Periode wie die Periode der Sonnenflecken, auch solche von einer vierwöchentlichen Periode. Beide würden ebenfalls von inneren Bewegungen zeugen. Mit den Bewegungen dürften Variationen der partiellen- sowie der Gesamtstrahlung der Sonne verbunden sein. Von partiellen Variationen haben wir übrigens ein direktes Zeugnis: bekanntlich sendet der Rand der Sonne ein weniger intensives Licht aus***) als die Mitte; man hat nun Schwankungen der relativen Strahlungsintensität der Sonnenmitte im Vergleich zum Rand bemerkt. Mit einem Wort: wir halten kürzer- und längerdauernde, kleinere und größere Schwankungen der Sonnenstrahlung für möglich und wahrscheinlich.

Nun werden wir die Frage erörtern, wie groß die Änderung der Strahlung und der Temperatur der Sonne sein muß, damit die Lufttemperatur an der Erdoberfläche um 1° C zunehme. Da es sich um Glazial- bzw. Interglazialzeiten handelt, die Tausende und aber Tausende von Jahren gedauert haben, können wir Formeln, die sich auf stationäre Zustände beziehen, ruhig anwenden. Wir nehmen an, daß die mittlere Jahrestemperatur der Luft an der Erdoberfläche 15° C oder 288° der absoluten Skala beträgt. Der Rechnung legen wir das Stefansche Gesetz zugrunde, nach welchem die Wärmemenge, welche ein Körper von der Temperatur T einem Körper von der Temperatur T_1 abgibt, proportional der Differenz der vierten Potenzen der Temperaturen ist.

Bezeichnet man die von der Sonne pro Minute ausgesandte Wärmemenge mit W und den Proportionalitätsfaktor mit σ, so drückt sich das *Stefansche Gesetz* durch die Gleichung aus:

$$W = \sigma (T^4 - T_1^4) \qquad \ldots\ldots\ldots\ 4$$

Nach dieser Gleichung muß T im Verhältnis $1:q$ und W im Verhältnis $1:q^4$ zunehmen, wenn T_1 im Verhältnis $1:q$ zunimmt. Wenn T_1 von 288 bis 289° zunimmt, so ist $q = 1 + \frac{1}{288}$ und $q^4 = 1 + \frac{1}{72} + \ldots$. Die „effektive" Temperatur der Sonne, d. i.

*) Poor, An investigation of the Figure of the Sun .... Annals New York Academy of Sc.. Bd. XVIII (1908), S. 385–424.

**) Sichtbare Amplitude ungefähr 0,1″.

***) Infolge der Absorption in der Sonnenatmosphäre.

die Temperatur eines „vollkommen schwarzen“ Körpers, welcher dieselbe Wärmemenge wie die Sonne aussendet, beträgt ungefähr 6000°. Da $\frac{6000^0}{288} = 20{,}8^0 \ldots .$, so schließen wir, daß die effektive Temperatur der Sonne um 20,8° . . . zunehmen muß, damit die Temperatur der Erdoberfläche um 1° C zunehme. Gleichzeitig muß die Sonnenstrahlung oder mit anderen Worten, die Solarkonstante, um $^1/_{72}$ ihres Wertes, d. i. um beinahe 1,4 Proz., zunehmen. — Die totale Amplitude der Temperaturschwankung zwischen den glazialen und interglazialen Epochen schätzen wir auf etwa 7 bis 8°. Die entsprechende Amplitude der Sonnentemperaturschwankung müßte sich auf 150 bis 170° und die entsprechende Variation der Solarkonstante auf $^1/_9$, d. h. 11 Proz. ihres Wertes belaufen.

Eine besondere Bedeutung darf man der obigen Rechnung nicht zuschreiben. Wir haben mit der effektiven Temperatur der Sonne gerechnet, denn nur diese — nicht die wahrscheinlich etwas höhere wahre Temperatur der Sonne — kann aus der Solarkonstante berechnet werden. Andererseits sind wir nicht von der effektiven, sondern von der wahren mittleren Jahrestemperatur der Luft an der Erdoberfläche ausgegangen. Denn im Fall der Erde ist die wahre Temperatur bekannt und die effektive*) unbekannt. Demnach haben wir mit inhomogenen Größen operiert. Dazu gesellt sich der Umstand, daß die Formel 4, als für effektive Temperaturen gültig, nicht die Variationen der wahren, sondern der effektiven Temperatur liefert. — Doch handelt es sich bei allen derartigen Rechnungen weniger um genaue Zahlenwerte als um deren Größenordnung. Es schadet nichts, wenn bei der Schätzung der Variationen der Sonnentemperatur sich hundert Grad zu viel oder zu wenig aus der Rechnung ergeben.

§ 5. Der Einfluß der Kohlensäure auf die Absorption der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre. — Durchgang durch einen Nebel.

In gewissen geologischen Kreisen erfreut sich die Hypothese von S. Arrhenius vom Einfluß der atmosphärischen Kohlensäure auf das Klima einer großen Beliebtheit, unter den Physikern wurde sie von Anfang an scharf kritisiert. Um einzusehen, worin sie

*) Abbot und Fowle schätzen die effektive Temperatur der Erde auf etwa 30° niedriger als die wahre mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche.

eigentlich besteht, müssen wir etwas weiter ausholen. In den unteren Schichten der Atmosphäre beträgt der Gehalt an Kohlensäure nur etwa 0,0003 des Luftvolumens. Über den Meeren scheint der Kohlensäuregehalt etwas geringer zu sein als über den Festländern, auf hohen Bergen etwas geringer als über Niederungen. Eine Abnahme des Kohlensäuregehaltes mit der Höhe wäre übrigens angesichts des großen spezifischen Gewichts dieses Gases leicht erklärlich. — Diese örtlichen Unterschiede des Kohlensäuregehaltes brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Wir können annehmen, daß überall 0,03 Proz. des Luftvolumens auf Kohlensäure entfallen. Da die relative Dichte dieses Gases in bezug auf Luft sich durch die Zahl 1,52909 ausdrückt (bei 0^0 und 760 mm Druck wiegt ein Kubikmeter Kohlensäure 1,9772 kg), so können wir sagen, daß 0,046 Proz. der Luftmasse aus Kohlensäure besteht.

Aus den Vulkanen, aus sogenannten „*Mofetten*"*), aus kohlensäurehaltigen Wasserquellen entweicht Kohlensäure in die Luft und vergrößert den Vorrat dieses Gases in der Atmosphäre. Zu diesen von jeher bestehenden Quellen der Kohlensäure hat sich in der Neuzeit das intensive Verbrennen der Kohle durch die Menschheit gesellt. Im Jahre 1901 z. B. hat man 780 Millionen Metertonnen Kohle verbrannt. Da 3 g Kohle sich mit 8 g Sauerstoff zu 11 g Kohlensäure verbinden, so hat das Verbrennen von 780 Millionen Metertonnen Kohle während des Jahres 1901 der Atmosphäre 2860 Millionen Metertonnen Kohlensäure zugeführt. — Bei gewissen, ziemlich plausiblen Hypothesen über die Konstitution der Atmosphäre kann man die Masse derselben auf 53×10^{14} Tonnen und unter Annahme eines Gehaltes von 0,046 Proz. die Masse der in der Atmosphäre enthaltenen Kohlensäure auf 243×10^{10} Tonnen veranschlagen. Daraus folgt, daß die im Jahre 1901 aus der Verbrennung der Kohle entstandene Kohlensäure ungefähr $\frac{1}{850}$ des in der Atmosphäre enthaltenen Gasvorrates betrug. — Den Kohlensäureeinnahmen stehen auch Verluste gegenüber. Tiere scheiden Kohlensäure Tag und Nacht, Pflanzen nur nachts aus, aber der Verbrauch der Kohlensäure durch die Pflanzen während der Tageszeit wiegt wahrscheinlich die Produktion durch Tierorganismen und durch die Pflanzen des Nachts annähernd auf.

---

*) Mofetten sind eigentlich Spalten im Boden, aus denen CO_2 entweicht, sie kommen in vulkanischen Gebieten vor.

Viel Kohlensäure wird durch die Verwitterung der Gesteine verbraucht: bei der Verwitterung der Silikatgesteine bilden sich Karbonate und freie Oxyde, wobei als „Residuum“ kieselsäureärmere Hydrosilikate, wie Kaoline, Chlorite, Serpentine entstehen. Eine andere Ursache der Verluste liegt in dem Absterben der Pflanzen, falls sie von der Verwesung an der Oberfläche verschont werden und in tiefere Erdschichten gelangen. Die dem Kreislauf entzogene Kohle wird in der Gestalt von Torf, Steinkohle, Braunkohle, Graphit, vielleicht Petroleum und anderer Kohlenwasserstoffe aufgespeichert. Auf diese Weise wird der atmosphärische Kohlensäurevorrat einerseits vermehrt, andererseits verringert: je nach Umständen kann entweder der jährliche Gewinn oder der jährliche Verlust die Oberhand gewinnen. Dank dem Verbrennen der Kohle scheint gegenwärtig der Gewinn im Vorteil zu sein. Damit steht der vermeintliche größere Gehalt an Kohlensäure über den Festländern wahrscheinlich in Zusammenhang.

Die Kohlensäure absorbiert so gut wie gar keine sichtbaren Strahlen, im ultravioletten Teil des Spektrums bildet sie einige schwache, im ultraroten dagegen ausgeprägte, breite Absorptionsbänder. Ein Band reicht von der Wellenlänge 2,3 μ bis 3,0 μ, ein zweites von 3,9 μ bis 4,7 μ, ein drittes von 12,5 μ bis 16,0 μ.*) Dank dieser selektiven Absorption läßt die Kohlensäure die Sonnenstrahlen beinahe ungeschwächt durch. Scheiner**) schätzt den Anteil der atmosphärischen Kohlensäure an der Absorption nur auf etwa 1 Proz. der Sonnenstrahlung. Viel stärker absorbiert die Kohlensäure die dunkle Strahlung eines Körpers von niedriger Temperatur. Abbot und Fowle***) schätzen die Absorption der Strahlung eines „schwarzen“ Körpers von der Temperatur 14,2° C auf 14 Proz., Rubens und Ladenburg schätzen die Absorption der irdischen Strahlung durch die Kohlensäure auf 22,5 Proz., da aber 3,8 Proz. von der Kohlensäure wieder in den Weltraum ausgestrahlt werden, so beträgt die wirkliche Verminderung der Erdstrahlung 18,7 Proz. — Die Hypothese von Arrhenius besteht nun im folgenden: Denken wir uns, daß dank sehr starken und häufigen Vulkanausbrüchen der Gehalt an Kohlensäure in der Atmosphäre bedeutend zugenommen hat. Die Wärmemenge, welche die

---

*) Ein Mikron (μ) = $^1/_{1000}$ mm.

**) Scheiner, a. a. O. S. 52.

***) Abbot und Fowle, a. a. O. S. 172.

Erde jährlich von der Sonne erhält, würde dadurch so gut wie gar nicht affiziert werden, die dunkle Strahlung der Erde würde dagegen in einem stärkeren Grade als jetzt von der Atmosphäre zurückgehalten worden sein und das Klima müßte wärmer werden. Umgekehrt kann man sich denken, daß in einer Epoche sehr schwacher vulkanischer Tätigkeit die Verwitterung der Gesteine den Vorrat an Kohlensäure bedeutend verringern könnte; eine Folge davon wäre eine verstärkte Ausstrahlung der Erde und in letzter Instanz eine allgemeine Erniedrigung der Temperaturen.

Wohlverstanden haben wir nur den Grundgedanken der Hypothese von Arrhenius dargelegt. Auf die Einzelheiten eingehen können wir nicht, um so mehr, als Arrhenius dieselben unter dem Eindruck der Kritik und einiger neuen Untersuchungen mehrmals modifiziert hat.*) Im Jahre 1897 berechnete er, daß einem halb so großen Kohlensäuregehalte wie dem gegenwärtigen eine um 4° C niedrigere als die gegenwärtige Temperatur der Erdoberfläche entspricht; im Jahre 1901 verringerte er diese Temperaturdifferenz auf 3,2°, im Jahre 1906 sogar auf 1,5°. Statt dessen schob er 1906 eine sekundäre Folge der Abnahme des Kohlensäuregehaltes in den Vordergrund. Er behauptete, daß Hand in Hand mit der Abnahme des Kohlensäuregehaltes eine Abnahme des Wasserdampfgehaltes geht. Diese letztere soll ebenfalls die Strahlung der Erde so begünstigen, daß die Temperaturabnahme um weitere 2,4° vergrößert, also endgültig auf 3,9° gebracht wird.

Wie gesagt, hat die Hypothese von Arrhenius bei den Physikern keinen besonderen Beifall gefunden, und zwar wurde nicht ihre qualitative, sondern ihre quantitative Seite angefochten. Der wichtigste Einwand besteht darin, daß die Absorption der irdischen Strahlung durch die Kohlensäure bei weitem nicht proportional dem Gehalte dieses Gases in der Atmosphäre, sondern weit langsamer zunimmt. Aus den Versuchen von Rubens und Ladenburg folgt, daß ein um 20 Proz. höherer Gehalt als der gegenwärtige die Absorption nur um $^1/_{30}$, ein um 100 Proz. höherer nur um

---

*) Man vergl. folgende Abhandlungen von Arrhenius:

On the Influence of Carbonic Acid on the Temperature of the Ground. Phil. Magaz., Ser. V, Bd. 41 (1896), S. 237—276.

Lehrbuch der kosmischen Physik, S. 503 u. ff. Leipzig 1903.

Die vermutliche Ursache der Klimaschwankungen. Meddelanden från k. Vetenskapsakademiens Nobelinstitut, Bd. I, Nr. 2 (1906), S. 1—10.

$^{1}/_{10}$ steigert. Die Absorption im Bereiche der obenerwähnten Bänder ist nämlich intensiv: eine geringe Menge des Gases reicht schon hin, um die entsprechenden Strahlen zu verschlucken, aber eine weitere Steigerung des Kohlensäuregehaltes hat wenig Einfluß, da sie nur die sehr schwache allgemeine Absorption befördert. — Nach Abbots und Fowles Meinung ist der Einfluß der Kohlensäureabsorption wegen der Konkurrenz der Wasserdampfabsorption unbedeutend. „In den niederen Schichten der Atmosphäre“, sagen sie*), „ist Wasserdampf immer in genügend großer Menge vorhanden, um — ganz unabhängig von der Anwesenheit der Kohlensäure — die Erdstrahlung im Gebiete der Kohlensäureabsorptionsbänder auszulöschen. Infolgedessen kann die Kohlensäure ihre absorbierende Tätigkeit nur oberhalb 5000 m — d. i. oberhalb der Region, wo der Wasserdampf in größeren Mengen vorhanden ist — entwickeln.“ — Dieses Zitat macht es zugleich verständlich, warum Arrhenius in seinen späteren Abhandlungen den größeren Teil des Effektes den Variationen des Wasserdampfgehaltes zuschreibt. Leider beruhen seine diesbezüglichen Rechnungen auf ziemlich unsicheren Grundlagen.

Es muß außerdem hervorgehoben werden, daß namhafte Änderungen des Kohlensäuregehaltes in der Atmosphäre nicht so leicht zustande kommen können. Gesetzt, daß die Atmosphäre q Tonnen CO_2 enthält und der Gehalt verdoppelt werden soll, so muß man der Atmosphäre nicht q Tonnen, sondern bedeutend mehr zuführen. Schon Schloesing hat gezeigt (vergl. siebentes Kapitel, § 7), daß die Menge der im Meere aufgelösten Bikarbonate vom Partialdrucke der Kohlensäure abhängt. Eine Abnahme von CO_2 in der Atmosphäre zieht die Dissoziation eines Teiles der Karbonate im Meere und eine Befreiung einer gewissen Kohlensäuremenge aus dem Meere nach sich. Bei einer Zunahme des Kohlensäuregehaltes in der Atmosphäre, löst sich sofort ein Teil derselben im Meere auf, um dort teils als freies Gas, teils als ein Bestandteil von neugebildeten Bikarbonaten zu verbleiben.

Nach A. Krogh**) enthält gegenwärtig ein Liter Meerwasser im Mittel wenigstens 50 mg CO_2. Da das Volumen des Ozeans

*) Abbot und Fowle, a. a. O. S. 172.

**) A. Krogh, The abnormal CO_2 Percentage in the Air of Greenland and the general Relations between the atmospheric and oceanic Carbonic Acid. Meddelelser om Grönland, Bd. 26 (1904), S. 420 u. ff.

131×10^{16} cbm bzw. 131×10^{19} Liter beträgt, so folgt daraus, daß der Ozean gegenwärtig wenigstens 655×10^{11} Tonnen CO_2, also ungefähr 27 mal so viel wie die Atmosphäre enthält. (Gegenwärtig enthält die Atmosphäre ungefähr $24{,}3 \times 10^{11}$ Tonnen CO_2.)

Auf Grund seiner Versuche berechnet Krogh die folgende Tabelle*):

Druck von CO_2 in der Atmosphäre	Menge von CO_2 im Meere
0,0001 Atmosphäre	457×10^{11} Tonnen
0,0002 „	589 „
0,0003 „	**655** „
0,0004 „	704 „
0,0005 „	736 „

(Diejenigen Zahlen, die sich auf den gegenwärtigen Zustand beziehen, sind fettgedruckt.)

Durch eine einfache Interpolation berechnet man aus der obigen Tabelle, daß bei einem halb so großen Kohlensäuregehalte als dem gegenwärtigen — d. i. bei einem Partialdruck von 0,00015 — das Weltmeer ungefähr 530×10^{11} Tonnen CO_2 enthalten würde. Die Differenz $(655 - 530) \times 10^{11} = 125 \times 10^{11}$ Tonnen CO_2 ist mehr als fünfmal so groß wie der ganze gegenwärtige Vorrat von Kohlensäure in der Atmosphäre. Um also den gegenwärtigen Kohlensäuregehalt in der Atmosphäre auf die Hälfte zu reduzieren, muß man nicht die Hälfte des gegenwärtigen Vorrates dieses Gases in der Atmosphäre, sondern eine fünfundeinhalbmal so große Menge auf irgendeine Weise aus dem Kreislauf vollständig ausschalten. Dabei zeigt Krogh, daß der Übergang der Kohlensäure aus dem Meere in die Atmosphäre oder in umgekehrter Richtung relativ sehr rasch vor sich geht, so daß die Erreichung eines neuen Gleichgewichtszustandes wenig Zeit in Anspruch nimmt.

Somit spielt das Meer im Kohlensäurehaushalt die Rolle eines Regulators, der sich den Änderungen des Gehaltes dieses Gases in der Atmosphäre erfolgreich widersetzt. Dank seinem Einfluß werden den Schwankungen des Kohlensäuregehaltes demnach enge Grenzen gezogen.

In der letzten Zeit hat F. Nölke die Eiszeiten durch ein Zusammentreffen des Sonnensystems mit einem Nebel zu erklären versucht. Die Nebelmaterie absorbiert einen Teil der Licht- und

*) A. Krogh, a. a. O. S. 421.

Wärmestrahlung des Sternes und ruft dadurch auf den ihn umkreisenden Planeten eine Abkühlung hervor. Die Ausdehnung der Nebel ist so groß, daß Hunderttausende von Jahren vergehen können, bis das Sonnensystem einen Nebel durchquert hat. Die quartäre Eiszeit sollte speziell durch das Zusammentreffen mit dem Orionnebel verursacht worden sein.

Ergänzungen und Berichtigungen.

Zu Seite 2. Fußnote. Die betreffende — chaldäische — Periode (der *Saros*) umfaßt 6585⅓ Tage, was 18 Kalenderjahren und, je nach der Anzahl der Schaltjahre, 10⅓ oder 11⅓ Tagen entspricht.

Zu Seite 175. Nach Reid*) wurde das Erdbeben von S. Francisco jahrelang durch eine scherende Deformation vorbereitet, bis die gespannten Gesteine endlich barsten.

Zu Seite 181. Bezüglich der Methode Seebachs ist zu bemerken, daß, indem die Zeit des Stoßes im Hypozentrum unbekannt ist, eigentlich nur die Laufzeitdifferenzen $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$ usw. bekannt sind. Infolgedessen sind Beobachtungen an drei Stationen notwendig.

Zu Seite 199. Das Nivellement hat gezeigt, daß bei Reggio die Küste sich bis zu ½ m und bei Messina bis zu ¾ m gesenkt hat.

Zu Seite 378. Makarow**) führt die Strömungen in der Euripusstraße auf den Einfluß der Gezeitenwellen zurück, welche auf verschiedenen Wegen in das Ägäische Meer gelangen.

Zu Seite 433. In einer anderen Abhandlung***) zieht Makarow 20 Proz. der Niveaudifferenz auf Rechnung der Strömungen ab. Somit behandelt er die Frage dynamisch, obgleich in roher Weise.

Fehlerberichtigungen.

Seite	Zeile von oben	statt	lies
2	35 und 38	12⅓	10⅓
186	4	Erkennnung	„Erkennung“.
274	24 und 30	Adenay	„Adeney“.
457	12	Rücker	„Rodger“.

---

*) H. F. Reid, On Mass Movements . . ., Beiträge zur Geophysik, Bd. X, S. 318–351.

**) S. O. Makarow, Hydrologische Untersuchungen . . . (in russ. Sprache). Mém. Acad. St. Petersbourg, Ser. VIII, Bd. XVIII (1905), Nr. 9, S. 4.

***) Nämlich in den soeben zitierten „Hydrologischen Untersuchungen“. S. 11.

Autorenverzeichnis.

Die Zahlen bezeichnen die Seiten, auf denen der Autor im Text oder in den Fußnoten zitiert wurde.

Sachregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Druck von A. Th. Engelhardt in Leipzig.